Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА СФЕРЕ S^n

А. И. КАМЗОЛОВ

Получены асимптотические оценки для наилучших приближений классов функций $W_p^\alpha(S^n)$ полиномами по сферическим гармоникам степени $\leq N$, для приближения этих классов методом Фурье, для наилучших приближений с помощью линейных положительных полиномиальных операторов в метрике $L^q(S^n)$, рассмотрены неравенства Никольского и Фавара.

Пусть $S^n=\{\xi\in R^{n+1}\mid\Sigma_{j=1}^{n+1}|\xi_j|^2=1\}$, $n\geq 2$, — единичная сфера в R^{n+1}, $d\xi$-инвариантная относительно группы вращений $SO(n+1)$, нормированная единицей мера Хаара на S^n. Пространство $L^2(S^n)=\{f(\xi)\mid\int_{S^n}|f|^2d\xi<\infty\}$ разлагается в прямую ортогональную сумму конечномерных, инвариантных и неприводимых относительно группы $SO(n+1)$ подпространств $\mathscr{H}_k$: $L^2(S^n)=\bigoplus\Sigma_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k$. Каждое подпространство $\mathscr{H}_k$ состоит из ограничений на сферу S^n однородных гармонических многочленов степени k от переменных $\xi_1,\ldots,\xi_{n+1}$ и является собственным подпространством оператора Δ_0 Лапласа-Бельтрами на сфере S^n, отвечающим собственному значению

$$\lambda_k=-k(k+n-1):\quad \mathscr{H}_k=\{f(\xi)\in C^\infty(S^n)\mid\Delta_0 f=\lambda_k f\}.$$

Элементы подпространства $\mathscr{H}_k$ называются сферическими гармониками степени k. Каждое подпространство $\mathscr{H}_k$ содержит единственную зональную сферическую гармонику $Z_k(\xi)$, вещественнозначную, зависящую только от $\Theta=d(\xi,\xi^0)$ — сферического расстояния между точкой $\xi\in S^n$ и точкой $\xi^0=(0,\ldots,0,1)$, такую, что для всякой сферической гармоники $Y\in\mathscr{H}_k$ ее значение в точке $\xi=\sigma\xi^0$, $\sigma\in SO(n+1)$, определяется с помощью интеграла: $Y(\xi)=Y(\sigma\xi^0)=\int_{S^n}Y(\xi')Z_k(\sigma^{-1}\xi')d\xi'$. Зональные сферические гармоники выражаются через ультрасферические полиномы $P_k^{(\lambda)}(t)$ следующим образом:

$$Z_k(\xi)=\tilde{Z}_k(\Theta)=\frac{2k+n-1}{n-1}P_k^{((n-1)/2)}(\cos\Theta).$$

Норма зональных сферических гармоник $Z_k(\xi)$ в пространстве $L^2(S^n)$ при $k\geq 2$ равна:

$$\|Z_k(\xi)\|_2=\sqrt{\dim\mathscr{H}_k}=\sqrt{\binom{n+k}{k}-\binom{n+k-2}{k-2}}\asymp k^{(n-1)/2}.$$

Из асимптотики для ультрасферических полиномов (см. [1]) следует, что при $k\to\infty$

$$(1)\qquad \| Z_k(\xi) \|_p \asymp \begin{cases} k^{(n-1)/2}, & 1 \leqq p < \dfrac{2n}{n-1}, \\ k^{(n-1)/2} (\ln k)^{(n-1)/2n}, & p = 2n/(n-1), \\ k^{n-1-n/p}, & 2n/(n-1) < p \leqq \infty. \end{cases}$$

Если $S_N^\delta(\xi) = A_N^{-\delta} \Sigma_{k=0}^N A_{N-k}^\delta Z_k(\xi)$ — ядро Чезаро N-го порядка индекса $\delta \geqq 0$, то из асимптотики для ядер Чезаро при $N \to \infty$ (см. [2]) следует, что при $1 \leqq p \leqq \infty$

$$(2)\qquad \| S_N^\delta(\xi) \|_p \asymp \begin{cases} N^{(n-1)/2-\delta}, & p < 2n/(n+2\delta+1), \\ N^{(n-1)/2-\delta} (\ln N)^{(n+2\delta+1)/2n}, & p = 2n/(n+2\delta+1), \\ N^{n(1-1/p)}, & p > 2n/(n+2\delta+1). \end{cases}$$

Для функции $f(\xi) \in L^1(S^n)$ мы имеем

$$\int_{S^n} f(\xi) d\xi = \int_0^\pi \left(\int_H f(h^{-1}\xi) dh\right) \rho(\theta) d\theta,$$

где $\Theta = d(\xi, \xi^0)$, $\rho(\Theta) = \dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n/2)} \sin^{n-1}\Theta$-весовая функция, dh — нормированная единицей мера Хаара на стационарной подгруппе $H \subset SO(n+1)$ точки ξ^0, эквивалентной группе $SO(n)$. Если $\tilde{f}_t(\xi) = \int_H f(\sigma h^{-1} \eta \xi^0) dh$ — среднее значение функции $f(\xi)$ на подмногообразии $S_t(\xi) = \{\xi' \in S^n \mid d(\xi, \xi') = t\}$, $\sigma\xi^0 = \xi$, $d(\xi^0, \eta\xi^0) = t$, то (см. [3]) $\| \tilde{f}_t(\xi) \|_p \leqq \| f(\xi) \|_p$. Для функции $\tilde{f}(\Theta) = \tilde{f}_\Theta(\xi^0)$ также имеем, что $\| \tilde{f}(\Theta) \|_p \leqq \| f(\xi) \|_p$. Для зональной функции $g(\xi) = \tilde{g}(\Theta) \in L^1(S^n)$ и функции $f(\xi) \in L^1(S^n)$ определяется свертка $[f * g](\xi)$ по формуле

$$[f*g](\xi) = [f*g](\sigma\xi^0) = \int_{S^n} f(\xi') g(\sigma^{-1}\xi') d\xi'.$$

При этом выполняется неравенство Юнга $\| f * g \|_q \leqq \| f \|_p \| g \|_r$, где $1 \leqq p$, q, $r \leqq \infty$, $1/q = 1/p + 1/r - 1$. Оператор ортогонального проектирования H_k: $L^2(S^n) \to \mathscr{H}_k$ задается формулой: $H_k f = f * Z_k$. Относительно приведенных выше элементов гармонического анализа на сфере S^n см. [4; 5].

Если $\delta > (n-1)/2$, то $f * S_N^\delta$ сходится к f в $L^p(S^n)$, см. [6]. Известно (см. [7]), что если $\alpha > 0$, то существует функция $g_\alpha(\xi) \in L^1(S^n)$, такая, что $g_\alpha(\xi) = \tilde{g}_\alpha(\Theta) \sim \Sigma_{k=1}^\infty [k(k+n-1)]^{-\alpha/2} Z_k(\xi)$. Если $\alpha > n/p$, $1 < p < \infty$, то $g_\alpha(\xi) \in L^{p'}(S^n)$; если $\alpha > n$, то $g_\alpha(\xi) \in C(S^n)$ и ряд сходится к $g_\alpha(\xi)$ равномерно. При $\alpha > n/p$ имеет место равенство в смысле $L^{p'}(S^n)$:

$$(3)\qquad g_\alpha(\xi) = \sum_{k=0}^\infty \Delta^{n+1} \mu_k A_k^n S_k^n(\xi),$$

где $\mu_0 = 0$, $\mu_k = (-\lambda_k)^{-\alpha/2} = [k(k+n-1)]^{-\alpha/2}$, $\Delta^{n+1}\mu_k = \Delta^n \mu_k - \Delta^n \mu_{k+1}$ — конечная разность $(n+1)$-го порядка, $A_k^n = \binom{n+k}{k}$. При $\alpha > \max\{(n-1)/2, n/p\}$ имеет место равенство в смысле $L^{p'}(S^n)$:

$$(4)\qquad g_\alpha(\xi) = \sum_{k=0}^\infty \Delta\mu_k S_k(\xi) = \sum_{n=0}^\infty \Delta^2 \mu_k A_k^1 S_k^1(\xi),$$

где $\Delta\mu_k = \Delta^1 \mu_k$, $S_k(\xi) = S_k^0(\xi)$.

Пусть $W_p^\alpha(S^n)=\{f(\xi)\mid f(\xi)=c+[x*g_\alpha](\xi),\ \|x\|_p\leq 1,$

$$H_0x=\int_{S^n}x(\xi)d\xi=0,\ \alpha>0,\ 1\leq p\leq\infty\}.$$

Функция $f(\xi)=c+[x*g_\alpha](\xi)$ называется α-м (вообще говоря, дробным) интегралом функции $x(\xi)$ и обозначается $I_\alpha x(\xi)$ (см. [7]).

Пусть $\mathscr{H}(N)=\bigoplus\Sigma_{k=0}^N\mathscr{H}_k,\quad \mathscr{H}(N)^\perp=\{f(\xi)\mid H_kf=f*Z_k=0,\quad 0\leq k\leq N\}$;

$$I_\alpha^0x=x*g_\alpha;\ \tilde{\mathscr{H}}(N)=\{f(\xi)\in\mathscr{H}(N)\mid f(\xi)=\tilde{f}(\Theta)\};\ \tilde{\mathscr{H}}_N=\{f(\xi)\in\mathscr{H}_N\mid f(\xi)=\tilde{f}(\Theta)\}$$
$$=\{cZ_k(\xi)\}.$$

1. Неравенства разных метрик для полиномов по сферическим гармоникам. Пусть $\nu(N,p,q)=\sup\{\|x\|_q\mid x\in\mathscr{H}(N),\ \|x\|_p\leq 1\}$.

Теорема 1. *Для величины $\nu(N,p,q)$ имеет место следующая асимптотика при $N\to\infty$: $\nu(N,p,q)\asymp N^{n(1/p-1/q)_+}$.*

Доказательство. Если $1\leq q\leq p\leq\infty$, то $\nu(N,p,q)=1$, так как $\|x\|_q\leq\|x\|_p$, а для функции $x(\xi)\equiv 1$ имеем, что $\|x\|_q=\|x\|_p=1$.

Если $1\leq p<q=\infty$, то

$$\nu(N,p,\infty)=\sup\{\|x\|_\infty\mid x\in\mathscr{H}(N),\ \|x\|_p=1\}=\sup\{|x(\xi^0)|\mid x\in\mathscr{H}(N),\ \|x\|_p=1\}$$
$$=\sup\{|x(\xi^0)|\mid x\in\tilde{\mathscr{H}}(N),\ \|x\|_p=1\}$$
$$\leq\sup\{\|T_N(\Theta)\|_\infty\mid T_N\in\mathscr{T}_N,\ \int_0^\pi|T_N(\theta)|^p\rho(\theta)d\theta=1\},$$

где $\mathscr{T}_N$ — пространство тригонометрических косинус-полиномов порядка $\leq N$.

Так как для любого тригонометрического полинома порядка $\leq N$ (см. [8])

$$\|T_N(\Theta)\|_\infty\leq AN^{(\alpha+1)/p}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|T_N(\Theta)|^p|\sin\Theta|^\alpha d\Theta\Big)^{1/p},$$

то $\nu(N,p,\infty)\leq C_{p,\infty}N^{n/p}$.

Если $1\leq p<q<\infty$, то $\|x\|_q^q=\int_{S^n}|x(\xi)|^qd\xi\leq\|x\|_\infty^{q-p}\|x\|_p^p$. Отсюда следует, что $\nu(N,p,q)\leq C_{p,q}N^{n(1/p-1/q)}$. С другой стороны, если $1\leq p<q\leq\infty$, то используем (2) и получаем

$$\nu(N,p,q)\geq\|S_N^n(\xi)\|_q/\|S_N^n(\xi)\|_p\geq c_{p,q}N^{n(1/p-1/q)}.$$

2. Неравенства разных метрик для сферических гармоник данной степени. Пусть $\nu_N(p,q)=\sup\{\|x\|_q\mid\|x\|_p\leq 1,\ x\in\mathscr{H}_N\}$.

Теорема 2. *Для величины $\nu_N(p,q)$ имеют место следующие оценки при $N\to\infty$:*

a)
$$\nu_N(p,\infty)\asymp\begin{cases}N^{(n-1)/2}, & 1\leq p<2n/(n-1),\\ N^{(n-1)/2}(\ln N)^{-(n-1)/2n}, & p=2n/(n-1),\\ N^{n/p}, & 2n/(n-1)<p,\end{cases}$$

b)
$$\nu_N(1,q)\asymp N^{\frac{n-1}{2}(1-1/q)},$$

c)
$$\nu_N(p,q)\asymp N^{n(1/p-1/q)},\ \frac{2n}{n-1}<p<q,$$

d) $$\nu_N(p,q)\leq\begin{cases}C_{p,q}N^{\frac{n-1}{2}p(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}, & 1<p<2n/(n-1),\quad p<q<\infty,\\ C_{p,q}N^{n(\frac{n-1}{2n}-\frac{1}{q})}(\ln N)^{\frac{1}{q}-\frac{n-1}{2n}}, & p=2n/(n-1),\ p<q<\infty.\end{cases}$$

Доказательство. Утверждение а) следует из (1) и из-за того, что

$$\nu_N(p,\infty)=\sup\{\|x\|_\infty \mid \|x\|_p=1,\quad x\in\mathscr{H}_N\}=\sup\{|x(\xi^0)| \mid$$
$$\|x\|_p=1,\ x\in\mathscr{H}_N\}=\sup\{|x(\xi^0)| \mid \|x\|_p=1,\ x\in\tilde{\mathscr{H}}_N\}=\|Z_N\|_\infty/\|Z_N\|_p.$$

Если $1\leq p<q<\infty$, то $\|x\|_q\leq\|x\|_\infty^{(q-p)/q}\|x\|_p^{p/q}$ и $\nu_N(p,q)\leq\nu_N^{1-p/q}(p,\infty)$, что дает оценки сверху в случаях в), с) и d). Если $x(\xi)=\sin^N\Theta\sin^N\Theta_{n-1}\cdots\sin^N\Theta_2e^{iN\Theta_1}$, где $\Theta_1,\ldots,\Theta_{n-1},\Theta$ сферические координаты точки $\xi\in S^n$, то $x(\xi)\in\mathscr{H}_N$, $\|x\|_r\asymp N^{-(n-1)/2r}$ и

$$\nu_N(1,q)\geq\|x\|_q/\|x\|_1\geq c_{1,q}N^{\frac{n-1}{2}(1-\frac{1}{q})}.$$

Если $2n/(n-1)<p<q$, то $\nu_N(p,q)\geq\|Z_N\|_q/\|Z_N\|_p\geq c_{p,q}N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}$.

Замечание. В случае $n=2$ оценки сверху получены в [9]. Вопрос о точности оценок *d*) остается открытым.

3. Наилучшее приближение классов функций $W_p^\alpha(S^n)$ и неравенство Фавара. Пусть

$$E(N,\alpha,p,q)=\sup\{\inf\{\|f-F\|_q \mid F\in\mathscr{H}(N)\} \mid f\in W_p^\alpha(S^n)\}$$

наилучшее приближение класса функций $W_p^\alpha(S^n)$ полиномами по сферическим гармоникам степени $\leq N$,

$$\Phi(N,\alpha,p,q)=\sup\{\|I_\alpha^0x\|_q \mid \|x\|_p\leq1,\ x\in\mathscr{H}(N)^\perp\}$$ —

норма оператора I_α^0 дробного интегрирования из $L^p(S^n)\cap(\mathscr{H}(N)^\perp)$ в $L^q(S^n)$.

Теорема 3. *При $\alpha>n(1/p-1/q)_+$ имеет место следующая асимптотика при $N\to\infty$: $E(N,\alpha,p,q)\asymp\Phi(N,\alpha,p,q)\asymp N^{n(1/p-1/q)_+-\alpha}$.*

При доказательстве теоремы используется

Лемма. *Если $\alpha>n(1-1/r)$, $1\leq r\leq\infty$, то для величины $e(N,\alpha,r)=\inf\{\|g_\alpha-F\|_r \mid F\in\mathscr{H}(N)\}$ наилучшего приближения ядра $g_\alpha(\xi)$ оператора дробного интегрирования полиномами по сферическим гармоникам степени $\leq N$ в метрике $L^r(S^n)$ имеет место следующая асимптотика при $N\to\infty$: $e(N,\alpha,r)\asymp N^{n(1-1/r)-\alpha}$.*

Доказательство теоремы смотри в [10] и [11].

4. Приближение классов функций, инвариантных относительно сдвигов, линейными операторами и структура инвариантных относительно сдвигов линейных операторов. Класс W функций, определенных на сфере S^n, называется инвариантными относительно сдвигов, если $T_\sigma W=\{T_\sigma f(\xi)=f(\sigma^{-1}\xi) \mid f\in W\}\subset W$ для любого вращения $\sigma\in SO(n+1)$.

Линейный оператор A называется инвариантными относительно сдвигов, если он перестановочен с операторами сдвига T_σ, то есть $T_\sigma A=AT_\sigma$ для любого вращения $\sigma\in SO(n+1)$.

Следующая теорема показывает, что для приближения классов функций, инвариантных относительно сдвигов, линейными операторами по норме, инвариантной относительно сдвигов ($\|T_\sigma f\| = \|f\|$), лучше всего использовать инвариантные относительно сдвигов операторы.

Теорема 4. *Пусть $\mathscr{H} \subset L^2(S^n)$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно сдвигов, $W \subset L^2(S^n)$ — подмножество, инвариантное относительно сдвигов, $A: L^2(S^n) \to \mathscr{H}$ линейный непрерывный в $L^2(S^n)$ оператор.*

Пусть $W, \mathscr{H} \subset \mathscr{B}(S^n)$, где $\mathscr{B}(S^n)$-нормированное пространство функций на S^n с нормой, инвариантной относительно сдвигов. Тогда существует линейный непрерывный в $L^2(S^n)$ оператор $\widetilde{A}: L^2(S^n) \to \mathscr{H}$, инвариантный относительно сдвигов, такой, что

$$\sup\{\|f - \widetilde{A}f\|_{\mathscr{B}} \mid f \in W\} \le \sup\{\|f - Af\|_{\mathscr{B}} \mid f \in W\}.$$

Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть оператор

$$\widetilde{A} = \int_{SO(n+1)} T_\sigma A T_{\sigma^{-1}} d\sigma,$$

где $d\sigma$ — нормированная единицей мера Хаара на группе $SO(n+1)$.

Учитывая, что представления группы $SO(n+1)$ операторами сдвига T_σ в пространствах $\mathscr{H}_k$ неприводимы и неэквивалентны, и используя лемму Шура, мы получаем следующий результат:

Теорема 5. *Пусть A — инвариантный относительно сдвигов, ограниченный в $L^2(S^n)$ линейный оператор. Тогда $A = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k H_k$ и $\|A\|_2 = \sup\{|\mu_k|\}$.*

5. Приближение классов функций $W_p^\alpha(S^n)$ методом Фурье. Пусть $S_N f(\xi) = [f * S_N](\xi)$ — частная сумма ряда Фурье функции $f(\xi)$ по сферическим гармоникам, $G(N, \alpha, p, q) = \sup\{\|f - S_N f\|_q \mid f \in W_p^\alpha\}$ — величина приближения класса функций $W_p^\alpha(S^n)$ методом Фурье в метрике $L^q(S^n)$.

Теорема 6. *Для величины $G(N, \alpha, p, q)$ имеют место следующие соотношения:*

a) $$G(N, \alpha, p, \infty) \asymp \begin{cases} N^{\frac{n-1}{2} - \alpha}, & p > 2n/(n-1),\ \alpha > (n-1)/2, \\ N^{\frac{n-1}{2} - \alpha} (\ln N)^{\frac{n+1}{2n}}, & p = 2n/(n-1),\ \alpha > (n-1)/2. \\ N^{\frac{n}{p} - \alpha}, & 1 \le p < 2n/(n-1),\ \alpha > n/p, \end{cases}$$

b) $$G(N, \alpha, 1, q) = G(N, \alpha, q', \infty), \quad \alpha > \max\{(n-1)/2, n/q'\},$$

c) $$G(N, \alpha, p, q) \asymp \begin{cases} N^{-\alpha}, & q \le 2 \le p,\ \alpha < 0, \\ N^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \alpha}, & \frac{1}{q} - \frac{1}{2} < \min\left\{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right), \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\right\}, \alpha > n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right), \end{cases}$$

$$
\text{d)}\qquad G(N,\alpha,p,q)\leq\begin{cases}
C_{\alpha,p,q}N^{(n-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)-\alpha}, & 0<\frac{1}{2}-\frac{1}{q}<n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right), \\
\alpha>(n-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right), & \\
C_{\alpha,p,q}N^{(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\alpha}, & 0<\frac{1}{p}-\frac{1}{2}<n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right) \\
\alpha>(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right), & \\
C_{\alpha,p,q}N^{(n-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)-\alpha}(\ln N)^{\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}, & \\
\frac{2n}{n-1}<p<2,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{q}=n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right),\ \alpha>(n-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right), & \\
C_{\alpha,p,q}N^{(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)-\alpha}(\ln N)^{\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}, & \\
1<p<2,\quad \frac{1}{p}-\frac{1}{2}=n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right),\ \alpha>(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right). &
\end{cases}
$$

Доказательство а) содержится в [12]. Так как $f-S_Nf=x*g_{\alpha,N}$, где $f=c+[x*g_\alpha]$, $g_{\alpha,N}(\xi)\sim\sum_{k=N+1}^{\infty}[k(k+n-1)]^{-\frac{\alpha}{2}}Z_k(\xi)$, то из двойственности пространств $L^p(S^n)$ и $L^{p'}(S^n)$ при $1<p<\infty$ и из того, что $W_p^\alpha\subset C(S^n)$ при $\alpha>\frac{n}{p}$ следует в).

Рассматривая $g_{\alpha,N}(\xi)$ для комплексных значений α с $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, получаем аналитическое семейство операторов A_α: $x\to x*g_{\alpha,N}$, ограниченных в $L^2(S^n)$. Применяя метод комплексной интерполяции, учитывая а) и в), замечая, что $\|f\|_q\leq\|f\|_2\leq\|f\|_p$ для $q\leq 2\leq p$, получаем оценки сверху в с) и d). Оценки снизу в с) следуют из того, что $G(N,\alpha,p,q)\geq E(N,\alpha,p,q)$. Вопрос о точности оценок d) по порядку остается открытым.

6. Наилучшее приближение классов функций $W_p^\alpha(S^n)$ линейными положительными полиномиальными операторами. Обозначим через $\Lambda_N^+=\{L_N^+\}$ совокупность линейных положительных полиномиальных операторов, таких, что $L_N^+f\in\mathscr{H}(N)$ и $L_N^+f\geq 0$, если $f(\xi)\geq 0$. Через $\widetilde{\Lambda}_N^+=\{\widetilde{L}_N^+\}$ обозначим совокупность линейных положительных полиномиальных операторов из Λ_N^+, инвариантных относительно сдвигов.

Пусть $\lambda_N^+(\alpha,p,q)=\inf\{\sup\{\|f-L_N^+f\|_q\mid f\in W_p^\alpha\}\mid L_N^+\in\Lambda_N^+\}$ — величина наилучшего приближения класса функций $W_p^\alpha(S^n)$ с помощью линейных положительных полиномиальных операторов.

Теорема 7. *Для величины $\lambda_N^+(\alpha,p,q)$ имеет место следующая асимптотика при $N\to\infty$:*

$$
\lambda_N^+(\alpha,p,q)\asymp\begin{cases}
N^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+-\alpha}, & n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+<\alpha<2+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+, \\
N^{-2}, & \alpha>2+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)_+.
\end{cases}
$$

Доказательство. Если $1 \leq q \leq p \leq \infty$, то $\lambda_N^+(\alpha, p, q) \leq \lambda_N^+(\alpha, p, p)$. Так как класс функций $W_p^\alpha(S^n)$ инвариантен относительно сдвигов и прибавления констант, то, используя теоремы 4 и 5, получаем, что

$$\lambda_N^+(\alpha, p, q) = \inf\{\sup\{\|f - \widetilde{L}_N^+ f\|_q \mid f \in W_p^\alpha\} \mid \widetilde{L}_N^+ \in \widetilde{\Lambda}_N^+\}$$

$$\leq \inf\{\|g_\alpha - T_N * g_\alpha\|_1 \mid T_N(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k Z_k(\xi) \geq 0\}.$$

Если $1 \leq p < q \leq \infty$, то

$$\lambda_N^+(\alpha, p, q) \leq \inf\{\|g_\alpha - T_N * g_\alpha\|_r \mid T_N(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k Z_k(\xi) \geq 0\}.$$

Так как

$$[T_N * g_\alpha](\xi) = \int_0^\pi (\widetilde{g_\alpha})_t(\xi) \widetilde{T}_N(t) \rho(t) dt$$

и (см. [13])

$$\|g_\alpha - (\widetilde{g}_\alpha)_t\|_r \leq \begin{cases} C_{\alpha, r} t^{\alpha - n(1-1/r)}, & n(1-1/r) < \alpha < 2 + n(1-1/r), \\ C_{\alpha, r} t^2, & \alpha > 2 + n(1-1/r), \end{cases}$$

то

$$\lambda_N^+(\alpha, p, q) \leq \begin{cases} C_{\alpha, 1} \inf\limits_{\{\widetilde{T}_N(t)\}} \int_0^\pi t^\alpha \widetilde{T}_N(t) \rho(t) dt, \ 0 < \alpha < 2, \ 1 \leq q \leq p \leq \infty, \\ C_{\alpha, r} \inf\limits_{\{\widetilde{T}_N(t)\}} \int_0^\pi t^{\alpha - n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} \widetilde{T}_N(t) \rho(t) dt, \quad 1 \leq p < q \leq \infty, \\ n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) < \alpha < 2 + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}), \\ C_{\alpha, r} \inf\limits_{\{\widetilde{T}_N(t)\}} \int_0^\pi t^2 \widetilde{T}_N(t) \rho(t) dt, \quad \alpha > 2 + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}), \ 1 \leq p < q \geq \infty. \end{cases}$$

Учитывая, что

$$\inf\{\int_0^\pi t^\beta \widetilde{T}_N(t) \rho(t) dt \mid T_N(\xi) = \widetilde{T}_N(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k Z_k(\xi) \geq 0\} \asymp N^{-\beta}$$

при $0 < \beta \leq 2$, получаем требуемые оценки для величины $\lambda_N^+(\alpha, p, q)$ сверху.

Оценки снизу следуют из того, что $\lambda_N^+(\alpha, p, q) \geq E(N, \alpha, p, q)$ и для функции $f(\xi) = \widetilde{f}(\Theta) = \cos\Theta = \frac{1}{n+1} Z_1(\xi)$ и любого полинома $T_N(\xi) = \widetilde{T}_N(\Theta) = 1 + \Sigma_{k=1}^N a_k Z_k \times (\xi) \geq 0$ имеем

$$\|f - T_N * f\|_q = \frac{1}{n+1} \|Z_1\|_q (1 - a_1) \geq c_q' \int_0^\pi \Theta^2 \widetilde{T}_N(\Theta) \rho(\Theta) d\Theta \geq c_q N^{-2}.$$

Настоящая работа докладована на Конференции по конструктивной теории функций Варна '81.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Сеге. Ортогональные многочлены. Москва, 1962.
2. E. Kogbetliantz. *J. Math. Pures Appl.*, **3**, 1924.
3. А. И. Камзолов. *Матем. заметки*, 1976. **15**, в. 5.
4. И. Стейн, Г. Вейс. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва, 1974.
5. Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория подставлений групп. Москва, 1965.
6. A. Bonani, J.-L. Clerc. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **183**, 1973.
7. R. Askey, S. Wainger. *J. Analyse Math.*, **15**, 1965.
8. Н. К. Бари. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **18**, 1954.
9. R. Stanton, A. Weinstein. On the L^4 norm of spherical harmonics (preprint).
10. А. И. Камзолов. О наилучшем приближении классов $W_p^{\alpha}(S^n)$ полиномами по сферическим гармоникам. *Матем. заметки*, **32**, 1982, № 3.
11. А. И. Камзолов. Неравенство Фавара на сфере S^n. *Вестник МГУ, сер. матем.* 1981, в. 6.
12. А. И. Камзолов. О приближении гладких функций на сфере S^n методом Фурье. *Матем. заметки*, **31**, 1982, № 6.
13. H. Bavink. *J. Math. Anal. Appl.*, **37**, 1972, No 3.

Московский государственный университет
Механико-математический факультет
117234 Москва *СССР*

Поступила 4. 6. 1981