Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

БАЗИСЫ ТОЖДЕСТВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР ВТОРОГО ПОРЯДКА НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

ДИАНА В. ЛЕВЧЕНКО

Доказывается конечная базируемость всех неизоморфных матричных алгебр второго порядка с инволюцией над конечным полем. Указан простой пример восьмиэлементной алгебры с инволюцией, для которой при любом ее представлении в виде $A=B+J$, где J ее радикал Джекобсона, а B — полупростая компонента, B не выдерживает инволюцию.

В настоящей работе построены базисы тождеств матричных алгебр второго порядка $(M_2(F_q), *)$ с инволюцией $(*)$ над конечным полем с q элементами F_q. Конечная базируемость обычных полиномиальных тождеств алгебры $M_2(F_q)$ показана в [1].

Если R алгебра над полем F, то отображение $(*)$; $R\to R$ называется инволюцией, если $a^{**}=a$, $(a+b)^*=a+b$, $(ab)^*=b^*a^*$, $(\lambda a)^*=\lambda a^*$ для всех a, b из R, λ из F. Через $(R, *)$ мы будем обозначать алгебру R с инволюцией $(*)$. Дефинируем гомоморфизм $\psi:(R_1, *)\to(R_2, *)$ как гомоморфизм алгебр $\psi: R_1\to R_2$, при котором $\psi(r^*)=\psi(r)^*$ для всех r из R_1 и будем говорить, что ψ является $(*)$-гомоморфизмом алгебр. Идеал A алгебры R является идеалом алгебры $(R, *)$ (будем говорить еще $(*)$-идеалом алгебры R и записывать $A\lhd(R, *)$), если $A^*=A$. Пусть $A\lhd(R, *)$, тогда очевидно $(*)$ индуцирует инволюцию на R/A через $(r+A)^*=r^*+A$ и каноническое отображение $R\to R/A$ является $(*)$-гомоморфизмом; обратно-ядро любого гомоморфизма является $(*)$-идеалом.

Инволюция матричной алгебры над полем может быть ортогонального или симплектического типа в зависимости от того существует или нет минимальный неподвижный при инволюции идемпотент алгебры [2; 7]. Иногда через $(*_\alpha)$ будем обозначать инволюцию ортогонального типа на матричной алгебре порядка два над полем F_q, а именно:

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c & d \end{pmatrix}^{*_\alpha}=\begin{pmatrix} a & \alpha^{-1}c \\ \alpha b & d \end{pmatrix},$$

где $0\neq\alpha\in F_q$. Оказывается, что над конечным полем F_q характеристики отличной от двух, существуют три неизоморфные класса матричных алгебр второго порядка с инволюцией, которые определяются тремя различными системами тождеств. Два из этих классов с инволюцией ортогонального типа $(*_\alpha)$ соответствуют наличию или отсутствию в поле F_q корня уравнения $x^2+\alpha=0$, а третий неизоморфный класс — это матрицы с симплектической инволюцией:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{*}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 10, 1984, с. 55—67.

Если характеристика поля F_q равна двум, то неизоморфные классы два — один из них с инволюцией—обычное транспонирование матриц, а другой — это матрицы с симплектической инволюцией. Интересно отметить, что множества тождеств этих двух классов также разные. Так например, (7) является тождеством первого из них и не является тождеством второго, а (8) является тождеством второго и не является тождеством первого из этих классов.

В работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Если уравнение $x^2+\alpha=0$ не имеет решения в конечном поле F_q, то все тождества с инволюцией алгебры $(M_2(F_q), *)$ следуют из тождеств:*

$$f_1(x, x^*)=(x-x^*)^q+x-x^*=0, \tag{1}$$

$$f_2(x, x^*)=(x+x^*)^{q^2}-x-x^*=0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть характеристика поля F_q отлична от двух и уравнение $x^2+\alpha=0$ имеет решение в конечном поле F_q. Тогда все тождества с инволюцией алгебры $(M_2(F_q), *)$ следуют из тождеств:*

$$f_3(x, x^*)=(x-x^*)^q-x+x^*=0, \tag{3}$$

$$f_4(x, x^*)=[x+x^*-(x+x^*)^q][x+x^*-(x+x^*)^{q^2}]=0. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть характеристика поля F_q равна двум. Тогда все тождества алгебры $(M_2(F_q), *)$, где инволюция $(*)$ — это обычное транспонирование матриц, вытекают из следующих тождеств:*

$$f_5(x, y)=(x+x^q)(y+y^{q^2})(1+[x, y]^{q-1})=0 \tag{5}$$

$$f_6(x, x^*)=x+x^*+(x+x^*)^{2q-1}=0 \tag{6}$$

$$f_7(x, x^*)=(x+x^*)(x+x^q)(1+[x, x^*]^{2(q-1)})=0, \tag{7}$$

где, как обычно, $[a, b]=ab-ba$.

Теорема 4. *Пусть $(M_2(F_q), *)$ — матричная алгебра второго порядка над конечным полем F_q с симплектической инволюцией. Тогда все тождества с инволюцией этой алгебры следуют из тождеств*

$$f_8(x, x^*)=(x+x^*)^q-x-x^*=0, \tag{8}$$

$$f_9(x, y)=(x-x^q)(y-y^{q^2})(1-[x, y]^{q-1})=0, \tag{9}$$

если характеристика поля F_q — нечетное число, а если поле F_q имеет характеристику два, тождества алгебры $(M_2(F_q), *)$ являются следствиями тождеств (8), (9) *и*

$$f_{10}(x, x^*)=(xx^*)^q-xx^*=0. \tag{10}$$

Напомним, что элемент a алгебры $(R, *)$ называется симметричным, если $a^*=a$. Если основное поле имеет нечетную характеристику, то множество симметричных элементов совпадает с множеством элементов вида $b+b^*$, для b из R.

0. О критических $(*)$-алгебрах. Алгебра $(A, *)$ критическая, если она конечна и не лежит в многообразии, порожденном её собственными $(*)$-подалгебрами и $(*)$-гомоморфными образами, Многообразие алгебр локально конечно, если каждая его конечно порожденная алгебра конечна. Мы будем использовать следующий критерий локальной конечности, содержащийся в [3]:

Лемма 1. *Если $(R, *)$ алгебра с полиномиальным тождеством над конечным полем, симметричные элементы которой алгебраические, то R — локально конечна.*

Так как каждое локально конечное многообразие универсальных алгебр порождается своими конечными алгебрами, то по пр. 1.1 из [4], любое локально конечное многообразие порождается своими критическими алгебрами. Каждая критическая $(*)$-алгебра является монолитической (подпрямо неразложимой), т. е. имеет единственный минимальный $(*)$-идеал, называемый монолитом этой алгебры.

Алгебра $(A, *)$ — простая, если O и A единственные $(*)$-идеалы этой алгебры. Следующая лемма — это утверждение 2.2.12 из [5] для критической (конечной) алгебры R.

Лемма 2. *Если $(R, *)$ простая критическая алгебра, то либо R — матричная алгебра над конечным полем, либо $(R, *)$ — прямое произведение матричной алгебры над конечным полем с ее противоположной алгеброй $(M_n\mathscr{K})\oplus M_n(\mathscr{K}^{op}, 0)$ с обменной инволюцией (0): $(a, b)^0=(b, a)$ для всех (a, b) из $M_n(\mathscr{K})\oplus M_n(\mathscr{K})^{op}$.*

В дальнейшем в этом параграфе будем интересоваться некоторыми критическими ненильпотентными $(*)$-алгебрами над полем $\mathscr{K}$, нильпотентные $(*)$-подалгебры которых удовлетворяют тождеству $xy=0$. Хорошо известно, что если A конечная алгебра над $\mathscr{K}$, а J ее радикал Джекобсона, то J — нильпотентный идеал. По известной теореме Ведерберна $A=B+J$, где B — полупростая алгебра, которая представляется в виде прямого произведения $B=B_1\oplus B_2\oplus\ldots\oplus B_k$ конечного числа простых алгебр. Если M — неприводимый (A_1, A_2)-модуль, где A_1, A_2 — конечные полупростые алгебры, то A_i действует в M либо унитарным, либо нулевым образом.

Лемма 3. *Пусть $(A, *)$ — критическая алгебра с полупростой компонентой $B\neq(0)$ и радикалом $J\neq(0)$, $J^2=(0)$ и пусть выполнено одно из следующих двух условий:*

а) $j^*=j$ для всех j из J;

б) $j^*=-j$ для всех j из J.

Тогда либо $B=B_1$ с $B_1J=JB_1=J$; либо $B=B_1\oplus B_2$ с $B_1J=JB_2=J$, $JB_1=B_2J=(0)$, $B_1^*\subset B_2+J$, $B_2^*\subset B_1+J$, где B_1, B_2 — поля и J является неприводимым (B, B)-модулем.

Доказательство. Так как радикал Джекобсона J выдерживает инволюцию, то и двусторонний аннулятор $Ann_J J$ также инвариантен относительно $(*)$. Но тогда по лемме 2.1 из [6] можно заключить, что единственный минимальный $(*)$ — идеал (монолит) алгебры совпадает с радикалом J и является неприводимым (B, B)-модулем. Теперь, из $B^*J\subset AJ=(B+J)J=BJ$ видно, что если $BJ=(0)$, то и $JB=(B^*J)^*=(0)$. Но тогда $A^2=(A^2)^*=(B+J)(B+J)=B=B^*$, т. е. B оказался бы $(*)$-идеалом, не содержащим монолит J, что невозможно. Итак,

$$BJ\neq(0) \quad \text{и} \quad JB\neq(0). \tag{11}$$

Так как A конечная алгебра, то $B=B_1\oplus B_2\oplus\ldots\oplus B_k$, где B_i — матричные алгебры над полем. Теперь мы убедимся, что если

(12) $B_iJ=J$ (аналогично, если $JB_i=J$) для некоторой простой компонентой

B_i, то B_i обязательно поле. Действительно, пусть b_1, b_2 — произвольные элементы из B_i, а j из J. Пусть сначала выполнено условие а) леммы, тогда $b_1 j \in J$, $b_1 j = (b_1 j)^* = jb_1^*$ и $b_1 b_2 j = (b_1 b_2 j)^* = jb_2^* b_1^* = b_2 jb_1^* = b_2 b_1 j$, т. е. $(b_1 b_2 - b_2 b_1) j = 0$.

Если выполнено условие б) леммы, то имеем $b_1 j \in J$; $-b_1 j = (b_1 j)^* = j^* b_1^* = -jb_1^*$ и $-b_1 b_2 j = (b_1 b_2 j)^* = -jb_2^* b_1^* = -b_2 jb_1^* = -b_2 b_1 j$, т. е. снова $(b_1 b_2 - b_2 b_1) j = 0$. В обоих случаях мы получили, что $[B_i, B_i] J = (0)$. Пусть I идеал алгебры B_i, порожденный коммутаторами элементов из B_i. Ясно, что $IJ = (0)$. Но если B_i некоммутативная алгебра, то I — ненулевой идеал, и так как B_i — простая, то I должен совпадать с B_i, т. е. имели бы $B_i J = (0)$, вопреки предположению (12). Итак, если $B_i J = J$, где B_i — простая компонента, то B_i — поле. Теперь, из (11) следует, что существуют простые компоненты, будем считать, например, B_1 и B_2 такие, что $(0) \neq BJ \subseteq J$ и $(0) \neq JB_2 \subseteq J$. Так как J является неприводимым $(B_1; B_2)$-модулем, то

$$B_1 J = JB_2 = J. \tag{13}$$

Заметим, что $B_2 J = B_3 J = \ldots = B_k J = (0)$. Действительно, если, например, $B_2 J \neq (0)$, то умножая равенство $B_2 J = J = B_1 J$ слева на B_1, получим $(0) = B_1 J$, что противоречит равенству (13). Аналогично можно убедиться, что

$$JB_1 = JB_3 = JB_4 = \ldots = JB_k = (0).$$

В равенстве (13) возможны два случая: $B_1 = B_2$ и $B_1 \neq B_2$. Рассмотрим сначала первый из них, в котором имеем $B_1 J = JB_1 = JB_1^* = J$, откуда $B_1^* \subset B_1 + J$. Пусть $C = B_2 \oplus B_3 \oplus \ldots \oplus B_k$. По предыдущему B_1 — поле и $CJ = JC = (0)$. Ясно, что C идеал алгебры A и если мы покажем, что C выдерживает инволюцию, так как $C \cap J = (0)$, а J — монолит, будет следовать, что $C = (0)$. Из $(C+J)J = (0)$ следует, что $J(C+J)^* = (0)$. Последнее равенство возможно только, если $C+J$ $(*)$-инвариантное множество, ибо в противном случае существовал бы элемент a из $C+J$, такой, что a^* имел бы ненулевую компоненту в B_1 (а значит, обратимую, так как B_1 поле), которая должна аннулировать J, т. е. тогда оказалось бы, что $JB_1 = (0)$. Но если $C+J$ $(*)$-инвариантное множество, то идеал $C = (C+J)^2$ также стабилен относительно инволюции. Следовательно, $C = (0)$, т. е. мы получили, что в этом случае $A = B_1 + J$, где B_1 — поле.

Пусть теперь $B_1 \neq B_2$, т. е. имеем $B_1 J = JB_2 = J = JB_1^* = B_2^* J = J$, где B_1, B_2 — поля, и если $C = B_3 \oplus \ldots \oplus B_k$, то $CJ = JC = (0)$, а также $JB_1 = B_2 J = (0)$. Заметим, что если $\overline{A} = A/J$ с индуцированной инволюцией и через $\overline{B}_i$ обозначим образы B_i при естественном эпиморфизме $A \to \overline{A}$, то $\overline{B}_i$, а следовательно, и $\overline{B}_i^*$ минимальные идеалы алгебра $\overline{A}$. Но разложение алгебры в прямое произведение минимальных идеалов однозначно с точностью до порядка сомножителей. Следовательно, $\overline{B}_i^*$ совпадает с $\overline{B}_j^*$ для некоторого j. Отсюда и из предыдущего можно заключить, что в рассматриваемом случае $B_1^* \subset B_2 + J$, $B_2^* \subset B_1 + J$. Ясно, что C — идеал алгебры A. Но $J(C+J) = (0)$ и $(C+J)J = (0)$, откуда

$$(C+J)^* J = (0), \quad J(C+J)^* = (0). \tag{14}$$

Множество $C+J$ является $(*)$-инвариантным, так как в противном случае нарушилось бы хотя бы одно из равенств (14). Но тогда и $C=(C+J)^2$ также выдерживает инволюцию $(*)$. Так как C является $(*)$-идеалом алгебры A, несодержащим монолит J, то C должен быть нулевым, а $A=B_1\oplus B_2+J$, где B_1, B_2 — поля. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теорем, сформулированных в начале работы. Доказательства этих теорем проводятся по следующей общей схеме. Пусть $\mathfrak{M}_i$, $i=1, 2, 3, 4$ многообразие F_q-алгебр с инволюцией, удовлетворяющих соответственно тождествам из теоремы 1, 2, 3, 4, $\mathfrak{V}_i$ — многообразие, порожденное алгеброй $(M_2(F_q), *)$ с соответствующей инволюцией. Мы покажем, с одной стороны, что $\mathfrak{V}_i\subseteq\mathfrak{M}_i$. Так как многообразия $\mathfrak{M}_i$ локально конечны, они порождаются своими конечными критическими алгебрами. Поэтому для доказательства обратных включений $(\mathfrak{M}_i\subseteq\mathfrak{V}_i)$ будет достаточно показать, что каждая из них удовлетворяет тождествам алгебры $(M_2(F_q), *)$, где $(*)$ — указанная в соответствующей теореме инволюция. Мы покажем большее: каждая критическая алгебра, принадлежащая многообразиям $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_4$ изоморфно вкладывается в $(M_2(F_q), *)$; критические алгебры многообразия $\mathfrak{M}_3$, которые не являются подалгебрами алгебры $(M_2(F_q), *)$, оказываются либо фактор-алгеброй собственной подалгебры алгебры $(M_2(F_q), *)$, либо фактор-алгеброй собственного подобъекта в $M_2(F_q)\oplus M_2(F_q)$.

1. Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ многообразие F_q-алгебр с инволюцией, удовлетворяющих тождествам (1) и (2). Сначала убедимся, что алгебра $(M_2(F_q), *_\alpha)$ принадлежит многообразию $\mathfrak{M}_1$. Пусть

$$x=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.\quad \text{Тогда}\quad x-x^*=(b+\alpha^{-1}c)\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -\alpha & 0\end{pmatrix},\quad x+x^*=\begin{pmatrix} 2a & b+\alpha^{-1}c\\ \alpha b+c & 2d\end{pmatrix}.$$

Так как по условию теоремы не существует квадратного корня из $(-\alpha)$ в поле F_q, q — нечетное число, непосредственно проверяется, что алгебра $(M_2(F_q), *_\alpha)$ удовлетворяет тождеству (1). Если матрица $x+x^*$ имеет двукратный характеристический корень $\lambda_1=\lambda_2=a+d$, то $\lambda_1^2=(a+d)^2=4ad-\alpha(b+\alpha^{-1}c)^2$, т. е. $(a-d)^2=-\alpha(b+\alpha^{-1}c)^2$. И так как уравнение $x^2+\alpha=0$ не имеет решения в поле F_q, то в этом случае должно выполняться $a=d$ и $b+\alpha^{-1}c=0$. Но тогда $(x+x^*)^q=x+x^*$. Если матрица $x+x^*$ имеет различные характеристические корни (вообще, принадлежащие полю F_{q^2}), то она также удовлетворяет тождеству (2).

Из леммы 1 следует, что все F_q-алгебры, удовлетворяющие тождеству (2), локально конечны и поэтому для доказательства того, что все алгебры из $\mathfrak{M}_1$ удовлетворяют тождествам алгебры $(M_2(F_q), *_\alpha)$, будет достаточно показать, что все критические $(*)$-алгебры из $\mathfrak{M}_1$ изоморфно вкладываются в $(M_2(F_q), *_\alpha)$.

1.1. Пусть $(A, *)$ — нильпотентная критическая алгебра многообразия $\mathfrak{M}_1$. Если a из A, то из того, что алгебра A удовлетворяет тождеству (1) следует, что $a^*=a$, а из тождества (2) следует, что $a^*=-a$. И так как характеристика поля F_q отлична от двух, то $A=(0)$, т. е. ненулевых нильпотентных алгебр многообразие $\mathfrak{M}_1$ не содержит, и радикал Джекобсона любой критической алгебры из $\mathfrak{M}_1$ равен нулю.

Итак, если $(A, *)$ критическая алгебра из $\mathfrak{M}_1$, то $(A, *)$ должна быть простой. Как утверждает лемма 2 здесь возможны два случая.

1.2. $$(A, *)\simeq(M_n(\mathscr{K})\oplus M_n(\mathscr{K})^{op}, 0).$$

Если e — единичный элемент поля $\mathscr{K}$, подставляя в тождество (1) $x=(e, 0)$ и, учитывая, что характеристика поля F_q отлична от двух убедимся, что эта алгебра не принадлежит многообразию $\mathfrak{M}_1$.

1.3. $(A, *)\cong(M_m(\mathscr{K}), *)$, где $\mathscr{K}$ — поле.

Инволюция на $M_m(\mathscr{K})$ не может быть симплектического типа, так как в этом случае $m=2n$ и $f_1(e_{n+1,1}, e^*_{n+1,1})\neq 0$. Здесь и в дальнейшем через e_{ij} обозначены обычные матричные единицы. Следовательно, инволюция на на $M_m(\mathscr{K})$ ортогонального типа. Из тождества (1) следует

$$(x-x^*)^{q^2}=x-x^*. \tag{15}$$

По теореме 3.4.2 из [7] в каждом кольце R, которое удовлетворяет тождеству вида (15), антиследы (элементы вида $r-r^*$, $r\in R$) всех элементов из R коммутируют между собой, что не так при $m\geq 3$. Например, если $r_1=e_{12}$, $r_2=e_{13}$; $r_1-r_1^*=e_{12}-\gamma e_{21}$; $r_2-r_2^*=e_{13}-\beta e_{31}$, где $0\neq\beta$, $\gamma\in\mathscr{K}$, то $[r_1-r_1^*, r_2-r_2^*]=\beta e_{32}-\gamma e_{23}\neq 0$. Следовательно, $m\leq 2$.

1.3.1. $A\cong M_2(\mathscr{K})$.

Индуцированная на $\mathscr{K}$ инволюция $(^-)$ тождественная, так как если $\bar{a}\neq a\in\mathscr{K}$ и $x=ae_{11}$, $y=e_{12}$; $x-x^*=(a-\bar{a})e_{11}$, $y-y^*=e_{12}-\beta e_{21}$ для некоторого $0\neq\beta\in\mathscr{K}$, то $[x-x^*, y-y^*]=(a-\bar{a})(e_{12}+\beta e_{21})\neq 0$, т. е. мы получили, что в этом случае $(A, *)\cong(M_2(\mathscr{K}), *_\beta)$ для некоторого $0\neq\beta\in\mathscr{K}$. Подставляя в (1) $x=e_{12}$, получаем

$$(-\beta)^{(q-1)/2}=-1. \tag{16}$$

Снова подставляя в (1) $x=ae_{12}$, a — произвольный элемент из $\mathscr{K}$, учитывая (16), получаем $a^q=a$, т. е. $\mathscr{K}=F_q$ и уравнение $x^2+\beta=0$ не имеет решения в поле F_q. Но так как и уравнение $x^2+\alpha=0$ не имеет решения в F_q, то существует элемент α_0 из F_q, такой, что $\alpha_0^2=\alpha\beta$. Отображение алгебры $(M_2(F_q), *_\beta)$ на алгебру $(M_2(F_q), *_\alpha)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & \alpha_0^{-1}\beta b \\ \alpha_0\beta^{-1}c & d \end{pmatrix}$$

является $(*)$-изоморфизмом этих алгебр.

1.3.2. Пусть $m=1$, т. е. $(A, *)\cong(\mathscr{K}, *)$, $\mathscr{K}$ — поле. Так как A алгебра над полем F_q характеристики, отличной от двух, то подставляя в (1) и (2) $x=a\in\mathscr{K}$, мы получаем $a^{q^2}=a$ для любого элемента a из $\mathscr{K}$, т. е. $\mathscr{K}\subseteq F_{q^2}$. Но F_{q^2} как алгебра над F_q имеет две инволюции $y^*=y^2$ и $y^*=y$ для y из F_{q^2}.

1.3.2.1. $(A, *)\cong(F_{q^2}, *)$, где $y^*=y^2$ для $y\in F_{q^2}$. Так как уравнение $x^2+\alpha=0$ не имеет решения в поле F_q, то $F_{q^2}=F_q[\alpha_1^{-1}]$, где α_1 является корнем этого уравнения. В этом случае F_{q^2} как двумерная алгебра над F_q, с указанной инволюцией вкладывается изоморфно в $(M_2(F_q), *_\alpha)$ своим регулярным представлением в базисе $1, \alpha_1^{-1}$, т. е.

$$y=\mu_1+\mu_2\alpha_1^{-1}\to C_y=\begin{pmatrix} \mu_1 & -\mu_2\alpha^{-1} \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix}.$$

Причем $y^*=y^q=\mu_1-\mu_2\alpha_1^{-1}$ отображается в $C_y^{*_\alpha}\in(M_2(F_q), *_\alpha)$.

1.3.2.2. $(A, *)\cong(F_{q^2}, *)$, где $y^*=y$ для $y\in F_{q^2}$.

а) пусть уравнение $x^2=\alpha^{-1}$ не имеет решения в поле F_q. Тогда $F_{q^2}=F_q[\alpha_1]$, где $\alpha_1^2=\alpha^{-1}$. Ясно, что 1, α_1 — базис алгебры F_{q^2} над F_q. Тогда отображение

$$y=\mu_1+\mu_2\alpha_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2\alpha^{-1} \\ \mu_2 & \mu_1 \end{pmatrix}$$

изоморфно вкладывает эту алгебру в подалгебру, состоящую из симметричных элементов алгебры $(M_2(F_q), *_\alpha)$.

б) пусть уравнение $x^2=\alpha^{-1}$ имеет решение в поле F_q, и γ — один из корней этого уравнения. Пусть $\alpha_1=\gamma^{-1}$. Тогда F_{q^2} с тождественной инволюцией как двумерная алгебра над F_q с базисом α_1 и $\alpha_2=\xi^{(q-1)/2}$, где ξ — образующий мультипликативной группы F_{q^2}, вкладывается изоморфно в $(M_2(F_q), *_\alpha)$ следующим образом:

$$y=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} \mu_1\alpha_1 & \mu_2\alpha_1^{-1} \\ \mu_2\alpha_1 & \mu_1\alpha_1+\mu_2 t \end{pmatrix},$$

где $t=\alpha_2+\alpha_2^q \in F_q$. Теорема доказана.

Замечание. Тождества (1) и (2) независимы. На самом деле, пусть R — двумерная коммутативная алгебра над F_q с базисом e и j и с тождественной инволюцией. Причем $e^2=e$, $ej=j$, $j^2=0$. Тогда очевидно R удовлетворяет тождеству (1), но если подставим в (2) $x=j$, убедимся, что R не удовлетворяет тождеству (2).

Обратно, рассмотрим алгебру $M_2(F_q)$ с симплектической инволюцией. Легко заметить, что эта алгебра удовлетворяет тождеству $(x+x^*)^q=x+x^*$, а следовательно, и тождеству (2), но, как уже отмечали выше, она не удовлетворяет тождеству (1).

2. Доказательство теоремы 2. Обозначим через $\mathfrak{M}_2$ многообразие F_q-алгебр с инволюцией, удовлетворяющие тождествам (3) и (4). Непосредственно проверяется, что $(M_2(F_q), *_\alpha)$ удовлетворяет тождеству (3). Известно [8], что (4) является тождеством этой алгебры. Из леммы 1 следует, что все F_q — алгебры, в которых исполняется тождество (4), локально конечны и, следовательно, многообразие $\mathfrak{M}_2$ порождается своими конечными критическими алгебрами. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать что каждая из них удовлетворяет тождествам алгебры $(M_2(F_q), *_\alpha)$. Мы покажем большее: каждая из них изоморфно вкладывается в $(M_2(F_q), *_\alpha)$. В этом параграфе через $(A, *)$ будем обозначать произвольную критическую алгебру многообразия $\mathfrak{M}_2$.

2.1. Пусть $(A, *)$ — нильпотентная алгебра. Из того, что она удовлетворяет тождеству (3), следует, что $a^*=a$ для всех a из A и A — коммутативная F_q — алгебра. Подставляя в (4) $x=a/2$, $a\in A$, получим, что в A справедливо равенство $(a-a^q)(a-a^{q^2})=0$, из которого вытекает, что $a^2=0$ для всех a из A, а следовательно, A — антикоммутативная. Но тогда алгебра A должна быть с нулевым умножением. Алгебра $(A, *)$ как одномерная алгебра над F_q вкладывается изоморфно в $(M_2(F_q), *_\alpha)$, как это будет видно из следующего пункта.

2.2. Пусть $(A, *)$ ненильпотентная алгебра с полупростой компонентой $B\neq(0)$ и радикалом $J\neq(0)$. Радикал J — нильпотентная, алгебра, и как мы уже убедились, $J^2=(0)$ и $j^*=j$ для всех j из J. Но тогда по лемме 3 либо $B=B_1$, либо $B=B_1\oplus B_2$, где B_1, B_2 — поля.

2.2.1. $(A, *)\cong(B_1+J, *)$, B_1 — поле; $B_1J=JB_1=J$. Выбираем произвольный элемент f из B_1, и пусть $f^*=f_1+j_1$, где $f_1\in B_1$, $j_1\in J$. Тогда $a=f+f_1=a^*$. Подставляя $x=a/2$ в (4) и $x=f$ в (3), получаем

$$(f+f_1)^{q^2}=f+f_1 \tag{17}$$

и $(f-f_1-j_1)^q=f-f_1-j_1$. Так как $(f-f_1)^*=-(f-f_1)+2j_1$, $J^2=(0)$ и $j^*=j$ для всех j из J, то $(f-f_1)j=j(f-f_1)^*=-j(f-f_1)$, а $(f-f_1-j_1)^q=(f-f_1)^q-(f-f_1)^{q-1}=\gamma_1=f-f_1-j_1$, т. е.

$$(f-f_1)^q=f-f_1. \tag{18}$$

Пусть $0\neq j\in J$. Тогда $r=f+f_1+j=r^*$. Так как $(f+f_1)j=j(f+f_1)^*=j(f+f_1)$, то $r^q=(f+f_1)^q$. Подставляя $x=r/2$ в (4) и учитывая (17), получаем $[f+f_1-(f+f_1)^q]j=0$ для любого ненулевого j из J, откуда, имея в виду (18), следует, что $B_1=F_q$. Так как $(A, *)$ алгебра над F_q, то инволюция на $B_1=F_q$, а, значит, и на A — тождественная. Пусть J как одномерная алгебра над F_q порождается элементом j. Тогда отображение

$$f+kj \to \begin{pmatrix} f+k\alpha_1 & k \\ k\alpha & f-k\alpha_1 \end{pmatrix},$$

где $f, k\in F_q$; $\alpha_1^2+\alpha=0$, является $(*)$ — изоморфным вложением алгебры F_q+J с тождественной инволюцией в алгебру $(M_2(F_q), *_\alpha)$.

2.2.2. $(A, *)\cong(B_1\oplus B_2+J, *)$, где B_1, B_2 — поля;

$$B_1^*\subset B_2+J, \quad B_2^*\subset B_1+J; \quad B_1J=JB_2=J, \quad JB_1=B_2J=(0).$$

Выбираем f_1 из B_1, и пусть $f_1^*=f_2+j$, где $f_2\in B_2$, а $j\in J$. Тогда $f_2^*=f_1-j$. Так как $a^*=(f_1-f_2-j)^*=-a$ и характеристика поля F_q отлична от двух, подставляя в (3) $x=a/2$, получаем, что $f_1^q=f_1$, т. е. $B_1=F_q$. Аналогично $B_2=F_q$. Пусть e_1, e_2 — единичные элементы полей B_1 и B_2. Если $e_1^*=e_2$, то положим $g_1=e_1$, $g_2=e_2$, $g_3=j$, где $0\neq j\in J$, а если $e_1^*\neq e_2$, то положим $g_3=(e_1^*-e_2)/2$, $g_1=e_1-g_3$, $g_2=e_2+g_3$. Ясно, что $g_1^*=g_2$, $g_3^*=g_3\in J$, а также $g_1^2=g_1$, $g_2^2=g_2$; $g_1g_2=g_2g_1=g_3g_1=g_2g_3=0$, $g_1g_3=g_3=g_3g_2$ и, кроме того, g_1, g_2, g_3 — базис алгебры A над F_q. Тогда отображение

$$\varphi(a)=\begin{pmatrix} t+k\alpha_1 & -r\alpha_1^{-1}+k \\ r\alpha_1^{-1}\alpha+k\alpha & t-k\alpha_1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где $a=f_1g_1+f_2g_2+kg_3$, $t=(f_1+f_2)/2$, $r(f_1-f_2)/2$, α_1 — один из корней уравнения $x^2+\alpha=0$, изоморфно вкладывает алгебру $(A, *)$ в алгебру $(M_2(F_q), *_\alpha)$.

2.3. Пусть наконец $(A, *)$ — простая алгебра. По лемме 2 возможны два случая.

2.3.1. $(A, *)\cong(M_n(\mathscr{K})\oplus M_n(\mathscr{K})^{\mathrm{op}}, 0)$, $\mathscr{K}$ — поле. Подставляя в (3) $x=(e_{12}, 0)$, мы получаем, что $f_3(x, x^*)\neq 0$, т. е. $n=1$. Снова подставляя в (3) $x=(k, 0)\in\mathscr{K}\oplus\mathscr{K}$, мы убеждаемся, что $k^q=k$, т. е. $\mathscr{K}=F_q$. Алгебра $F_q\oplus F_q$ с обменной инволюцией вкладывается изоморфно в алгебру $M_2(F_q)$ с инволюцией $(*_\alpha)$ по (19).

2.3.2. $(A, *)\cong(M_m(\mathscr{K}), *)$, где $\mathscr{K}$ — поле. Инволюция на $M_m(\mathscr{K})$ не может быть симплектического типа, так как в этом случае $m=2n$ и $f_3(e_{n+1,1},$

$e^*_{n+1,1})\neq 0$. Как в пункте 1.3 можно убедиться, что $m\leq 2$, а при $m=2$ индуцированная на $\mathcal{K}$ инволюция тождественная, т. е.

2.3.2.1. $(A, *)\cong(M_2(F_q), *_\beta)$ для некоторого $0\neq\beta\in\mathcal{K}$. Подставляя в (3) $x=e_{12}$ и $x=ae_{12}$, где $a\in\mathcal{K}$, получаем, что $(-\beta)^{(q-1)/2}=1$, $\mathcal{K}=F_q$ и уравнение $x^2+\beta=0$ имеет решение в F_q. Эта алгебра изоморфна алгебре $(M_2(F_q), *_\alpha)$. (Изоморфизм задается как в случае 1.3.1.).

2.3.2.2. Пусть $m=1$, т. е. $(A, *)\cong(\mathcal{K}, *)$, $\mathcal{K}$ — поле.

Из тождеств (3) и (4) соответственно следует, что $(a-a^*)^{q^2}=a-a^*$ и $(a+a^*)^{q^2}=a+a^*$ для любого элемента a из $\mathcal{K}$. Так как $\mathcal{K}$ является алгеброй над полем F_q характеристики отличной от двух, то из этих равенств видно, что $\mathcal{K}\subseteq F_{q^2}$. Алгебра F_{q^2} с инволюцией $y^*=y^2$, $y\in F_{q^2}$ не принадлежит многообразию $\mathfrak{M}_2$, так как она не удовлетворяет тождеству (3), а с тождественной инволюцией она вкладывается изоморфно в $(M_2(F_q), *_\alpha)$ как в случае 1.3.2.2.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 3. Пусть $\mathfrak{M}_3$ — многообразие F_q-алгебр с инволюциями, удовлетворяющие тождествам (5), (6) и (7). Покажем, что алгебра $(M_2(F_q), *)$ с инволюцией — обычное транспонирование принадлежит многообразию $\mathfrak{M}_3$. Известно [1], что (5) является тождеством алгебры $M_2(F_q)$. Непосредственно проверяется, что элементы алгебры $(M_2(F_q), *)$ удовлетворяют тождеству (6). Рассмотрим значения полинома $f_7(x, x^*)$ при

$$x=r=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$a, b, c, d\in F_q$. Нетрудно убедиться, что $(r+r^*)(1+[r, r^*]^{2(q-1)})\neq 0$ только если $a+b+c+d=0$ и $b+c\neq 0$ (т. е. и $a+d\neq 0$). Но в этом случае матрица r имеет различные характеристические корни $\lambda_1=a+b$ и $\lambda_2=a+c$, которые принадлежат полю F_q и, следовательно, $r+r^2=0$. Итак, $(M_2(F_q), *)\in\mathfrak{M}_3$.

Из тождества (5) следует, что многообразие $\mathfrak{M}_3$ локально конечно. Следовательно, для доказательства теоремы будет достаточно показать, что все критические алгебры этого многообразия удовлетворяют тождествам алгебры $(M_2(F_q), *)$. В дальнейшем в этом параграфе через $(A, *)$ будем обозначать произвольную критическую алгебру многообразия $\mathfrak{M}_3$.

3.1. Если $(A, *)$ нильпотентная алгебра, из (5) следует, что $A^2=(0)$, а из (6), что $a+a^*=0$ для всех a из A, т. е. A — коммутативная алгебра над F_q с тождественной инволюцией, которая как одномерная F_q-алгебра вкладывается изоморфно в $(M_2(F_q), *)$ как будет видно из следующего пункта.

3.2. $A\cong B+J$, где $B\neq(0)$ полупростая алгебра, а $J\neq(0)$ радикал Джекобсона алгебры A. Ясно, что J нильпотентная алгебра, и, как мы уже отметили, $J^2=(0)$ и $j^*=j$ для всех j из J. По лемме 3 возможны два случая $B=B_1$ и $B=B_1\oplus B_2$, где B_1, B_2 — поля.

3.2.1. $A\cong B_1+J$, $B_1J=JB_1=J$, B_1 — поле.

Из (5) следует тождество $(x+x^q)(y+y^{q^2})(1+[x, y]^{-2(q-1)})=0$. Подставляя в нем $x=b\in B_1$ и $y=y\in J$, $j\neq 0$, получаем $(b+b^q)j=0$, т. е. $B_1=F_q$ и инволюция на B_1 также тождественная. Пусть алгебра J как одномерная алгебра над F_q имеет образующий j. Тогда алгебра F_q+J с тождественной инволюцией изоморфно вкладывается в $(M_2(F_q), *)$ следующим образом:

$$f+kj\longrightarrow\begin{pmatrix} f+k & k \\ k & f+k \end{pmatrix},$$

где $f, k\in F_q$.

3.2.2. $A \cong B_1 \oplus B_2 + J$, B_1, B_2 — поля, $B_1J = JB_2 = J$ $JB_1 = B_2J = (0)$, $B_1^* \subset B_2 + J$. Легко показать, что B_1, $B_2 = F_q$. Пусть e_1, e_2 — единичные элементы полей B_1 и B_2.

а) Пусть $e_1^* \neq e_2$. Положим $g_1 = e_1$, $g_2 = e_2$, $g_3 = e_1^* + e_2$. Ясно, что $0 \neq g_3 \in J$ и $g_1g_3 = g_3g_2 = g_3$; $g_3g_1 = g_2g_3 = 0$, $g_1^* = g_2 + g_3$, $g_2^* = g_1 + g_3$; $g_3^* = g_3$ и чао g_1, g_2, g_3 — базис алгебры A над F_q. Тогда отображение

$$\varphi(s) = \begin{pmatrix} a+c & c \\ a+b+c & b+c \end{pmatrix}$$

где $r = ag_1 + bg_2 + cg_3$ — произвольный элемент алгебры A, является $(*)$-изоморфным вложением алгебры $(A, *)$ в алгебру $(M_2(F_q), *)$.

б) Пусть $e_1^* = e_2$ и пусть $D = M_2(F_q) \oplus M_2(F_q)$ и для $d = (A_1, A_2) \in D$, $d^* = (A_1^*, A_2^*)$, где A_i^* — транспонированная матрица A_i. Рассмотрим подмножество C алгебры D, состоящее из элементов вида $(a, a + l_i)$, где a — матрица, сумма элементов которой равна нулю, l — произвольный элемент поля F_q, а

$$i + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Легко убедиться, что C является $(*)$-подалгеброй алгебры D. Обозначим через I множество элементов вида (ki, ki), где $k \in F_q$. Нетрудно заметить, что I является идеалом алгебры C и что $I^* = I$. Пусть $\bar{C} = C/I$ с индуцированной инволюцией.

Положим $g_1 = e_1$, $g_2 = e_2$, $g_3 = j$, где j — произвольный ненулевой элемент из J. Ясно, что g_1, g_2, g_3 базис алгебры A над F_q. Пусть $u = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3$ произвольный элемент алгебры A. Тогда отображение $\varphi(u) = \bar{c} \in \bar{C}$, где

$$c = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix} \right),$$

является $(*)$-изоморфизмом алгебры $(A, *)$ на алгебру $\bar{C}$.

3.3. Пусть $(A, *)$ простая F_q-алгебра, для которой по лемме 2 имеются две возможности:

3.3.1. $(A, *) \cong (M_n(\mathscr{K}) \oplus M_n(\mathscr{K})^{op}, 0)$, где $\mathscr{K}$ поле. Подставляя в (6) $x = (e_{12}, 0)$, мы замечаем, что $f_6(x, x^*) \neq 0$, т. е. должно быть $n = 1$. Снова подставляя в (6) $x = (k, 0)$, $0 \neq k \in \mathscr{K}$, получаем, что $k^{2(q-1)} = 1$, $k^{q-1} = 1$, т. е. $\mathscr{K} = F_q$ и $(A, *) \cong (F_q \oplus F_q, 0)$. Покажем, что в этом случае $(A, *)$ изоморфна фактору собственной подалгебры алгебры $(M_2(F_q), *)$. Обозначим через B множество матриц над F_q, сумма элементов которых равна нулю, т. е.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a + b + c + d = 0 \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что множество B выдерживает инволюцию (транспонирование) и является подалгеброй алгебры $(M_2(F_q), *)$. Обозначим через I множество матриц вида

$$I=\left\{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix},\quad a\in F_q\right\}.$$

Можно проверить, что I является $(*)$-идеалом алгебры B. Пусть $\overline{B}=B/I$ с индуцированной инволюцией $(b+I)^*=b^*+I$. Тогда отображение $(a_1, b_2)\longrightarrow \overline{b}$, где $(a_1, a_2)\in F_q\oplus F_q$, $\overline{b}\in \overline{B}$,

$$b=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & a_1 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

является $(*)$-изоморфизмом алгебры $(F_q\oplus F_q, 0)$ наа лгебру $(\overline{B}, *)$.

3.3.2. $(A, *)\cong(M_n(\mathscr{K}), *)$, где $\mathscr{K}$-расширение поля F_q. Инволюция на $M_n(\mathscr{K})$ не может быть симплектического типа. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что матрицы с различными характеристическими корнями, не принадлежащими полю F_q, не удовлетворяют тождеству (7). Как в случае 1.3 из тождества (6) будет следовать, что $n\leq 2$; при $n=2$ индуцированная на $\mathscr{K}$ инволюция тождественная, и $\mathscr{K}=F_q$.

3.3.2.1. $(A, *)\cong(M_2(F_q), *_\beta)$ для некоторого $0\neq\beta\in F_q$. Тогда отображение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} a & \sqrt{\beta}\, b \\ c/\sqrt{\beta} & d \end{pmatrix}$$

является $(*)$-изоморфизмом алгебры $(M_2(F_q), *_\beta)$ на алгебру $M_2(F_q)$ с инволюцией обычное транспонирование.

3.3.2.2. Пусть $n=1$, т. е. $(A, *)\cong(\mathscr{K}, *)$, $\mathscr{K}$-поле. Подставим в (5) $x=y=\alpha\in\mathscr{K}$. Получим $\alpha+\alpha^{q^2}=0$, т. е. $\mathscr{K}\subseteq F_{q^2}$. Поле F_{q^2} как двумерная алгебра над F_q с базисом 1 и $t=(\sqrt{\xi})^{q-1}$, где ξ — образующий мультипликативной группы поля F_{q^2}, с тождественной инволюцией вкладывается изоморфно в $(M_2(F_q), *)$ следующим образом:

$$\mu_1+\mu_2 t\longrightarrow\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_2 & \mu_1+\mu_2(t+t^2) \end{pmatrix}.$$

Поле F_{q^2} с инволюцией $y^*=y^2$, $y\in F_{q^2}$, не принадлежит многообразию $\mathfrak{M}_3$, так как не удовлетворяет тождеству (7). Поле F_{q^2} не имеет других инволюций, оставляющих неподвижным поле F_q. Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 4. Обозначим через $\mathfrak{M}_4$ многообразие F_q-алгебр с инволюциями, удовлетворяющие тождествам (8), (9) и (10). Непосредствено проверяется, что алгебра $(M_2(F_q), *)$ удовлетворяет тождествам (8) и (10). (Если q нечетное число, то (10) вытекает из (8).) Известно [1], что (9) является тождеством этой алгебры.

Из (9) следует, что $\mathfrak{M}_4$ локально конечно и индексы нильпотентности его нильпотентных алгебр равны двум. Для доказательства теоремы мы убедимся, что критические алгебры многообразия $\mathfrak{M}_4$ удовлетворяют тождествам алгебры $(M_2(F_q), *)$. В дальнейшем в этом параграфе $(A, *)$ будет произвольная критическая алгебра из $\mathfrak{M}_4$.

4.1. Пусть $(A, *)$ — нильпотентная алгебра. Тогда $A^2=(0)$ и как следует из (8) $a^*=-a$ для любого элемента a из A. Как одномерная алгебра над F_q $(A, *)$ вкладывается изоморфно в $(M_2(F_q), *)$ как будет видно из следующего пункта.

4.2. Пусть $(A, *)\cong(B+J, *)$, где $(0)\neq B$ полупростая алгебра, а $J\neq(0)$ — радикал Джекобсона алгебры A.

4.2.1. $B=B_1$, B_1 — поле.

Подставляя в (9) $x=\alpha\in B_1$ и $y=j\in J$, мы получаем, что $B_1=F_q$. Пусть J как одномерная алгебра над F_q имеет образующий j. Итак, если $a=f+kj\in A$, $f, k\in F_q$, то $a^*=f-kj$ и отображение

$$f+kj\longrightarrow\begin{pmatrix} f+k & -k \\ k & f-k\end{pmatrix}$$

вкладывает $(*)$-изоморфно алгебру F_q+J в алгебру $M_2(F_q)$ с симплектической инволюцией.

4.2.2. $B=B_1\oplus B_2$, где B_1, B_2 — поля, $B_1J=JB_2=J$. Аналогично предыдущему случаю из (9) следует, что $B_1, B_2=F_q$. Пусть e_1, e_2 — единичные элементы полей B_1 и B_2. Если $e_1^*=e_2+j$, где j принадлежит радикалу Джекобсона J алгебры A, подставляя в (8) $x=e_1$, получаем $e_1+e_2+j=e_1+e_2$, т. е. $j=0$ и $e_1^*=e_2$, т. е. инволюция на $B_1\oplus B_2$ обменная. Итак, если $a=(a_1, a_2)+k_1jk_2$ — произвольный элемент алгебры A, где $(a_1, a_2)\in B_1\oplus B_2$, а j — образующий однопорожденного (B_1, B_2)-бимодуля J, то $a^*=(a_2, a_1)-k_1jk_2$ и отображение

$$a\longrightarrow\begin{pmatrix} a_1+k_1k_2 & k_1k_2 \\ -a_1+a_2-k_1k_2 & a_2-k_1k_2\end{pmatrix} \tag{20}$$

является $(*)$-изоморфным вложением алгебры $(A, *)$ в алгебру матриц над F_q с симплектической инволюцией.

4.3. Пусть наконец $(A, *)$ простая критическая алгебра.

4.3.1. $(A, *)\cong(M_n(\mathscr{K})\oplus M_n(\mathscr{K})^{\mathrm{op}}, *)$, где $\mathscr{K}$ — поле. Подставляя в (8) $x=(e_{12}, 0)\in M_n(\mathscr{K})\oplus M_n(\mathscr{K})^{\mathrm{op}}$ и $x=(k, 0)$, $k\in\mathscr{K}$, мы замечаем, что $f_8(x, x^*)$ не является тождеством этой алгебры при $n\geq 2$ и что $\mathscr{K}=F_q$. Алгебра $F_q\oplus F_q$ с обменной инволюцией вкладывается $(*)$-изоморфно в алгебру $(M_2(F_q), *)$ по (20).

4.3.2. $A\cong M_n(\mathscr{K})$, где $\mathscr{K}$ — расширение поля F_q. Подставив в (9) $x=y=e_{12}+e_{23}$, мы получим, что $f_9(x, y)=e_{13}\neq 0$, т. е. $n\leq 2$.

4.3.2.1. Пусть $n=2$, т. е. $A\cong M_2(\mathscr{K})$. Из тождества (8) видно, что инволюция на $M_2(\mathscr{K})$ не может быть ортогонального типа и что $\mathscr{K}=F_q$.

4.3.2.2. $(A, *)\cong(\mathscr{K}, *)$, $\mathscr{K}$ — поле. Из тождества (9) следует, что $\mathscr{K}\subseteq F_{q^2}$.

а) F_{q^2} как двумерная алгебра над F_q с базисом 1 и ξ, где ξ — образующий мультипликативной группы поля F_{q^2} с инволюцией $y^*=y^2$, $y\in F_{q^2}$ вкладывается изоморфно в $M_2(F_q)$ с симплектической инволюцией следующим образом:

$$\mu_1+\mu_2\xi\longrightarrow\begin{pmatrix} \mu_1 & -\mu_2\xi^{q+1} \\ \mu_2 & \mu_1+\mu_2(\xi+\xi^2)\end{pmatrix}.$$

б) алгебра F_{q^2} с тождественной инволюцией не принадлежит многообразию $\mathfrak{M}_4$, так как если характеристика поля F_q отлична от двух, то $(F_{q^2}, *)$ не удовлетворяет тождеству (8), а если q — четное число, она не удовлетворяет тождеству (10). Теорема доказана.

5. Один пример. Обозначим через A множество матриц над полем с двумя элементами F_2, состоящее из следующих восемь элементов:

$$a_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$a_5=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad a_6=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\quad a_7=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\quad a_8=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что A является алгеброй над F_2 с инволюцией транспонирование. Ее радикал Джекобсона J состоит из элементов a_1 и a_3. Алгебру A возможно только двумя способами представить в виде $A=B+J$, где B — полупростая компонента с $B=C_1=\{a_1, a_4, a_6, a_7\}$ или $B=C_2=\{a_1, a_4, a_5, a_8\}$. Ясно, что и C_1, и C_2 не инвариантны относительно инволюции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Мальцев, Е. Н. Кузьмин. Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над конечным полем. *Алгебра и логика*, **17**, 1978, 28—32.
2. S. Montgomery. A structure theorem and a positive definiteness condition in ring with involution. *J. Algebra*, **43**, 1976, 181—192.
3. S. Montgomery. Algebras with polynomial identity and involution. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27**, 1971, 53—56.
4. И. Львов. О многообразиях ассоциативных колец 1. *Алгебра и логика*, **12**, 1973, 269—298.
5. L. H. Rower. Polynomial identities in ring theory. New York, 1979.
6. Г. К. Генов. Базис тождеств алгебры матриц третьего порядка над конечным полем. *Алгебра и логика*, **20**, 1981, 365—388.
7. I. N. Herstein. Rings with involution. Chicago, 1976.
8. G. Walker. Fermat's theorem for algebras. *Pacific J. Math.*, **4**, 1954, 317—320.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 9. 2. 1982