Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ДИОФАНТОВОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

В. С. ВЛАДИМИРОВ, И. В. ВОЛОВИЧ

1. При изучении ферромагнитной модели Изинга в статистической физике возникла следующая проблема моментов [1—2]: *описать все меры* $d\sigma(\theta, \xi)$ *на единичной окружности,* $|\theta|\leqq\pi$, *неотрицательные и четные по* θ, *зависящие от параметра* $\xi\in(0, 1]$, *тригонометрические моменты которых*

$$M_k(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\theta}d\sigma(\theta, \xi)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos k\theta d\sigma(\theta, \xi), \quad k=0, 1, \dots \tag{1.1}$$

— *полиномы по* ξ *степени и четности* $\varkappa k$, *с целыми коэффициентами, причем* $M_0(\xi)=1$, $\varkappa$ — *натуральное число.* Эту задачу будем называть *диофантовой тригонометрической проблемой моментов* (ДТПМ) *с параметром, а меру* $d\sigma$ — *диофантовой.*

Всякой ДТПМ с параметром соответствует производящая функция

$$I(z, \xi)=1+2\sum_{k=0}^{\infty}M_k(\xi)z^k=\frac{1-z^2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\sigma(\theta, \xi)}{1-2z\cos\theta+z^2}, \quad |z|<1. \tag{1.2}$$

Как следует из теории теплицевых форм [3], решить ДТПМ с параметром — это значит найти функцию $I(z, \xi)$, $|z|<1$, $0<\xi\leqq 1$, голоморфную по z, с положительной вещественной частью при $|z|<1$, вещественную при вещественных z, коэффициенты разложения которой $M_k(\xi)$ — полиномы степени и четности $\varkappa k$ с целыми коэффициентами. При этом [4]

$$d\sigma(\theta, \xi)=\mathrm{b.v}\operatorname{Re}I(z, \xi)=w-\lim_{r\to 1-0}\operatorname{Re}I(re^{i\theta}, \xi).$$

2. Примеры диофантовых мер [2].

А. $$M_k(\xi)=\xi^{\varkappa k}, \quad I(z, \xi)=\frac{1+z\xi^{\varkappa}}{1-z\xi^{\varkappa}}, \operatorname{Re}I(re^{i\theta}, \xi)=\frac{1-r^2\xi^{2\varkappa}}{1-2r\xi^{\varkappa}\cos\theta+r^2\xi^{2\varkappa}}>0.$$

Б. $M_k(\xi)=T_k(\xi^{\varkappa})$, где T_k — полиномы Чебышева,

$$I(z, \xi)=\frac{1-z^2}{1-2z\xi^{\varkappa}+z^2}, \quad \operatorname{Re}I(re^{i\theta}, \xi)=\frac{(1-r^2)(1-2r\xi^{\varkappa}\cos\theta+r^2)}{|1-2r\xi^{\varkappa}e^{i\theta}+r^2e^{2i\theta}|^2}>0.$$

В. $$M_k(\xi)=T_{\varkappa k}(\xi), \quad I(z, \xi)=\frac{1-z^2}{1-2zT_{\varkappa}(\xi)+z^2},$$

$$\operatorname{Re}I(re^{i\theta}, \xi)=\frac{(1-r^2)(1-2rT_{\varkappa}(\xi)\cos\theta+r^2)}{|1-2rT_{\varkappa}(\xi)e^{i\theta}+r^2e^{2i\theta}|^2}>0.$$

Г. $I(z, \xi)=\frac{1-z}{\sqrt{(1-z)^2+4z\xi^2}}, \quad M_k(\xi)=\frac{1}{2}[P_k(1-2\xi^2)-P_{k-1}(1-2\xi^2)], \quad k\geqq 1,$

где P_k — полиномы Лежандра.

Возникает интересный вопрос: является ли производящая функция $I(z, \xi)$ диофантовой меры $d\sigma(\theta, \xi)$ алгебраической? В приведенных выше примерах — это так.

3. Рассмотрим решение ДТПМ с параметром в классе мер $d\sigma(\theta, \xi)$, представимых в виде ряда

$$d\sigma(\theta, \xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi^k d\sigma_k(\theta), \quad |\xi|<\delta, \tag{3.1}$$

где $d\sigma_k$ — некоторые вещественные четные меры, удовлетворяющие условию

$$\int_{-\pi}^{\pi}|d\sigma_k|\leqq c/\delta^k, \quad k=0, 1, \ldots \tag{3.2}$$

Разложение (3.1) означает, что для любой непрерывной на окружности функции $\varphi(\theta)$ выражение

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)d\sigma(\theta, \xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi^k\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\theta)d\sigma_k(\theta) \tag{3.3}$$

задает аналитическую функцию при $|\xi|<\delta$.

Положим в (3.3) $\varphi(\theta)=\frac{1}{2\pi}\cos j\theta$ и, пользуясь (1.1), получим

$$M_j(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos j\theta d\sigma(\theta, \xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi^k c_{kj}, \quad |\xi|<\delta, \tag{3.4}$$

где c_{kj} — моменты меры $d\sigma_k(\theta)$,

$$c_{kj}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos j\theta d\sigma_k(\theta), \quad j=0, 1, \ldots \tag{3.5}$$

Поскольку моменты c_{kj}, как видно из (3.7), являются коэффициентами полиномов $M_j(\xi)$, они обладают следующими свойствами:

$$c_{kj} \text{ — целые, } k, j=0,1, \ldots; \quad c_{00}=1, \quad c_{kj}=0, \quad k\not\equiv \varkappa j (\mathrm{mod}\, 2); \tag{3.6}$$
$$c_{kj}=0, \quad k\geqq \varkappa j+1.$$

Для каждой меры $d\sigma_k$, $k=0, 1, \ldots$ мы получаем таким образом, в силу (3.5), ДТПМ с условиями (3.6). Поскольку мера $d\sigma_k$ в силу (3.2) имеет ограниченную вариацию, ее целочисленные моменты c_{kj} могут принимать лишь конечное число различных значений и, следовательно, по теореме Х е л с о н а [5], четная мера $d\sigma_k$ имеет вид [2]

$$d\sigma_k(\theta)=\sum_{s=0}^{N_k-1}2\pi a_{ks}\delta\left(\theta-\frac{2\pi s}{N_k}\right)+\sum_{s=0}^{M_k-1}b_{ks}\cos\theta d\theta, \tag{3.7}$$

где

$$a_{ks}=\frac{1}{N_k}\sum_{j=M_k}^{M_k+N_k-1}c_{kj}\cos\frac{2\pi js}{N_k}, \quad s=0, 1, \ldots, N_k-1;$$

$$b_{ks}=\frac{2}{1+\delta_{0s}}(c_{ks}-c_{k,\ s+l_{ks}N_k}),\qquad s=0,1,\ldots,\quad M_k-1$$

(l_{ks} — целое число такое, что $M_k\leq s+l_{ks}N_k\leq M_k+N_k-1$), c_{ks} — целые числа, удовлетворяющие условиям (3.6). Представление (3.7) выражает необходимые условия разрешимости ДТПМ с параметром для мер вида (3.1). При этом необходимо еще учитывать условия (3.2) и неотрицательность меры $d\sigma(\theta,\xi)$.

4. Так как ДТПМ с параметром полностью не решена, рассмотрим эту проблему при рациональных значениях $\xi=p/r$, где p и r — целые числа, $0\leq p\leq r$, $r\geq 1$. В результате получим следующую *квазидиофантову тригонометрическую проблему моментов* (К — ДТПМ): описать те неотрицательные четные меры $d\sigma(\theta)$ на единичной окружности, $|\theta|\leq\pi$, для которых тригонометрические моменты — рациональные числа вида

$$\frac{c_k}{a^k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos k\theta d\sigma(\theta),\quad k=0,1,\ldots$$

(для физического случая $c_0=1$).
где a и c_k — целые числа, $c_0>0$.

В частности, при $a=1$ получаем следующую ДТПМ

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos k\theta d\sigma(\theta),\quad k=0,1,\ldots$$

Соответствующая производящая функция

$$I(z)=c_0+2\sum_{k=1}^{\infty}c_kz^k=\frac{1-z^2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\sigma(\theta)}{1-2z\cos\theta+z^2},$$

$$\operatorname{Re}I(z)=\frac{1-|z|^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\sigma(\theta)}{|z-e^{i\theta}|^2}>0$$

является аналитической в круге $|z|<1$ с положительной вещественной частью, с коэффициентами разложения c_k, принимающими лишь конечное число целых значений: $-c_0,\ -c_0+1,\ldots,\ 0,\ 1,\ldots,\ c_0$.

Степенным рядам с целыми коэффициентами посвящена обширная литература. Они изучались в частности в работах Л. Илиева [6, 7] (подробная библиография вопроса содержится у Л. Бибербаха [8]). По известной теореме Сегё функция $I(z)$ либо рациональна, либо непродолжима за пределы единичного круга. Теорема Хелсона [5] исключает второй случай, так что функция $I(z)$ рациональна вида $I(z)=\mathscr{P}(z)/1-z^N$, где $\mathscr{P}(z)$ — полином с целыми коэффициентами, а N — натуральное число. При этом мера $d\sigma$ имеет следующий вид (см. (3.7)):

$$d\sigma(\theta)=\sum_{s=0}^{N-1}2\pi a_s\delta\left(\theta-\frac{2\pi s}{N}\right)+\sum_{s=0}^{M-1}b_s\cos s\theta d\theta,$$

где

$$a_s=\frac{2}{N}\sum_{j=M}^{M+N-1}c_j\cos\frac{2\pi js}{N},\quad s=0,1,\ldots,N-1,$$

$$b_s=\frac{2}{1+\delta_{0s}}(c_s-c_{s+l_sN}),\ s=0,1,\ldots,M-1(M\leq s+l_sN\leq M+N-1)$$

и c_0, $c_1, \ldots$ — любая последовательность целых чисел, периодическая с периодом N, начиная с номера M, с неотрицательными теплицевыми определителями $D_k = \det A_k$, $k = 0, 1, \ldots$,
где

$$A_k = \left\| \begin{matrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_k \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_k & c_{k-1} & \ldots & c_0 \end{matrix} \right\|$$

(Таким образом, $a_s = a_{N-s} \geqq 0$, $\sum\limits_{0 \leqq j \leqq M-1} b_s \cos s\theta \geqq 0$).

5. Приведем некоторые оценки для определителей теплицевых матриц (см. также [9; 2]).

Разложим меру $d\sigma(\theta)$ на сингулярную $d\sigma_s(\theta)$ и абсолютно непрерывную $f(\theta)d\theta$ части:

$$d\sigma(\theta) = d\sigma_s(\theta) + f(\theta)d\theta, \tag{5.1}$$

где мера $d\sigma_s(\theta)$ и функция $f(\theta)$ — четные и неотрицательные на $[-\pi, \pi]$, причем (см. [10]) $\operatorname{Re} I(re^{i\theta}) \to f(\theta)$, $r \to 1-0$, почти везде на $[-\pi, \pi]$, $f \in \mathscr{L}_1(-\pi, \pi)$.

Далее (см. [3])

$$\inf_{x, x_0=1} (A_n x, x) = \frac{D_n}{D_{n-1}} \geq \frac{D_{n+1}}{D_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.2}$$

и справедливо предельное соотношение (теореме Сегё — Колмогорова — Крейна [3])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{D_{n-1}} = \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\theta) d\theta\right] = G(f) < \infty. \tag{5.3}$$

Если $\ln f \notin \mathscr{L}_1$, то считаем $G(f) = 0$.

Докажем неравенство

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} \leq \frac{c_0^2 - \tilde{c}_n^2}{c_0}, \quad \tilde{c}_n^2 = \max_{1 \leq k \leq n} c_k^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.4}$$

Действительно, пусть $\tilde{c}_n^2 = c_k^2$ при некотором $k \in \overline{1, n}$. Полагая в вариационном принципе (5.2) $x_1 = \ldots = x_{k-1} = x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$, получим (5.4)

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} \leq \inf_{x_k} [c_0(1 + x_k^2) + 2c_k x_k] = \frac{c_0^2 - c_k^2}{c_0}.$$

Из (5.3) и (5.4) следуют неравенства

$$G(f) \leq \inf_{n \geq 1} \frac{c_0^2 - c_n^2}{c_0},$$

$$D_n \leq c_0\left(c_0 - \frac{\tilde{c}_1^2}{c_0}\right)\left(c_0 - \frac{\tilde{c}_2^2}{c_0}\right) \ldots \left(c_0 - \frac{\tilde{c}_n^2}{c_0}\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

если учесть, что $D_0 = c_0$.

Пусть $D_n>0$, $n=0, 1, \ldots$ Определим последовательность полиномов $\varphi_0(z)=1/\sqrt{D_0}=1/\sqrt{c_0}$,

$$\varphi_n(z)=\frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_0 & \ldots & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_1 \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix}, \quad n=1, 2, \ldots$$

Последовательность тригонометрических полиномов $\varphi_n(e^{i\theta})$, $n=0, 1, \ldots$ образует ортонормальную систему на $(-\pi, \pi)$ относительно веса $\frac{1}{2\pi}d\sigma(\theta)$.Старший коэффициент полинома φ_n равен $k_n=(D_{n-1}/D_n)^{1/2}$, а свободный член —

$$l_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-2} & c_{n-3} & \ldots & c_1 \end{vmatrix}, \quad n=1, 2, \ldots$$

Справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{n}|\varphi_k(0)|^2=\sum_{k=0}^{n} l_k^2=k_n^2=\frac{D_{n-1}}{D_n}, \quad 1, 2, \ldots \tag{5.5}$$

Полином $\varphi_n(e^{i\theta})/k_n$ минимизирует интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|e^{in\theta}+x_1e^{i(n-1)\theta}+\ldots+x_n|^2 d\sigma(\theta) \tag{5.6}$$

и этот минимум равен $1/k_n^2=D_n/D_{n-1}$. Тригонометрический полином степени n со старшим коэффициентом, равным 1, минимизирующий интеграл (5.6), единственен, если $D_n>0$.

Справедливы неравенства

$$G(f)<\frac{D_n}{D_{n-1}}, \quad n=1, 2, \ldots \tag{5.7}$$

Действительно, если бы при некотором $m\geqq 2$ было

$$\frac{1}{k_m^2}=\frac{D_m}{D_{m-1}}=G(f)<\frac{D_{m-1}}{D_{m-2}}=\frac{1}{k_{m-1}^2}, \tag{5.8}$$

то в силу (5.2) $k_n^{-2}=D_n/D_{n-1}=G(f)$, $n=m, m+1, \ldots$ Но тогда минимум интеграла (5.6), равный k_n^{-2}, не зависит от n и тригонометрический полином $e^{i(n-m)\theta}\varphi_m(e^{i\theta})/k_m$ со старшим коэффициентом 1 минимизирует этот интеграл при $n=m, m+1, \ldots$ Следовательно, в силу единственности минимизирующего полинома,

$$\varphi_n(e^{i\theta})=e^{i(n-m)\theta}\varphi_m(e^{i\theta}), \quad n=m, m+1, \ldots$$

Отсюда при $n\geqq m$ и $k\geqq m$ имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(e^{i\theta})\overline{\varphi_k(e^{i\theta})}d\sigma(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n-k)\theta}|\varphi_m(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta)=\delta_{nk}.$$

Стало быть $|\varphi_m(e^{i\theta})|^2=1$; отсюда $\varphi_m(e^{i\theta})=e^{im\theta}$, так что $k_m=1=G(f)$ и $l_m=0$. Но тогда в силу (5.5) $k_{m-1}=1$, что противоречит (5.8).

Если $D_n>0$, то справедливы неравенства

$$c_0G^n(f)>D_n, \quad n=1, 2, \ldots$$

Это следует из (5.7) и из условия $D_0=c_0$.

Докажем неравенства

$$\frac{D_n}{D_{n-1}}\leqq c_0-\frac{c_0(c_k^2+c_n^2)-2c_kc_nc_{n-k}}{c_0^2-c_{n-k}^2}, \tag{5.9}$$

$$n=2, 3, \ldots, \quad k=1, 2, \ldots, \quad n-1, \text{ если } |c_{n-k}|<c_0.$$

Действительно, полагая в вариационном принципе (5.2), $x_1=\ldots=x_{k-1}=x_{n+1}=\ldots=x_{n-1}=0$, получим (5.9):

$$\frac{D_n}{D_{n-1}}\leqq \inf_{x_k,\, x_n}\,[c_0(1+x_k^2+x_n^2)+2c_kx_k+2c_{n-k}x_kx_n+2c_nx_n]$$

$$=c_0-\frac{c_0(c_k^2+c_n^2)-2c_kc_nc_{n-k}}{c_0^2-c_{n-k}^2}.$$

Из (5.9) и (5.3) вытекают оценки

$$\frac{D_n}{D_{n-1}}\leqq c_0-\max_{k\in\overline{1,\, n-1}}\frac{c_0(c_k^2+c_n^2)-2c_kc_nc_{n-k}}{c_0^2-c_{n-k}^2}, \quad n=2, 3, \ldots,$$

$$G(f)\leqq c_0-\sup_{\substack{1\leqq k\leqq n-1\\ n\geqq 2}}\frac{c_0(c_k^2+c_n^2)-2c_kc_nc_{n-k}}{c_0^2-c_{n-k}^2}.$$

при условии, что $|c_k|<c_0$, $k=1, 2, \ldots$

Докажем неравенства

$$\frac{D_n}{D_{n-1}}\leqq c_0-\frac{2S_n^2}{T_n}, \quad T_n\geqq 0, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{5.10}$$

где

$$S_n=c_1+\ldots+c_n, \quad T_n=c_0n+2c_1(n-1)+\ldots+2c_{n-1}.$$

Действительно, положив в (5.2) $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$, имеем

$$\frac{D_n}{D_{n-1}}\leqq\inf_x\{c_0(1+nx^2)+2c_1[x+(n-1)x^2]+2c_2[x+(n-2)x^2]$$

$$+2c_{n-1}(x+x^2)+2c_nx]=\inf_x(T_nx^2+2S_nx+c_0)=c_0-\frac{2S_n^2}{T_n},$$

поскольку в силу положительности квадратичной формы (5.4) $T_n\geqq 0$.

Из (5.10), (5.2) и (5.3) получаем неравенства

$$G(f)\leqq c_0-\sup_{n\geqq 1}\frac{2S_n^2}{T_n}, \quad G(f)\leqq c_0-\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{2S_n^2}{T_n}. \tag{5.11}$$

6. Предположим теперь, что для производящей функции $I(z, \xi)$ (1.2) существует предел

$$\lim_{z\to 1-0,\ \mathrm{Im}\, z=0} I(z, \xi)=m(\xi). \tag{6.1}$$

Вопрос о том, какие ограничения накладывает на меру $d\sigma(\theta, \xi)$ условие существования предела (6.1) в представлении (1.2) — это типичный вопрос тауберовой теории. Для функций, голоморфных в единичном круге с положительной вещественной частью, из условий (6.1) следует существование предела при $z\to 1$ по любым некасательным направлениям. Последнее эквивалентно [11] существованию производной $\sigma_\theta'(0, \xi)=f(0, \xi)$, где $f(\theta, \xi)d\theta$ — абсолютно непрерывная часть меры $d\sigma(\theta, \xi)$, и приводит, в частности, к суммированию по Чезаро ряда (1.2) при $z=1$. Мы получаем, таким образом, соотношения

$$m(\xi)=f(0, \xi), \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n(\xi)=m(\xi), \tag{6.2}$$

где $\sigma_n(\xi)$ — чезаровская $(c, 1)$ сумма для коэффициентов ряда (1.2):

$$\sigma_n(\xi)=1+\frac{2}{n}[(n-1)M_1(\xi)+\ \dots\ +M_{n-1}(\xi)]. \tag{6.3}$$

Применяя вторую оценку (5.11) и пользуясь (6.2) и (6.3), получим неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|M_1(\xi)+\ \dots\ +M_n(\xi)|}{\sqrt{n}}\leq\sqrt{\frac{m(\xi)}{2}[1-G(f;\xi)]},$$

где $G(f; \xi)=\exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \ln f(\theta, \xi)d\theta\right]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barnsley, M., D. Bessis, P. Moussa. The Diophantine moment problem and the analytic structure in the activity of the ferromagnetic Ising model. *J. Math. Phys.*, **20**, 1979, 535—552.
2. Владимиров, В. С., Волович, И. В. Модель Изинга с магнитным полем и диофантова проблема моментов. *Теор. и матем. физика*, **53**, 1982, № 1, 3—15.
3. Гренандер, У., Г. Сеге. Теплицевы формы и их приложения. Москва, 1961.
4. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике. Москва, 1979.
5. Helson, H. Note on harmonic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**, 1953, 686—691.
6. Ilieff, L. Analytisch nicht fortsetzbare Potenzreihen. *Univ. Sofia, Fac. phys-math.*, **42**, 1946, 67—81.
7. Ilieff, L. Analytisch nicht fortsetzbare Potenzreihen. *C. R. Acad. Sci. Bulg.* **1**, 1948, 25—28.
8. Бибербах, Л. Аналитическое продолжение. Москва, 1967.
9. Владимиров, В. С. Диофантова проблема моментов и модель Изинга. *ДАН СССР*, 1982, **264**, 1301—1305.
10. Рудин, У. Теория функций в полукруге. Москва, 1974.
11. Loomis, L. H. The converse of the Fatou theorem for positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **53**, 1943, 239—250.

Математический государственный институт АН СССР им. В. А. Стеклова, Москва СССР

Поступила 28. 1. 1983 г.