

Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

МЕТОД КОНДЕНСАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ НЕСЖИМАЕМЫХ ФЛЮИДОВ

ПЕТР Й. ШОПОВ

В работе рассматриваются специальные методы численного решения задач динамики несжимаемых флюидов. Они основаны на идее конденсации конечных элементов, которая специфична для задач в пространстве с ограничением. Рассматриваемые методы универсальны и являются естественным развитием метода конечных элементов для этого класса задач.

1. Дискретизация задач в пространстве с ограничением методом Галеркина имеет вид

$$(1.1) \quad c(\mathbf{v}_h, \psi_s) + b(\psi_s, p_h) = 0, \quad s = 1, \dots, L,$$

$$(1.2) \quad b(\mathbf{v}_h, \varphi_k) = 0, \quad k = 1, \dots, M,$$

$$(1.3) \quad \mathbf{v}_h \in X_h = L(\psi_1, \dots, \psi_L), \quad p_h \in M_h(\varphi_1, \dots, \varphi_M),$$

где $c(\cdot, \cdot)$ произвольный, линейный по второму аргументу функционал, $b(\cdot, \cdot)$ — линейный функционал, дефинирующий ограничение на пространстве функций, давление p_h играет роль множителя Лагранжа для этого ограничения. Нас будет интересовать главным образом случай, когда ограничение есть условие солиноидальности $b(\mathbf{v}_h, \psi_k) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \Phi_k dx$, $\Omega \subset R^n$, $n=2$ или 3.

К такому типу задач относятся ряд задач механики несжимаемых флюидов примерно граничные задачи для уравнений Ойлера, Стокса, Озена, Навье-Стокса, Баусинеска, неньютоновых флюидов. В нестационарном случае функционал c и, éventuellement, область Ω меняются на каждом шагу по времени.

Для наглядности запишем задачу (1.1) и (1.2) в матричном виде

$$(1.4) \quad A(U)V + B^T P = F,$$

$$(1.5) \quad BV = G,$$

где U , V — векторы параметров для скорости и давления. Физически $U = V$, но обычно используется линеаризация, скажем, типа $U = \tilde{V}$ (скорость на нижнем слое по времени). В этом случае ее обычно решают, не учитывая ее специфики, методами гауссовского типа с выбором главного элемента, так как эта система не является положительно дефинитной. Широко используется метод подвижного фронта [4]. Все эти методы не учитывают, что давление и скорость величины разной природы и часто несоизмеримого порядка.

Если учесть физику задачи, мы должны, грубо говоря, работать следующим образом. Из уравнений (1.5) выражаем некоторые параметры для ско-

рости и подставляем в уравнения (1.4). Теперь уравнения, следящие за несжимаемостью удовлетворены тождественно и параметры P дискретизации множителя Лагранжа должны быть выключены тоже, потому что они связаны только с этим ограничением. Так, мы получаем систему

$$(1.6) \quad \tilde{A}(\tilde{U})\tilde{V} = \tilde{F}.$$

Эта система аналог слабой формулировки исходной граничной задачи в пространстве соленоидальных функций [6; 8], в которой не участвует давление. Поэтому естественно ожидать, что если мы работали аккуратно во всем, система (1.6) должна снова быть системой метода Галеркина для нового базиса $\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_L$, который должен быть определен исходным базисом (1.3) и триангуляцией \mathcal{T}_h . Пространство $V_h = L(\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_L)$ называем пространством слабосоленоидальных функций на триангуляции [14].

Тогда система (1.6) должна быть положительно определенной, так как стационарные уравнения Навье-Стокса эллиптические в пространстве соленоидальных функций. Она содержит существенно меньше неизвестных, чем система (1.4), (1.5).

Цель настоящей работы показать, что если мы используем конечные элементы, которые генерируют консервативные по массе схемы, система (1.1), (1.2) имеет все вышеотмеченные свойства. Кроме этого, мы укажем способ нахождения базиса пространства V_h , на основе которого можно получить систему (1.6), не выписывая и не решая систему (1.4), (1.5) и рассматривая существенно меньше неизвестных. В зависимости от типа КЭ экономия движается примерно в пределах 30–60%. Экономия оперативной памяти существенно больше.

Методы, при помощи которых ассамблируем не исходную систему (1.4), (1.5), а систему, полученную из нее в результате выключения части параметров, или эквивалентную ей систему, называем методами конденсационного типа. Как правило, мы знаем явные формулы для восстановления выключенных параметров. Такие системы уравнений называем вычислительно эквивалентными [10].

Методы конденсации можно рассматривать как специальные методы, облегчающие решение исходной системы. Они существенно эффективнее классических методов, так как позволяют заменить выключение существенного процента неизвестных на вычисление по явным формулам. С другой точки зрения, мы можем попросту забыть про часть неизвестных и вычислять их только когда они необходимы для вывода.

Явное знание базиса пространства слабосоленоидальных функций дает основу для построения класса новых численных методов, в частности также разностных схем.

Рассматриваемый круг исследований порожден основополагающими работами [1; 5; 8].

2. Исходный класс конечных элементов. Консервативные по массе схемы получаются при использовании конечных элементов (КЭ) с аппроксимацией для давления класса C^{-1} , т. е. без требований непрерывности на границе КЭ [8]. К КЭ для несжимаемых течений, кроме обычных требований к аппроксимации, приходится ставить еще одно. Это требование возникло в связи с вычислительными неудачами с многими КЭ, которые зарекомендовали себя хорошими для эллиптических задач [7].

Тест грубых триангуляций (ТГТ): Для произвольной триангуляции и произвольных граничных условий, удовлетворяющих условию интегральной несжимаемости [11] (условие баланса массы [7])

$$(2.1) \quad \int_{\partial\Omega_h} \mathbf{v}_{h,n} ds = 0$$

система (1.2) совместима.

Тест грубых триангуляций обычно нарушается для триангуляций с малым числом КЭ. Если он не проходит, то это означает, что рассматриваемый КЭ не имеет достаточно степеней свободы для удовлетворения дискретизации уравнения непрерывности. Аппроксимация слишком жесткая, и это создает искусственное давление, которое уравнивает эту жесткость.

Для консервативных по массе КЭ, которые удовлетворяют ТГТ, можно доказывать оценку ошибки МКЭ, следуя идеям [1; 5; 8].

Такие КЭ имеют вид

$$(2.2) \quad \mathbf{v}_{h,t} = \sum \mathbf{v}_{i,s} N_{i,s}^{(t)}; \quad p_h|_{e_k} = p_{m-1} \in \mathcal{P}_{m-1},$$

где через $\mathbf{v}_{i,t}$ означена t -я компонента вектора \mathbf{v}_i , m — степень точности в энергетической норме [1], \mathcal{P}_{m-1} — множество полиномов степени $m-1$.

Вводим в КЭ новые переменные циркуляции C_i (или две «циркуляции» в трехмерном случае) и поток Q_i через стороны КЭ [13]. Это некоторая замена переменных, которая позволяет доказать оценку ошибки в изопараметрическом случае [13] и имеет существенную роль для понимания дискретного ограничения непрерывности.

Замечание 2.1. Новые переменные являются линейными комбинациями старых. Замена такого типа приводит очевидно к эквивалентному преобразованию системы (1.4), (1.5). Если в систему (1.4), (1.5) для КЭ в старых переменных подставить новые переменные, умножить некоторые уравнения на константы и прибавить к другим уравнениям в соответствии с заменой переменных, получим систему (1.4), (1.5), которую генерируют те же КЭ в новых переменных.

3. Внутренняя конденсация. КЭ с точностью больше единицы имеют внутренние узлы для скорости. Эти узлы приходится вводить для удовлетворения ТГТ, и они соответствуют членам выше нулевой степени в аппроксимации для давления. Впервые КЭ такого типа предложены в [1], но они не популярны, так как имеют очень много параметров за счет внутренних узлов.

Параметры для скорости во внутренних узлах можно выразить из уравнений (1.2), сопряженных параметрам для давления $P_{k,j}$ перед членами, выше нулевой степени. Параметр для скорости, выраженный из уравнения, сопряженного параметру для давления, называем взаимно-сопряженными параметрами. Подставляя в аппроксимацию для скорости (2.2), получаем КЭ, которые называем конечными элементами с внутренней конденсацией [9; 10; 11]. Из них выпадают и параметры $P_{k,j}$, так как сопряженные им уравнения выполнены тождественно. Такие КЭ имеют существенно меньше параметров, чем исходные — примерно для равнинных конформных КЭ второго порядка точности уменьшение равняется 44% для треугольного и 38% для четырехугольного случая. Сжатие ленты матрицы системы уравнений соответственно 64 и 55%.

Для всех КЭ с внутренней конденсацией верна теорема о внутренней конденсации, которая утверждает вычислительную эквивалентность таких КЭ исходным [10]. Она не зависит от конкретного вида функционала c , который может быть нелинейным, от вида КЭ в триангуляции и от вида ограничения b .

Конструкция внутренней конденсации довольно обща — она естественна для КЭ в двухмерном и трехмерном случае, так же и для изопараметрического случая [12; 13].

4. Внешняя конденсация. Применяя в случае надобности внутреннюю конденсацию, все исходные КЭ заменяются вычислительно эквивалентными КЭ вида

$$(4.1) \quad \mathbf{v}_{h,t} = \Sigma \mathbf{v}_{i,s} N_{i,s}^{1,t} + \Sigma \mathbf{g}_{i,s} N_{i,s}^{2,t}; \quad \mathbf{g}_i = (\mathbf{C}_i, Q_i); \quad p_h|_{e_k} = P_{k,0}.$$

Для таких КЭ дискретизация уравнений непрерывности имеет вид

$$(4.2) \quad \Sigma k_i Q_i = 0,$$

где $k_i = 1$, если нормаль n_i внешняя для КЭ e_k и -1 в противном случае. Считаем, что каждой стороне КЭ из триангуляции \mathcal{T}_h присвоена касательная (две касательные для случая $n=3$) и нормаль единственным образом, которая в двумерном случае, результат вращения на угол $-\pi/2$ касательной.

Чтобы получить базис пространства V_h , надо параметрам $P_{k,0}$ выбрать сопряженные потоки, и выразить их из уравнений (3.2). Такие Q -параметры называем небазисными, и они выражаются через остальные, базисные потоки. Очевидно, никакой базисный поток не выражается через остальные базисные потоки при помощи уравнений (4.2).

Легко заметить, что из условия баланса массы (4.2) для каждого КЭ. следует баланс массы в каждой фигуре, составленной из КЭ, из \mathcal{T}_h . Небазисные потоки выражаются наиболее удобно через базисные, рассматривая фигуры, в которых все элементарные потоки или базисные, или заданы в качестве граничных условий с исключением точно одного. Такая фигура существует всегда для каждого небазисного потока. Подставляя в исходную глобальную аппроксимацию, получаем базис пространства V_h в явном виде.

Для иллюстрации рассмотрим подробно только один пример — двумерная равнинная или осесимметрическая задача в криволинейной области, разделенной на $N \times M$ четырехугольных изопараметрических КЭ при помощи кривых, первая граничная задача, однородные граничные условия для потоков (фиг. 1). Узел, лежащий на пересечении кривых с номерами i и j , означаем через $P_{i,j}$.

Выбираем базис $\{Q_{(i,j)(i,j+1)}; i=2, \dots, N; j=1, \dots, M-1\}$, $Q_{(i,j)(i,j+1)} = -Q_{(i,j+1)(i,j)} -$ поток через $P_{i,j}P_{i,j+1}$. Рассматривая криволинейный четырехугольник $P_{i-1}P_{i,j}P_{i+1,j}P_{i+1,j+1}$ и $P_{1,j}P_{1,M+1}P_{i,M+1}P_{i,j}$ получаем соответственно

$$(4.3) \quad Q_{(i,j)(i+1,j)} = - \sum_{s=1}^{i-1} Q_{(i,s)(i,s+1)} + \sum_{s=1}^{j-1} Q_{(i+1,s)(i+1,s+1)} + Q_{(i,1)(i+1,1)}$$

$$(4.4) \quad Q_{(i,M)(i,M+1)} = \sum_{s=1}^M Q_{(1,s)(1,s+1)} - \sum_{s=1}^{M-1} Q_{(i,s)(i,s+1)} - \sum_{s=1}^{i-1} Q_{(s,1)(s+1,1)}$$

$$= \sum_{s=1}^{i-1} Q_{(s,M+1)(s+1,M+1)}.$$

Запишем аппроксимацию для \mathbf{v} в глобальном виде

$$(4.5) \quad \mathbf{v}_{h,t} = \sum \mathbf{v}_{i,s} \Psi_{i,s}^{1,t} + \sum \mathbf{g}_{i,s} \Psi_{i,s}^{2,t}.$$

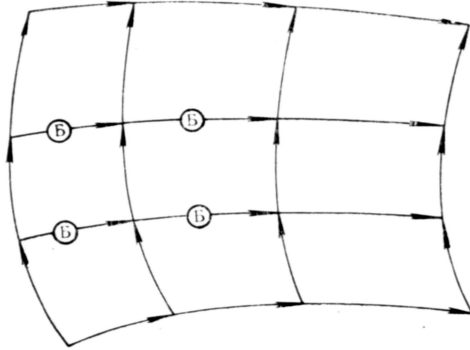


Рис. 1. ($N=M=3$)

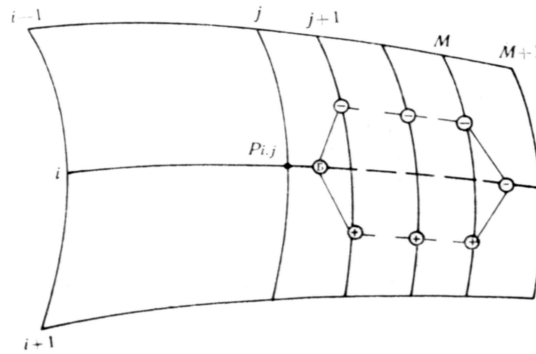


Рис. 2

В этих означениях базис пространства V_h имеет вид

$$(4.6) \quad \tilde{\mathbf{v}}_{h,t} = \sum_{i,s} \Psi_{i,s}^{1,t} + \sum C_i \Psi_{i,1}^{2,t} + \sum Q_i \tilde{\Psi}_{i,2}^{2,t}.$$

Базисные функции для базисных потоков записываются в четырехиндексных обозначениях следующим образом:

$$(4.7) \quad \tilde{\Psi}_{(i,j)(i,j+1),2}^{2,t} = \Psi_{(i,j)(i,j+1),2}^{2,t} - \Psi_{(i,M)(i,M+1),2}^{2,t} + \sum_{s=j+1}^M \Psi_{(i,s)(i+1,s),2}^{2,t} - \sum_{s=j+1}^M \Psi_{(i-1,s)(i,s),2}^{2,t}.$$

Очевидно, базис пространства V_h уже нелокален, носитель базисных функций для потоков состоит из целой ленты КЭ (фиг. 2). Такую фигуру называем путем выключения давления из соображений, которые ясны из доказательства теоремы 4.1 о внешней конденсации,

Теорема 4.1. Системы (1.1), (1.2), соответствующие исходным КЭ и базису V_h , вычислительно эквивалентны.

В качестве формул восстановления параметров для давления используются уравнения из (1.1), сопряженные этим параметрам, а для восстановления небазисных потоков — выражения этих параметров через базисные.

Доказательство. Для краткости мы ограничимся доказательством только в подробно рассмотренном выше случае слоистой триангуляции. Выпишем систему (1.1) для конденсированных или исходных КЭ, вычисляя коэффициенты перед давлением, $p_{i,j}$ — давление в КЭ $P_{i,j}P_{i,j+1}P_{i+1,j+1}P_{i+1,j}$

$$(4.8) \quad c(\mathbf{v}_h, \Psi_{k,s}^{1,t}) = 0 \quad s=1, 2; \quad c(\mathbf{v}_h, \Psi_{k,1}^{2,t}) = 0,$$

$$(4.9) \quad c(\mathbf{v}_h, \Psi_{(i,j)(i,j+1),2}^{2,t}) - p_{i,j} + p_{i+1,j} = 0,$$

$$(4.10) \quad c(\mathbf{v}_h, \Psi_{(i,j)(i+1,j),2}^{2,t}) - p_{i,j} + p_{i,j+1} = 0.$$

При помощи уравнений для небазисных потоков выключаем давление из уравнений для базисных потоков. Оказывается, это выключение проводится согласно пути выключения давления — фиг. 2. Получаем

$$c(\mathbf{v}_h, \Psi_{(i,j)(i,j+1),2}^{2,t} - \Psi_{(i,M)(i,M+1),2}^{2,t} + \sum_{s=j+1}^M \Psi_{(i,s)(i+1,s),2}^{2,t} - \sum_{s=j+1}^M \Psi_{(i-1,s)(i,s),2}^{2,t}) = c(\mathbf{v}_h, \tilde{\Psi}_{(i,j)(i,j+1),2}^{2,t}) = 0.$$

Остается заметить, что $\tilde{\mathbf{v}}_h$ получается из \mathbf{v}_h , если удовлетворить тождественно уравнения (4.2).

Легко видеть, что теорема 4.1 верна для всех триангуляций в двухмерном и трехмерном случае и не зависит от вида функционала c и от его линейности. Используя уравнения (4.9), (4.10) для небазисных потоков и дви-

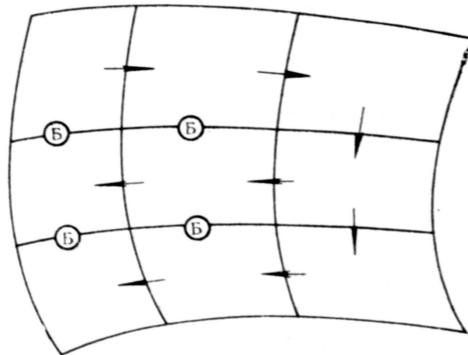


Рис. 3. ($N=M=3$)

гаясь по пути восстановления давления (фиг. 3), мы можем вычислить давление всегда, когда это нам необходимо. Давление в некотором КЭ должно быть предписано [11], и с него начинается путь восстановления давления.

Прямое использование базиса V_h не очень эффективно в вычислительном отношении в виду его нелокальности. Поэтому лучше получать локаль-

ные матрицы для исходных или конденсированных КЭ соответственно, но при ассамблировании принос локальных матриц для небазисных Q -параметров отчитывается в глобальной матрице A за счет базисных Q -потоков в согласии с формулами восстановления небазисных потоков — в случае (4.3), (4.4). Очевидно, небазисные Q -потоки и давление не считаются неизвестными и не номерируются. Уравнения, соответствующие небазисным потокам, записываются в вспомогательную матрицу \tilde{B} , и после прохождения ассамблирующей программы КЭ($i+1$)-ой строки, некоторые из строк \tilde{B} складываются или вычитаются из строк A в соответствии путем исключения давления. Это вычислительно дешевая операция, так как не используется никакое умножение.

Таким образом, метод внешней конденсации в линейном случае можно рассматривать как специальную модификацию метода Гаусса и идеи ассамблирования матриц в МКЭ, которая отчитывает всю специфику задач для несжимаемых флюидов, структуру системы уравнений и ее разреженность. Он приложим и для трехмерных задач, и для задач со свободными границами. Идея конденсации используется и для сжимаемых флюидов.

В последующем станет понятно, что описанный здесь способ получения матрицы A представляет практический интерес только для трехмерных задач. Из соображений нормировки лучше работать циркуляциями и потоком, поделенными на меру стороны КЭ.

Основной недостаток внешней конденсации состоит в нетривиальной программной реализации, которая для произвольной триангуляции связана с теорией графов. С другой стороны, это наиболее естественный способ решения системы уравнений, и это дает некоторые основания предполагать, что такие программы будут созданы.

5. Использование функции тока. Исследования, изложенные в первых четырех частях, были закончены, когда Д. Ф. Гриффитс был любезен прислать автору свои работы [2; 3], где для равнинных КЭ с прямыми сторонами конструированы КЭ, которые удовлетворяют тождественно условиям (1.2). Оказалось, что эту конструкцию можно освободить от связи с аппроксимацией функции тока, и ее можно рассматривать как дальнейшее развитие идеи конденсации.

Для равнинных и осесимметрических задач можно сделать замену базисных Q -переменных

$$(5.1) \quad \Psi_{i,j} = \sum_{s=1}^{j-1} Q_{(i,s)(i,s+1)}.$$

Легко видеть, что каждому узлу типа $P_{i,j}$ соответствует одно неизвестное. Тогда все потоки выражаются просто

$$(5.2) \quad Q_{(i,j)(i+k,j+l)} = k_{i,j} (\Psi_{i+k,j+l} - \Psi_{i,j}),$$

где $k_{i,j}$ равно 1, если касательная из триангуляции \mathcal{T}_h указывает, что $P_{i,j}$ начало сегмента $\widehat{P_{i,j}P_{i+k,j+l}}$ и -1 в противном случае. Уравнения (4.2) удовлетворяются тождественно.

Подставляя новые переменные в явный вид базиса (4.6), видно, что в этих переменных он уже локализован. Поэтому базис в Ψ переменных описывается в терминах классических КЭ, с которыми удобно работать. Для получения слабо солиноидальных КЭ необходимо только сделать замену (5.2) в КЭ типа (4.1). Так мы получаем простой способ ассамблирования системы,

эквивалентной системе (1.6), которая имеет то же самое число неизвестных и так же положительно definite. Эта конструкция уже не зависит явным образом от вида триангуляции \mathcal{T}_h .

Граничные условия для Ψ вычисляются по формулам (5.2), предписывая значение Ψ в одном узле. Давление можно восстанавливать по любому пути по формулам (4.9), (4.10), что неявно эквивалентно другому выбору базиса. Давление не зависит от выбора пути восстановления, так как оно всегда удовлетворяет (1.1), (1.2), и система имеет единственное решение [11]. Стоимости скорости вычисляем по явным формулам (5.2), по формулам, связывающим циркуляцию и поток со скоростями (см. прим. [13]), и, эвентуально, по явным формулам внутренней конденсации [12]. Параметры для давления перед высшими членами обычно восстанавливать излишне.

Методы рассматриваемого типа многократно превосходят своей эффективностью классические. Эксперименты Д. Ф. Гриффитса с его треугольными равнинными КЭ, показывают, что уменьшение машинного времени, затрачиваемого на решение системы уравнений (1.1), (1.2) в случае тестовой задачи для уравнений Стокса доходит до двадцати раз.

В этой статье изложена только идейная сторона метода конденсации.

Полный набор слабо солиноидальных КЭ для равнинных и осесимметрических задач и оценки ошибки, если такие не известны, будут даны отдельно (пр. [13]).

В заключение выражаю благодарность Р. Д. Лазарову за многобройные полезные консультации и З. Д. Запрянову за внимание и тотальную поддержку в разработке круга вопросов, изложенных в этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Crouzeix, P. A. Raviart. Conforming and Nonconforming Finite Element Methods for Solving the Stationary Stokes Equations. RAIRO. R-3. 1973, 33—76.
2. D. F. Griffiths. Finite Element for Incompressible Flow. *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, **1**, 1979, 16—31.
3. D. F. Griffiths. An Approximately Divergence-free 9-node Velocity Element (with variations) for incompressible Flows. *Int. J. Num. Meth. Fluids.*, **1**, 1981, 323—346.
4. P. Hood. Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 1976, 379—399.
5. P. Jamet, P. A. Raviart. Numerical Solution of the Stationary Navier-Stokes Equations by Finite Element Methods. *Lect. Not. Comp. Sci.*, **10**, 193—223.
6. О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Москва, 1970.
7. R. L. Sani, P. M. Gresho, R. L. Lee, D. F. Griffiths, M. Engelman. The Cause and Cure of the Spurious Pressures Generated by Certain FEM Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Int. J. Num. Meth. Fluids.*, **1**, 1981, 17—43 and 171—204.
8. Р. Темам. Уравнения Навье-Стокса. М., 1981.
9. П. Й. Шопов. Относно един краен елемент за уравненията на Навие-Стокс. Материали на И КДУ, Русе, 1981 (под печат).
10. П. Й. Шопов. Въртешна кондензация на крайни елементи за уравненията на Навие-Стокс. — В: Математика и математическо образование. София, 1982, 307—313.
11. П. Й. Шопов. Некоторые свойства дискретизации методом конечных элементов задач динамики несжимаемых флюидов. *Сердика*, **9**, 1983, 365—371.
12. П. Й. Шопов. Изопараметрические конечные элементы с внутренней конденсацией. *Доклады БАН* (в печати).
13. П. Й. Шопов. Слабосолиноидальные изопараметрические конечные элементы для численного моделирования течений несжимаемых флюидов (предстоит выйти).