Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЭКВИВАРИАНТНЫЕ ШЕЙПЫ

Ю. М. СМИРНОВ

1. Достоинства теории шейпов заключаются в частности и в том, что она позволяет определять спектральные (= чеховские) функторы из сингулярных единым методом, действующим в самых различных обстоятельствах. Для этого очень удобно понятие обратного спектра, ассоциированного с пространством, введенное Морита (и Сегалом):

Спектр $\underline{X}=\{X_\alpha, p_{\alpha,\alpha'}\}$ *какой-нибудь категории* $\mathcal{K}$ *называют* $\mathcal{L}$-ассоциированным *с объектом* $X\in\mathcal{K}$, *где* $\mathcal{L}$-*некоторая подкатегория категории* $\mathcal{K}$, *если существует такой морфизм* $\underline{p}:X\to\underline{X}$ *категории* pro-$\mathcal{K}$, *что для всякого морфизма* $\underline{q}:X\to\underline{Y}=\{Y_\beta, q_{\beta,\beta'}\}$ *существует единственный такой морфизм* $\underline{f}:\underline{X}\to\underline{Y}$ *категории* pro-$\mathcal{K}$, *что диаграмма коммутативна*

$$\begin{tikzcd} & \underline{X} \arrow[d, bend left, "\underline{f}"] \\ X \arrow[ur, "\underline{p}"] \arrow[r, "\underline{q}"'] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

От спектра $\underline{Y}$ требуется, чтобы все его объекты Y_β принадлежали $\mathcal{L}$. В этом случае пишут $\underline{X}=\operatorname{ass} X$. Сразу же обратим внимание на то, что это определение в некотором смысле двойственно определению предела обратного спектра. Конечно, строго говоря, $\operatorname{ass} X$ есть не сам спектр $\underline{X}$, но спектр $\underline{X}$ вместе с морфизмом $\underline{p}:X\to\underline{X}$. Так же, как и для обратных пределов, можно показать, что $\operatorname{ass} X$ единственен (если только существует) с точностью до изоморфизмов категории pro-$\mathcal{K}$. Таким образом в теории шейпов важно существование ассоциированных спектров (но не единственность), а также важно, чтобы таких спектров было „достаточно много".

2. Теперь объясним понятия, употребленные в определении ассоциированного спектра (те, кто их знают, могут этот пункт пропустить).

1. Морфизм $\underline{p}:X\to\underline{X}$ — это совокупность морфизмов $p_\alpha:X\to X_\alpha$, коммутирующих с проекциями $p_{\alpha,\alpha'}$, спектра $\underline{X}$. Аналогично определяется морфизм $\underline{q}:X\to\underline{Y}$.

2. Чтобы определить морфизм $\underline{f}:\underline{X}\to\underline{Y}$, рассмотрим систему $f=\{\varphi:B\to A$, $f_\beta:X_{\varphi(\beta)}\to Y_\beta$, где A, B — множества индексов спектров, которые мы рассматриваем, удовлетворяющую следующему условию: для любой проекции $q_{\beta,\beta'}:Y_{\beta'}\to Y_\beta$ существует такой индекс $\alpha\geqq\varphi(\beta), \varphi(\beta')$, что коммутативна следующая диаграмма

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 10, 1984, с. 223—228.

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\varphi(\beta')} \arrow[rr, "f_{\beta'}"] & & Y_{\beta'} \arrow[d, "q_{\beta,\beta'}"] \\
X_\alpha \arrow[ur, "p_{\varphi(\beta')\alpha}"] \arrow[dr, "p_{\varphi(\beta)\alpha}"'] & & & \\
 & X_{\varphi(\beta)} \arrow[rr, "f_\beta"] & & Y_\beta
\end{tikzcd}$$

3. Морфизмы f и $f' = \{\varphi', f'_\beta\}$ называют эквивалентными, если для любого объекта Y_β существует такое $\alpha \geq \varphi(\beta), \varphi'(\beta)$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\varphi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"] & \\
X_\alpha \arrow[ur, "p_{\varphi(\beta)\alpha}"] \arrow[dr, "p_{\varphi'(\beta)\alpha}"'] & & Y_\beta \\
 & X_{\varphi'(\beta)} \arrow[ur, "f'_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Легко показать, что эта эквивалентность удовлетворяет всем обычным требованиям (рефлексивность, симметричность, транзитивность). Морфизмы $\underline{f}: \underline{X} \to \underline{Y}$ по определению суть классы эквивалентности систем f.

4. Категория pro-$\mathscr{K}$ состоит из обратных спектров $\underline{X} = \{X_\alpha, p_{\alpha,\alpha'}\}$, где $X_\alpha, p_{\alpha,\alpha'} \in \mathscr{K}$ для всех α, α' с направленными множествами индексов, а также из морфизмов $\underline{f}: \underline{X} \to \underline{Y}$. Операция композиции морфизмов $\underline{f} = \{f\}: \underline{X} \to \underline{Y}$ и $\underline{g} = \{g_\gamma\}: \underline{Y} \to \underline{Z} = \{Z_\gamma, r_{\gamma,\gamma'}\}$ определяется по представителям следующим образом: $gf = \{\varphi\psi, g_\gamma \circ f\psi(\gamma)\}$, если $f = \{\varphi, f_\beta\}$, а $g = \{\psi, g_\gamma\}$. Легко показать, что такая операция композиции определена корректно и что она согласована с эквивалентностью в том же смысле, в каком операция композиции непрерывных отображений согласована с отношением гомотопности. Поэтому операция композиции морфизмов категории pro-$\mathscr{K}$ также определена корректно.

3. Приведем примеры ассоциированных спектров обычной теории шейпов для категории $\mathscr{K}$ из топологических пространств и гомотопических классов непрерывных отображений. За $\mathscr{L}$ здесь обычно принимают „самые простые объекты": именно, или категорию клеточных комплексов, или категорию абсолютных окрестностных ретрактов метрических пространств. Итак, или $\mathscr{L} = CW$, или $\mathscr{L} = \mathrm{ANR}$. Это дает на самом деле один и тот же результат, так как всякий CW — комплекс гомотопически эквивалентен некоторому ANR.

A. Спектр $\{N_\omega[p_{\omega,\omega'}]\}$ из нервов открытых локально конечных нормальных покрытий топологического пространства X ассоциирован с X (Морита).

Это позволило Морита распространить теорию шейпов Борсука-Мардежича-Сегала на все топологические пространства.

B. Если бикомпакт $X = \varprojlim\{X_\alpha, p_{\alpha,\alpha'}\}$ для некоторого обратного спектра $\underline{X} = \{X_\alpha, p_{\alpha,\alpha'}\}$, то $\underline{X} = \operatorname{ass} X$ (Мардежич).

Так как по теореме Стинрода всякий бикомпакт является пределом обратного спектра из конечных ($=$компактных) полиэдров, то это позволило Мардежичу и Сегалу распространить теорию шейпов Борсука на все бикомпакты.

C. Если X является подмножеством абсолютного окрестностного ретракта M (категории метрических пространств), то спектр $\{U_\alpha, i_{\alpha,\alpha'}\}$ из всех окрестностей множества X в M, вместе с включениями $i_{\alpha,\alpha'}: U_\alpha \hookrightarrow U_{\alpha'}$, ассоциирован с X (Фокс).

Это позволило Фоксу распространить теорию шейпов Борсука на все метрические пространства, так как всякое метрическое пространство даже замкнуто вкладывается в некоторый абсолютный ретракт.

4. Теперь объясним, как из сингулярных функторов получаются методом ассоциированных спектров функторы спектральные.

Пусть дан функтор $\mathscr{F}:\mathscr{X}\to GR$ в категорию групп имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{X} \arrow[dl, hook'] \arrow[d, hook] \arrow[r, "\mathscr{F}"] & GR \arrow[d, hook] \arrow[dr, "I_d"] & \\
\mathscr{K} \arrow[r, "\mathrm{ass}"] \arrow[rrr, bend right, "\breve{\mathscr{F}}"'] & \text{pro-}\mathscr{X} \arrow[r, "\text{pro-}\mathscr{F}"] & \text{pro-}GR \arrow[r, shift right] & GR \arrow[l, shift right, "\lim"']
\end{tikzcd}$$

Здесь ass сопоставляет каждому объекту из $\mathscr{K}$ некоторый ассоциированный с ним обратный спектр категории $\mathscr{X}$ (в предположении, что такие спектры существуют). Тогда легко показать, что каждому морфизму $f:X\to Y$, единственным образом сопоставляется такой морфизм $\mathrm{ass}\, f:\mathrm{ass}\, X\to\mathrm{ass}\, Y$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{p} & \mathrm{ass}\, X \\
f\big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{ass}\, f \\
Y & \xrightarrow{q} & \mathrm{ass}\, Y
\end{array}$$

коммутативна. Отсюда следует, что ass является функтором.

Здесь pro-$\mathscr{F}$ сопоставляет каждому обратному спектру $\{X_\alpha, p_{\alpha,\alpha'}\}$ обратный спектр $\{\mathscr{F}(X_\alpha), \mathscr{F}(p_{\alpha,\alpha'})\}$.

Здесь „вертикальные“ включения $\subset\!\!\to$ сопоставляют каждому объекту X обратный спектр $\{X, Id\}$, а каждой группе G спектр $\{G, Id\}$.

Остается из функтора $\mathscr{F}$ определить „спектральный“ ($=$шейповый) функтор $\breve{\mathscr{F}}:\mathscr{K}\to GR$ как композицию $\breve{\mathscr{F}}=\varprojlim\circ\,\mathrm{pro}\,\mathscr{F}\circ\mathrm{ass}$. Можно показать, что этот функтор $\breve{\mathscr{F}}$ не зависит от выбора функторов ass и $\varprojlim$, точнее говоря, что шейповые функторы, полученные разными способами из одного функтора $\mathscr{F}$, естественным образом эквивалентны. Стало быть, соответствующие группы $\breve{\mathscr{F}}(X)$ будут изоморфны (при каждом данном X), как бы мы не определили $\breve{\mathscr{F}}$ из $\mathscr{F}$.

5. Таким образом, из сингулярного гомологического функтора H_* мы получаем в топологическом случае ($\mathscr{K}=\mathrm{Top}$, $\mathscr{X}=CW$, или $\mathscr{X}=\mathrm{ANR}$) спектральный функтор $\breve{H}_*$ Александрова-Чеха, так как всегда можем взять функтор ассоциированности $\mathrm{ass}\, X=\{N_\omega, [p_{\omega,\omega'}]\}$. Но, что очень удобно во многих случаях, можем взять для бикомпактов функтор $\mathrm{ass}\, X=\bar{X}$, где $\bar{X}$ состоит из полиэдров, а $X=\varprojlim\bar{X}$. А для метрических пространств можем взять, что также может быть видно функтор $\mathrm{ass}\, X=\{U_\alpha, i_{\alpha,\alpha'}\}$ при подходящем вложении $X\subset M\in\mathrm{ANR}$.

Таким образом, в том же топологическом случае мы получаем и спектральный когомологический функтор $\breve{H}^*$ из сингулярного функтора H^*: надо только pro-GR заменить на inj-GR, а $\varprojlim$ на $\varinjlim$.

Таким же образом определяется и спектральный гомотопический функтор $\breve{\pi}_*$.

6. Оказывается все это можно сделать и в эквивариантном случае, т. е. когда рассматриваются пространства с непрерывными действиями какой-нибудь фиксированной бикомпактной хаусдорфовой группы G, правда, не для любых пространств; во всяком случае для метрических пространств, для бикомпактов и, пока, самое большее, для p-паракомпактных пространств (их можно определить как замкнутые подмножества произведений $M\times B$, где M — метризуемо, а B — бикомпакт (Нагата)).

Разумеется, должны рассматриваться не непрерывные отображения, а т. наз. *эквивариантные* (т. е. коммутирующие с действиями) непрерывные отображения. При этом нужны и эквивариантные гомотопии: эквивариантные отображения f_0 и f_1 называют гомотопными эквивариантно, если существует такая эквивариантная гомотопия $H.X\times I\to Y$, что $H(x, 0)=f_0(x)$, а $H(x, 1)=f_1(x)$; при этом существенно, что действие данной группы G на отрезке $I=[0, 1]$ считается тривальным (т. е. $gt=t$), а действие на $X\times I$ определяется по-координатно: $g(x, t)=(gx, gt)$.

Для категорий топологических пространств с непрерывными действиями фиксированной бикомпактной группы уже построены эквивариантные гомологии и когомологии (Илман, Бредон) и эквивариантные гомотопии (Ванер), но и те, и другие носят существенно сингулярный характер и по-существу строятся аналогично обычному сингулярному методу. Все эти функторы инвариантны относительно эквивариантной гомотопии. Поэтому можно рассматривать в качестве категории $\mathscr{K}$ метризуемые (соотв. бикомпактные, p-паракомпактные) пространства с непрерывными действиями бикомпактной группы G с эквивариантно гомотопическими классами эквивариантных отображений в качестве морфизмов. За категорию $\mathscr{L}$ мы пока умеем брать полную подкатегорию из эквивариантных окрестностных ретрактов той или иной рассматриваемой категории. Тогда по той же схеме мы можем получить из сингулярных функторов (теорий) Илмана и Ванера соответствующие спектральные функторы (теории) — лишь бы в рассматриваемой категории каждый объект обладал ассоциированным с ним обратным спектром. Заметим, что в эквивариантном случае спектральные группы вообще были не известны, если брать произвольную бикомпактную действующую группу, даже в случае бикомпактной группы Ли. Они были известны лишь в случае *конечной* действующей группы (Бредон)!

7. Итак, остается привести лишь теоремы о существовании в рассматриваемых нами случаях ассоциированных спектров.

M) В метрическом случае мы следуем методу Борсука—Фокса. Для всякого замкнутого вложения $i:X\subset\to M$ пространства X с непрерывным действием группы G отображение $\breve{i}:X\to C(G, M)$ оказывается также замкнутым вложением, и при том эквивариантным, если $C(G, M)$ брать с бикомпактно открытой топологией и с действием, заданным формулой $(gf)g'=f(g'g)$ (Смирнов). Это действие непрерывно даже в случае любого пространства и любой локально бикомпактной действующей непрерывно группой G. Но нам нужно, чтобы $C(G, M)$ само было метризуемым, что максимально возможно в случае локально бикомпактной и σ — компактной группы (Аренс). Нужно также, чтобы $C(G, M)$ было бы эквивариантным абсолютным ретрактом, если M — абсолютный ретракт. Это также верно в достаточно общем случае (и не только в глобальном, но и в окрестностном случае) — Смирнов. Поэтому уже нетрудно показать, что спектр $\{U_\alpha, i_{\alpha, \alpha'}\}$ из инвариантных окрестностей пространства X в $C(G, M)$ будет ассоциирован с X (Смирнов).

В) В бикомпактном случае также можно следовать методу Борсука—Фокса. Для всякого метризуемого бикомпакта существует инвариантная метрика d (т. е. $d(gx, gx') = d(x, x')$). Даже в случае компактной (=счетно компактной по Бурбаки) действующей группы и без преположения бикомпактности объекта X (Антонян). Поэтому обычно вложение $j: X \subset\!\!\to C(X, \mathsf{R})$, введенное Куратовским с помощью формулы $(j(x))x' = d(x, x')$, будет эквивариантным, если $C(X, \mathsf{R})$ брать с топологией равномерной сходимости и с *действием*, заданным формулой $(gf)(x) = f(g^{-1}x)$. Множество $V = \overline{\operatorname{con} vjX}$ будет метризуемым бикомпактом, выпуклым и инвариантным, так как рассматриваемое действие на $C(X, \mathsf{R})$ не только непрерывно, но и линейно, т. е. $g(\alpha f + \alpha' f') = \alpha(gf) + \alpha'(gf')$.

Пусть теперь X — произвольный бикомпакт. Тогда существует система $\{f_\alpha : X \to \mathsf{R}\}$ непрерывных функций, разделяющая точки от замкнутых множеств. Тогда система $\{\check{f}_\alpha : X \to C(G, \mathsf{R})\}$ также разделяет точки от замкнутых множеств (Антонян) и состоит из эквивариантных отображений. Поэтому множества $\check{f}_\alpha X$ являются инвариантными в $C(G, \mathsf{R})$ и в то же время метризуемыми бикомпактами, так как $C(G, \mathsf{R})$ метризуемо (компактно — открытая топология даже совпадает с топологией равномерной сходимости). Каждое $f_\alpha \check{X}$ согласно предыдущему эквивариантно вкладывается в некоторое множество V_α, являющееся метризуемым бикомпактом и выпуклое и инвариантное в $C(\check{f}_\alpha X, \mathsf{R})$. Поэтому само X эквивариантно вкладывается в бикомпакт ΠV_α того же веса, что и X, выпуклый и инвариантный в $\Pi C(\check{f}_\alpha X, \mathsf{R})$. Это последнее произведение мы берем с тихоновской топологией произведения и с по-координатным действием. Это действие будет линейно, и поэтому мы имеем локально выпуклое хаусдорфово пространство $Y = \Pi C(\check{f}_\alpha X, \mathsf{R})$, а в нем выпуклое инвариантное бикомпактное множество $W = \Pi V_\alpha$. Так как W является абсолютным ретрактом категории бикомпактов (и даже нормальных пространств, то оно будет и эквивариантным абсолютным ретрактом даже для нормальных пространств (Антонян). Это последнее утвержденне доказывается довольно трудно с помощью интегрирования в Y. Теперь мы снова можем взять обратный спектр $\{U_\alpha, [i_{\alpha, \alpha'}]\}$ из инвариантных открытых окрестностей типа $\mathscr{F}_\sigma$ в W. Он будет ассоциирован с X и будем состоять из абсолютных эквивариантных окрестностных экстензоров, являющихся p-паракомпактными.

Заметим, что здесь мы имеем некоторый дефект, заключающийся в том, что объекты спектра U_α не бикомпактны. Получить бикомпактные окрестности, являющиеся абсолютными окрестностными ретрактами, нам на этом пути не удалось. Но для получения спектральных функторов это не страшно. В дальнейшем мы сформулируем один результат Антоняна, устраняющий этот дефект, но на другом пути.

Р) Наконец, пусть X — произвольное p-паракомпактное пространств с непрерывным действием группы G, являющейся бикомпактом. Тогда можно показать, следуя обычным образцам, что X эквивариантно вкладывается в произведение $Y \times B$, где Y — метризуемо, а B — бикомпакт (действие на произведении — по-координатное — Смирнов. Тогда, согласно предыдущему, можно вложить Y в метризуемый абсолютный ретракт M класса метризуемых пространств, а B — в бикомпактный абсолютный окрестностный ретракт

W класса бикомпактов. Таким образом мы получили эквивариантное вложение $X \subset_{\to} M \times W$, где $M \times W$ будет p-паракомпактным пространством и абсолютным ретрактом класса p-паракомпактных пространств — в эквивариантном смысле (Смирнов). Таким образом снова спектр $\{U_\alpha, [i_{\alpha, \alpha'}]\}$ из инвариантных окрестностей, открытых и типа $\mathscr{F}_\sigma$, будет ассоциирован с X и будет состоять из эквивариантных абсолютных окрестностных ретрактом категории p-паракомпактных пространств.

А) Наконец приведем обещанную теорему Антоняна:

Всякий бикомпакт X с непрерывным действием бикомпактной группы G является пределом обратного спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha, \alpha'}\}$, в котором все X_α являются метризуемыми бикомпактами и эквивариантными абсолютными окрестностными ретрактами класса бикомпактов.

Методом Мердешича можно показать, что в этом случае спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha,\alpha'}\}$ ассоциирован с X (Смирнов). Таким образом, дефект в построении теории шейпов для бикомпактов исправляется. Итак, мы имеем эквивариантную теорию шейпов в следующих случаях (но на самом деле одну и ту же): для метризуемых бикомпактов, для метризуемых пространств, для бикомпактов, для p-паракомпактных пространств.

Проблема. *Обладает ли всякое p-паракомпактное пространство ассоциированным спектром из метризуемых* ANR?

Московский государственный университет
113 256 Москва СССР

Поступила 21. 5. 1983