Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ГЕОМЕТРИЯ ПОЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ВЕКТОРОВ В ТРЕХМЕРНОМ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. БУРДУН, А. МАТЕЕВ

1. Уравнения инфинитезимальных смещений репера. Структурные уравнения. Уравнения смещений репера $(M, \mathbf{e}_i)$, $(i, j, k=0, 1, 2)$ пространства R_1^3 имеют вид

(1.1) $$d\mathbf{M}=\omega e, \quad de=\tilde{\omega}e,$$

где

(1.2) $$\omega=(\omega^0\omega^1\omega^2), \qquad e=\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\omega}=(\omega_i^j).$$

Формы ω^i, ω_i^j подчинены структурным уравнениям

(1.3) $$D\omega^i=\omega^j\wedge\omega_j^i, \quad D\omega_i^j=\omega_i^k\wedge\omega_k^j.$$

Переходя от матриц (1.2) к трансформированным e^t, ω^t, $\tilde{\omega}^t$, уравнения (1.1) можем записать

(1.4) $$d\mathbf{M}=e^t\omega^t, \quad de^t=e^t\tilde{\omega}^t.$$

Векторы репера $(M, \mathbf{e}_i)$ в R_1^3 удовлетворяют условиям ортонормированности

(1.5) $$ee^t=h=\mathrm{diag}\,(-1, 1, 1).$$

Дифференцируя равенство (1.5) с учетом уравнений (1.1) и (1.4), получим $\tilde{\omega}h+h\tilde{\omega}=0$, или в подробной записи, $\omega_0^0=\omega_1^1=\omega_2^2=0$, $\omega_1^2+\omega_2^1=0$, $\omega_0^1-\omega_1^0=0$, $\omega_0^2-\omega_2^0=0$.

Перейдем от репера $(M, \mathbf{e}_i)$ к реперу $(M, \mathbf{a}_i)$, содержащему изотропный вектор, по формулам

(1.6) $$a=Ae,$$

где

$$a=\begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения инфинитезимальных смещений репера $(M, \mathbf{a}_i)$ имеют вид

$$(1.7)\qquad d\mathbf{M}=\theta a,\quad da=\widetilde{\theta}a,$$

где $\theta=(\theta^0\theta^1\theta^2)$, $\widetilde{\theta}=(\theta^j_i)$, или $d\mathbf{M}=a^t\theta^t$, $da^t=a^t\widetilde{\theta}^t$, и формы θ^i, θ^j_i удовлетворяют структурным уравнениям $D\theta^i=\theta^j\wedge\theta^i_j$, $D\theta^j_i=\theta^k_i\wedge\theta^j_k$.

Сравнивая правые части (1.4,1) и (1.7,1), получим с учетом формулы (1.6), $\omega=\theta A$, $\theta=\omega A^{-1}$, или $\omega^0=\theta^0$, $\omega^1=\theta^0+\theta^1$, $\omega^2=\theta^2$; $\theta^0=\omega^0$, $\theta^1=\omega^1-\omega^0$, $\theta^2=\omega^2$.

Условия ортонормированности векторов репера $(M, \boldsymbol{a}_i)$

$$(1.8)\qquad \widetilde{h}=aa^t=AhA^t=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

На формы θ^j_i накладываются следующие зависимости $\widetilde{\theta}\,\widetilde{h}+\widetilde{h}\theta^t=0$, или $\theta^1_0=\theta^2_2=0$, $\theta^2_0+\theta^1_2=\mathbf{0}$, $\theta^1_1+\theta^0_0=0$, $\theta^1_1+\theta^2_1=0$, $\theta^2_1+\theta^1_2+\theta^0_2=0$. Подставив a из формул (1.6) в уравнение (1.7, 2), получим с учетом (1.1,2) связь между формами $\widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\theta}$

$$\widetilde{\theta}=A\widetilde{\omega}A^{-1},$$

или $\theta^0_0=\omega^1_0$, $\theta^2_0=\omega^2_1+\omega^2_0$, $\theta^0_1=\omega^1_0$, $\theta^1_1=-\omega^1_0$, $\theta^2_1=\omega^2_1$, $\theta^0_2=\omega^2_0$, $\theta^1_2=-\omega^2_1-\omega^2_0$.

2. Уравнения поля изотропного вектора $\mathbf{a}_0$. Полная система инвариантов первой дифференциальной окрестности. Изучим некоторые факты дифференциальной геометрии поля изотропного вектора $\mathbf{a}_0$. Неподвижность точки с закрепленным вектором $\mathbf{a}_0$, как видно из уравнений (1.7), обеспечивается равенствами

$$(2.1)\qquad \theta^i=\theta^0_0=\theta^2_0=0.$$

Отсюда видно, что формы θ^i, θ^p_0 $(p, q, r=0, 2)$ для рассматриваемого геометрического образа являются главными. Приняв θ^i за базисные формы, получим уравнения

$$(2.2)\qquad \theta^p_0=l^p_{0i}\theta^i.$$

Продолжив уравнения (2.2), имеем

$$(2.3)\qquad (dl^p_{0i}+l^q_{0i}\theta^p_q-l^p_{0j}\theta^j_i)\wedge\theta^i=0.$$

Уравнения (2.2) и (2.3) являются дифференциальными уравнениями изучаемого векторного поля $\{\mathbf{a}_0\}$.

Раскрывая уравнения (2.3) по лемме Картана, получим

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} dl^0_{00}+l^2_{00}\theta^0_2&=l^0_{02}l^2_{0i}\theta^i,\\ dl^2_{00}&=[l^2_{00}l^0_{0i}+(l^2_{02}-l^0_{00})l^2_{0i}]\theta^i,\\ dl^2_{02}-l^2_{00}\theta^0_2&=-(l^0_{02}+l^2_{01})l^2_{0i}\theta^i,\\ dl^0_{01}+(l^2_{01}+l^0_{02})\theta^0_2&=[l^0_{02}l^2_{0i}+(2l^0_{00}-l^0_{01})l^0_{0i}]\theta^i,\end{aligned}$$

$$dl^0_{02}+(l^2_{02}-l^0_{00})\theta^0_2=(l^0_{01}l^2_{0j}-l^0_{02}l^0_{0i})\theta^i,$$

$$dl^2_{01}+l^2_{02}\theta^0_2=[(l^2_{00}-l^2_{01})l^0_{0i}+l^2_{02}l^2_{0i}]\theta^i.$$

Из системы уравнений (2.4) при $\theta^i=0$ находим систему абсолютных инвариантов поля $\{\mathbf{a}_0\}$

$$I_1=l^0_{00}+l^2_{02}, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= 8l^2_{00}l^2_{02}l^0_{01}(l^0_{02}+l^2_{01})-4l^0_{00}l^2_{00}l^0_{01}(l^0_{02}+l^2_{01}) \\ &-\frac{16}{9}(l^2_{00}(l^0_{02}+l^2_{01})^3+6(l^2_{00}l^0_{01})^2-\frac{4}{9}l^0_{01}(l^0_{00}-2l^2_{02})^3 \\ &-\frac{2}{9}(l^0_{00}-2l^2_{02})^2(l^0_{02}+l^2_{01})^2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$I_3=2(l^0_{00}+l^2_{02})[l^2_{02}l^0_{02}+(l^0_{00}-l^2_{02})l^2_{01}]-l^2_{00}(l^0_{02}-2l^2_{01})^2, \tag{2.7}$$

$$I_4=l^0_{00}l^2_{02}-l^2_{00}l^0_{02}, \tag{2.8}$$

$$I_5=l^2_{00}. \tag{2.9}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Система инвариантов I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 является полной системой инвариантов первой дифференциальной окрестности изотропного векторного поля* $\{\mathbf{a}_0\}$.

В самом деле, система уравнений (2.4) состоит из шести уравнений на шесть функций l^p_{0i} и содержит одну вторичную форму θ^0_2. Следовательно, полная система должна содержать пять инвариантов. Нужно показать, что найденные инварианты функционально независимы, т. е., что

$$\operatorname{rang}\left\| \frac{\partial Ia}{\partial l^p_{0i}} \right\|=5, \quad (a=1,\ldots,5), \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial(I_5,\ I_1,\ I_4,\ I_3,\ I_2)}{\partial(l^0_{00},\ l^2_{00},\ l^2_{02},\ l^0_{02},\ l^2_{01},\ l^0_{01})}=\left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l^2_{02} & -l^0_{02} & l^0_{00} & -l^2_{00} & 0 & 0 \\ A & B & C & D & E & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & D_1 & E_1 \end{matrix} \right\|, \tag{2.11}$$

где A, B C, D, A_1, B_1, C_1, D_1 — некоторые многочлены от l^p_{0i} и

$$E=2[(l^0_{00})^2-(l^2_{02})^2],$$

$$E_1=8l^2_{00}l^2_{02}(l^2_{02}+l^2_{01})-4l^0_{00}l^2_{00}(l^0_{02}+l^2_{01}) +12l^0_{01}(l^2_{00})^2-\frac{4}{9}(l^0_{00}-2l^2_{02})^3.$$

Видно, что в матрице (2.11) существует 5×5 определитель

$$\Delta=-l^2_{02}EE_1\neq0,$$

следовательно, ранг матрицы (2.11) равен пяти, и система инвариантов функционально независима, значит, и полна.

3. Линии, присоединенные к полю вектора $\mathbf{a}_0$. Произвольную кривую в R_1^3 можно задать уравнениями [1]

$$\theta^i = \mu^i\theta, \tag{3.1}$$

где θ — параметрическая форма $D\theta = \theta \wedge \theta_1$.

Кривые в R_1^3, заданные уравнениями (3.1), (2.2), назовем кривыми, присоединенными к полю вектора $\mathbf{a}_0$. Продолжив систему (3.1), получим с учетом (2.2)

$$\begin{gathered} d\mu^1 - \mu^1\theta_1 = \mu_1^1\theta + \mu^1\theta_0^0 + \mu^2\theta_0^2, \\ d\mu^2 - \mu^1\theta_2^0 - \mu^2\theta_1 = \mu_1^2\theta - (\mu^0 + \mu^1)\theta_0^2, \\ d\mu^0 - \mu^2\theta_2^0 - \mu^0\theta_1 = \mu_1^0\theta - \mu^0\theta_0^0 - \mu^1\theta_1^0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Из системы (3.2) видно, что величины (μ^i) образуют относительный тензор [2], величины $j_1 = \mu^1$, $j_2 = 2\mu^0\mu^1 + (\mu^1)^2 + (\mu^2)^2$ являются относительными инвариантами, а $j = j_1 : (j_2)^{1/2}$ абсолютным инвариантом кривой (3.1), присоединенной к полю $\{\mathbf{a}_0\}$.

Единичный вектор касательной кривой (3.1)

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} = \frac{\mu^i\mathbf{a}_i}{(j_2)^{1/2}}$$

и вектор первой кривизны этой кривой

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\mu^i\mathbf{a}_i}{(j_2)^{1/2}}\right). \tag{3.3}$$

Рассмотрим некоторые классы линий (3.1), инвариантно связанные с полем $\{\mathbf{a}_0\}$.

Если относительные инварианты $j_1 \neq 0$, $j_2 \neq 0$, то кривые называются кривыми общего положения [3].

Если $j_1 = 0$, $j_2 \neq 0$, то вдоль кривой

$$d\mathbf{M} \,.\, \mathbf{a}_0 = \theta^1 = 0, \tag{3.4}$$

т. е., векторы касательных к линии в каждой точке пространства ортогональны (в смысле метрики (1.8)) вектору поля $\mathbf{a}_0$. Такие кривые называются ортогональными траекториями поля $\{\mathbf{a}_0\}$.

Положив

$$j_1 = 0, \quad j_2 = 0, \tag{3.5}$$

получим

$$\mu^1 = \mu^2 = 0. \tag{3.6}$$

На μ^0 никакие условия не накладываются.

Для того чтобы уравнения (3.1) задавали кривую при условиях (3.5), потребуем, чтобы

$$\mu^0 \neq 0. \tag{3.7}$$

Из уравнений (3.2) при условиях (3.7) следует, что μ^0 является относительным инвариантом.

Кривые (3.1), (2.2), удовлетворяющие условиям (3.5), (3.7), называются линиями тока поля $\{\mathbf{a}_0\}$.

Кривые общего положения, для которых абсолютный инвариант

$$j = \text{const}, \tag{3.8}$$

назовем линиями постоянного отклонения.

4. Нормальная кривизна поля. Главные кривизны поля $\{\mathbf{a}_0\}$. Нормальной кривизной поля $\{\mathbf{a}_0\}$ назовем скалярное произведение вектора первой кривизны линии постоянного отклонения на вектор поля.

Умножив вектор (3.3) скалярно на $\mathbf{a}_0$, получим

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_0 = \frac{d}{ds}\left(\frac{\mu^1}{(j_2)^{1/2}}\right) + \frac{\mu^k \theta_k^1}{ds(j_2)^{1/2}}. \tag{4.1}$$

Отсюда, с учетом условия (3.8), имеем выражение для нормальной кривизны поля

$$k_n = -\frac{(\mu^1 l_{0i}^0 + \mu^2 l_{0i}^2)\mu^i}{2\mu^0\mu^1 + (\mu^1)^2 + (\mu^2)^2} \tag{4.2}$$

Найдем стационарные значения нормальной кривизны k_n. Формулу (4.2) перепишем в виде

$$k_n(2\mu^0\mu^1 + (\mu^1)^2 + (\mu^2)^2 + (\mu^1 l_{0i}^0 + \mu^2 l_{0i}^2)\mu^i = 0. \tag{4.3}$$

Для нахождения стационарных значений k_n продифференцируем (4.3) по μ^i, полагая $\frac{\partial k_n}{\partial \mu^i} = 0$,

$$\begin{gathered}
(l_{00}^0 + 2k_n)\mu^1 + l_{00}^2\mu^2 = 0, \\
(l_{00}^0 + 2k_n)\mu^0 + 2(l_{01}^0 + k_n)\mu^1 + (l_{02}^0 + l_{01}^2)\mu^2 = 0, \\
l_{00}^2\mu^0 + (l_{02}^0 + l_{01}^2)\mu^1 + 2(l_{02}^2 + k_n)\mu^2 = 0.
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Приравняв определитель системы (4.4) нулю, получим

$$k_n^3 - Hk_n^2 + Pk_n - K = 0. \tag{4.5}$$

Корни уравнения (4.5) являются главными кривизнами поля $\{\mathbf{a}_0\}$, а H, P и K называются соответственно средней, смешанной и полной кривизной поля. Они равны

$$H = -(l_{00}^0 + l_{02}^2),$$

$$P = l_{00}^0 l_{02}^2 - \frac{1}{2} l_{00}^2(l_{02}^0 + l_{01}^2) + \frac{1}{4}[(l_{00}^0)^2 + (l_{00}^2)^2],$$

$$K = \frac{1}{4}[l_{00}^0 l_{00}^2(l_{02}^0 + l_{01}^2) - (l_{00}^0)^2 l_{02}^2 - (l_{00}^2)^2 l_{01}^0].$$

Величины H, P, K — абсолютные инварианты поля $\{\mathbf{a}_0\}$.

5. Гауссова кривизна ортогональных траекторий поля $\{\mathbf{a}_0\}$. При условиях (3.4) из уравнений (1.7) следует, что $d\mathbf{M}=\theta^0\mathbf{a}_0+\theta^2\mathbf{a}_2$, $d\boldsymbol{\theta}_0=\theta_0^0\mathbf{a}_0+\theta_0^2\mathbf{a}_2$. Отсюда элемент площади ортогональных траекторий $dS=\theta^0\wedge\theta^2$ и элемент площади ее аналога сферического отображения $dS'=\theta_0^0\wedge\theta_0^2$. Гауссову кривизну ортогональных траекторий определим, как

$$K_g=\frac{dS'}{dS}=\frac{\theta_0^0\wedge\theta_0^2}{\theta^0\wedge\theta^2}. \tag{5.1}$$

Вычислив (5.1) с учетом (2.2), получим $K_g=l_{00}^0l_{02}^2-l_{02}^0l_{00}^2$, а это и есть инвариант (2.8), т. е. $K_g=I_4$.

6. Семейство поверхностей, ортогональных полю $\{\mathbf{a}_0\}$. **Нормальное поле**. Если уравнение (3.4) вполне интегрируемо, множество ортогональных траекторий поля расслаивается на однопараметрическое семейство поверхностей.

Векторное поле, допускающее семейство ортогональных поверхностей, называется нормальным.

Условие полной интегрируемости уравнения $\theta^1=0$ имеет вид $D\theta^1\wedge\theta^1=0$, или, с учетом (2.2),

$$l_{00}^2=0. \tag{6.1}$$

При условиях (3.4) и (6.1) из формулы (4.2) следует, что нормальная кривизна поверхности одинакова во всех направлениях и равна $k_n=-l_{02}^2$.

При условии (6.1) уравнение (4.5) для определения главных кривизн поля имеет вид: $(2k_n+l_{00}^0)^2(k_n+l_{02}^0)=0$. Следовательно, главные кривизны нормального поля $k_{n(1,2)}=-\frac{1}{2}l_{00}^0$, $k_{n(3)}=-l_{02}^2$, а $H_n=-(l_{00}^0+l_{02}^2)$, $P_n=l_{00}^0l_0^{22}+\frac{1}{4}(l_{00}^0)^2$, $K_n=l_{02}^2(l_{00}^0)^2$.

7. Линии тока поля $\{\mathbf{a}_0\}$. **Геодезическое поле.** Вдоль линии (3.1) уравнения перемещений репера (1.7) с учетом условий (3.6), (3.7) и уравнений (2.2) имеют вид $d\mathbf{M}=\theta\mu^0\mathbf{a}_0$, $d\mathbf{a}_0=(l_{00}^0\mathbf{a}_0+l_{00}^2\mathbf{a}_2)\theta\mu^0$.

Следовательно, вектор первой кривизны линии тока

$$\mathbf{k}=\frac{d\mathbf{a}_0}{\theta\mu^0}=l_{00}^0\mathbf{a}_0+l_{00}^2\mathbf{a}_2, \tag{7.1}$$

а скалярный квадрат вектора первой кривизны — абсолютный инвариант $\mathbf{k}^2=(l_{00}^2)^2=I_5^2$.

Линия в пространстве аффинной связности называется геодезической, если вдоль нее $d\boldsymbol{\tau}$ параллелен $\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — вектор касательной к кривой.

В нашем случае условие геодезичности линии тока поля $\{\mathbf{a}_0\}$

$$\frac{d\mathbf{a}_0}{\theta\mu^0}=\lambda\mathbf{a}_0. \tag{7.2}$$

Сравнение равенств (7.1), (7.2) дает условие того, чтобы линия тока была геодезической

$$l_{00}^2=0, \tag{7.3}$$

Поле вектора называется геодезическим, если его линии тока геодезические.

Таким образом, условие (7.3) является условием геодезичности поля $\{\mathbf{a}_0\}$. Оно совпадает с условием (6.1) нормальности этого поля. Это одна из особенностей поля изотропных векторов.

Требование, чтобы вектор кривизны (7.1) линии тока обращался в нуль-вектор, более сильное, чем требование (7.2). Такое векторное поле, для которого $\mathbf{k}=\mathbf{0}$ назовем s-геодезическим.

Условия s-геодезичности поля $\{\mathbf{a}_0\}$

$$l_{00}^0=0, \quad l_{00}^2=0.$$

Отсюда видно, что s-геодезическое поле всегда геодезическое, а нормальное (геодезическое) поле s-геодезическим может и не быть.

Легко проверяется, что полная и смешанная кривизны для s-геодезического поля равны нулю, а средняя кривизна $H=-l_{02}^0$.

8. Кинематическая характеристика некоторых инвариантов поля $\{\mathbf{a}_0\}$. Найдем обобщение дифференциального оператора Гамильтона в подвижном репере [4].

Предположим, что градиент некоторой функции f

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f=\nabla f=q^i\mathbf{a}_i.$$

Так как $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\,.\,d\mathbf{M}=df$, то $df=q^1\theta^0+(q^0+q^1)\theta^1+q^2\theta^2$.

Отсюда

$$q^0=\Phi^{-1}(\theta^1\wedge\theta^2+\theta^2\wedge\theta^0)\wedge df, \quad q^1=\Phi^{-1}(\theta^1\wedge\theta^2\wedge df), \; q^2=\Phi^{-1}(\theta^0\wedge\theta^1\wedge df),$$

где $\Phi=\theta^0\wedge\theta^1\wedge\theta^2$. И тогда

$$\nabla=\Phi^{-1}[(\theta^1\wedge\theta^2+\theta^2\wedge\theta^0)\mathbf{a}_0+(\theta^1\wedge\theta^2)\mathbf{a}_1+(\theta^0\wedge\theta^1)\mathbf{a}_2]\wedge d.$$

Действуя оператором ∇ на вектор $\mathbf{a}_0$ скалярно, получаем $\operatorname{div}\mathbf{a}_0=\nabla\,.\,\mathbf{a}_0=l_{00}^0+l_{02}^2$. Значит $\operatorname{div}\mathbf{a}_0=-H$.

Действуя оператором на $\mathbf{a}_0$ внешне, получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}_0=\nabla\wedge\mathbf{a}_0=l_{00}^0\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_0+(l_{00}^2-l_{01}^2+l_{02}^0)\mathbf{a}_2\wedge\mathbf{a}_0+l_{00}^2\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2, \tag{8.1}$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a}_0)^2=(l_{00}^0)^2+(l_{00}^2)^2+2l_{00}^2(l_{02}^0-l_{01}^2)$$

абсолютный инвариант.

Из равенства (8.1) видно, что условием нормальности поля является требование $\operatorname{rot}\mathbf{a}_0\wedge\mathbf{a}_0=0$.

Поле $\{\mathbf{a}_0\}$ назовем безвихревым, если $\operatorname{rot}\mathbf{a}_0=0$. Из равенства (8.1) следует, что необходимыми и достаточными условиями того, чтобы поле было безвихревым, являются

$$l_{00}^0=0, \quad l_{00}^2=0, \quad l_{02}^0-l_{01}^2=0. \tag{8.2}$$

Сравнивая условия (8.2) с условием (6.1) нормальности (геодезичности) поля, видим, что нормальное (геодезическое) поле может быть вихревым. Это является особенностью изотропного поля, потому что для обыкновенных полей условия нормальности и геодезичности влекут условия безвихревости поля.

9. О полных системах инвариантов частных классов инвариантно выделенных полей. Приведенная в п. 2 полная система инвариантов первой дифференциальной окрестности поля $\{\mathbf{a}_0\}$ обладает тем свойством, что из нее получаются полные системы инвариантов для частных классов полей.

Так, нормальное (геодезическое) поле $\{\mathbf{a}_0\}$ выделяется условием $I_5=l^2_{00}=0$.

Полагая в системе (2.5)—(2.9) $l^2_{00}=0$, получим следующую полную систему инвариантов для нормального (геодезического) поля

$$\tag{9.1} \begin{gathered} \widetilde{I}_1=l^2_{02}, \quad \widetilde{I}_2=2(2l^2_{02}-l^0_{00})l^0_{01}-(l^0_{02}+l^2_{01})^2, \\ \widetilde{I}_3=l^2_{02}l^0_{02}+(l^0_{00}-l^2_{02})l^2_{01}, \quad \widetilde{I}_4=l^0_{00}. \end{gathered}$$

Поле, $\{\mathbf{a}_0\}$ нормальное и s-геодезическое выделяется инвариантными условиями $I_5=l^2_{00}=0$, $\widetilde{I}_4=l^0_{00}=0$, и полная система для такого поля получается из (9.1)

$$\tag{9.2} \widehat{I}_1=l^2_{02}, \quad \widehat{I}_2=4l^0_{01}l^2_{02}-(l^0_{02}+l^2_{01})^2, \quad \widehat{I}_3=l^0_{02}-l^2_{01}.$$

Безвихревое поле $\{\mathbf{a}_0\}$ из более общего нормального и s-геодезического выделяется условием $\widehat{I}_3=l^0_{02}-l^2_{01}=0$, и полная система инвариантов получается при этом условии из (9.2) в виде $\check{I}_1=l^2_{02}$, $\check{I}_2=l^0_{01}l^2_{02}-(l^0_{02})^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Ф. Лаптев. Распределение касательных элементов. *Труды геом. семинара ВИНИТИ АН СССР*, **3**, Москва, 1971, 29—48.
2. Г. Ф. Лаптев, Н. М. Остиану. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. *Труды геом. семинара ВИНИТИ АН СССР*, **3**, Москва, 1971, 49—94.
3. В. И. Близникас. О неголономной поверхности трехмерного пространства проективной связности. *Труды геом. семинара ВИНИТИ АН СССР*, **3**, Москва, 1971, 115—124.
4. С. С. Бюшгенс. *Уч. зап. МГУ, матем.*, **148**, 1951, № 4.

Поступила 13. 6. 1983

СССР, Минск
Белорусский гос. ун-тет

Мех.-мат. факультет
Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373