Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

EINFACH-KORRELIERTE ABGANGSINTERVALLE IN VERLUSTSYSTEMEN

WALTER WARMUTH

In dieser Note wird die Abhängigkeitsstruktur des Abgangsprozesses der bedienten Forderungen in einem GI/M/1/0-Verlustsystem durch die Autokorrelation aufeinanderfolgender Zwischenabgangsintervalle beschrieben. Für Erlang-k-verteilte Zwischenankunftsintervalle ist die Autokorrelation nicht positiv. Extrempunkte ergeben sich bei Poissonschem Eingangsprozeß (GI=M) und für den regulären Eingangsprozeß (GI=D). In Burke (1972) wurde auf der Basis von Simulationsergebnissen die Kleinheit der Autokorrelationen beliebiger Ordnung für Abgangsprozesse postuliert. Für die hier behandelten einlinigen Verlustsysteme wird das bei nicht extremer Belastung theoretisch belegt. Eine Approximation durch rekurrente Prozesse läßt sich vernünftig vornehmen. Bei „fast" regulärem Eingangsprozeß und geringer Belastung ist die Autokorrelation hingegen sehr groß.

Es wird vorausgesetzt, daß sich das Bedienungssystem GI/M/1/0 im statistischen Gleichgewicht befindet. Dieser Gleichgewichtszustand existiert und ist eindeutig [3, 2.3.5.]. Der Eingangsprozeß besitze keine Mehrfachpunkte. Unter diesen Bedingungen ist der Abgangsprozeß der bedienten Forderungen ein stationärer einfacher Punktprozeß. Er ist durch die stationäre Folge (D_n), wobei $D_n>0$ die Länge des n-ten Zwischenabgangsintervalles bezeichnet, bestimmt; Null ist ein Punkt des Abgangsprozesses.

Die Laplace-Stieltjes-Transformierte der Zwischenankunftsverteilung sei $\alpha_1(s)$, der Mittelwert dieser Verteilung sei α und die Varianz σ_A^2. D_n ist die Summe der Freizeit I_n und der realisierten Bedienungszeit S_n, deren Intensität μ ist; $\lambda=1/\alpha$, $\rho=\lambda/\mu$.

1. Der Autokorrelationskoeffizient des Abgangsprozesses der bedienten Forderungen im System GI/M/1/0. Der Abgangsprozeß der bedienten Forderungen im System $GI/GI/1/0$ ist ein spezieller 1-abhängiger Prozeß (1-fach abhängig). Für die Autokorrelationskoeffizienten

$$a_{i,\, GI/GI/1/0}=\mathrm{COV}(D_n, D_{n+i})/\mathrm{VAR}\, D_n$$

gilt $a_i=0$ falls $i\geqq 2$ (einfach-korreliert) und somit auch

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,\, GI/GI/1/0}=a_{1,\, GI/GI/1/0} \quad [5].$$

Wie in [6] berechnen wir zunächst $\mathsf{E}D_nD_{n+1}$:

$$\mathsf{E}\, D_nD_{n+1}=\mathsf{E}\, D_n(I_{n+1}+S_{n+1})=\mathsf{E}\, D_nI_{n+1}+\mathsf{E}\, D_nS_{n+1}=\mathsf{E}\, D_nI_{n+1}+\mathsf{E}\, D_n\mathsf{E}\, S_{n+1}.$$

Durch Multiplikation der Identität $\mathsf{E}\, D_{n+1}=\mathsf{E}\,(I_{n+1}+S_{n+1})$ mit $\mathsf{E}\, D_n$ erhalten wir $\mathsf{E}\, D_n\mathsf{E}\, D_{n+1}=\mathsf{E}\, D_n\mathsf{E}\, I_{n+1}+\mathsf{E}\, D_n\mathsf{E}\, S_{n+1}$. Somit ergibt sich $\mathsf{E}\, D_nD_{n+1}-\mathsf{E}\, D_n\mathsf{E}\, D_{n+1}=\mathsf{E}\, D_nI_{n+1}-\mathsf{E}\, D_n\mathsf{E}\, I_{n+1}$, d. h.,

$$\mathrm{COV}(D_n, D_{n+1})=\mathrm{COV}(D_n, I_{n+1}).$$

Für exponentielle Bedienungszeiten ergibt sich

$$\mathsf{E}\, I_{n+1}=(\mu/\lambda-(1-\alpha_1(\mu)))/(\mu(1-\alpha_1(\mu))),$$
$$\mathsf{E}\, D_n=\mathsf{E}\, S_n+\mathsf{E}\, I_n=1/(\lambda(1-\alpha_1(\mu)))$$

und

$$\mathsf{E} D_n I_{n+1}=(-\mu^2/\lambda\alpha_1'(\mu)-(1-\alpha_1(\mu))^2+\mu/\lambda(\mu/\lambda-(1-\alpha_1(\mu))))/(\mu^2(1-\alpha_1(\mu))^2)\,(\text{vgl. [4]}).$$

Daraus folgt dann $\mathrm{COV}(D_n, D_{n+1})=-(\alpha_1'(\mu)/(\lambda(1-\alpha_1(\mu))^2)+1/\mu^2)$. Zusammen mit $\mathrm{VAR}\, D_n=(\sigma_A^2+\lambda^{-2})/(1-\alpha_1(\mu))+2\mu^{-2}-(\lambda(1-\alpha_1(\mu)))^2$ erhalten wir

$$a_{1,\, GI/M/1/0}=\frac{-\lambda\mu^2\alpha_1'(\mu)-\lambda^2(1-\alpha_1(\mu))^2}{(\sigma_A^2\lambda^2+1)\,(1-\alpha_1(\mu))\mu^2+2\lambda^2(1-\alpha_1(\mu))^2-\mu^2}. \tag{1}$$

2. Der Autokorrelationskoeffizient des Abgangsprozesses der bedienten Forderungen im System $E_k/M/1/0$. Für einen rekurrenten Eingangsprozeß mit Erlang-k-verteilten Pausen gilt $\alpha_{1,\, E_k}(s)=(\lambda k/(s+\lambda k))^k$, $\alpha'_{1,\, E_k}(s)=-(k(\lambda k)^k)/((s+\lambda k)^{k+1})$ und $\lambda=1/\alpha$, $\sigma_A^2=\alpha^2/k=1/(k\lambda^2)$.

Aus (1) erhält man

$$a_{1,\, E_k(M)1/0}(\rho)=-\frac{\rho^2((1+\rho k)^k-(\rho k)^k)^2-(\rho k)^{k+1}(1+\rho k)^{k-1}}{2\rho^2((1+\rho k)^k-(\rho k)^k)^2-(\rho k)^k(1+\rho k)^k(1+1/k)+1/k(1+\rho k)^{2k}} \tag{2}$$

2.1. *Für $\rho \in (0, \infty)$ gilt $a_{1,\, E_k/M/1/0}=0$ falls $k=1$ und $a_{1,\, E_k/M/1/0}<0$ falls $k>1$.*

Beweis. 1. $a_{1,\, E_k/M/1/0}=0$ für $k=1$ ergibt sich unmittelbar (vgl. auch [4])

2. Wir zeigen für $k>1$, daß $\rho^2((1+\rho k)^k-(\rho k)^k)^2-(\rho k)^{k+1}(1+\rho k)^{k-1}$ und $2\rho^2((1+\rho k)^k-(\rho k)^k)^2-(\rho k)^k(1+\rho k)^k(1+1/k)+1/k(1+\rho k)^{2k}$ positiv sind. Es gilt

$$\begin{aligned}
&(\rho^2((1+\rho k)^k-(\rho k)^{K2})/((\rho k)^{k+1}(1+\rho k)^{k-1})\\
&=\rho^2((1+\rho k)^{k+1}/(\rho k)^{k+1}-2(1+\rho k)/(\rho k)+(\rho k)^{k-1}/(1+\rho k))^{k-1})\\
&=\rho^2((1+1/(\rho k))^{k+1}-2(1+1/(\rho k))+(1+1/(\rho k))^{-(k-1)})\\
&=\rho^2(1+(k+1)/(\rho k)+(k+1)k/2!\,(1/(\rho k))^2+(k+1)k(k-1)/3!\,(1/(\rho k))^3\\
&\quad+\cdots+1-(k-1)/(\rho k)+(k-1)k/2!\,(1/(\rho k))^2-(k-1)k(k+1)/3!\,(1/(\rho k))^3\\
&\quad+\cdots-2-2/(\rho k))>\rho^2(1/\rho^2)=1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die erste Ungleichung. Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
&2\rho^2((1+\rho k)^k-(\rho k)^k)^2/((\rho k)^k(1+\rho k)^k(1+1/k))\\
&\quad+1/k(1+\rho k)^{2k}/((\rho k)^k(1+\rho k)^k(1+1/k)\\
&=2\rho^2/(1+1/k)\,((1+1/(\rho k))^k-2+(1+1/(\rho k))^{-k})+(1/k)/(1+1/k)\,(1+1/(\rho k))^k\\
&>2\rho^2/(1+1/k)\,(1+k/(\rho k)+k(k-1)/2!\,(1/(\rho k))^2\\
&\quad+k(k-1)(k-2)/3!\,(1/(\rho k))^3+1-k/(\rho k)+k(k+1)/2!\,(1/(\rho k))^2\\
&\quad-k(k+1)(k+2)/3!\,(1/(\rho k))^3-2)+(1/k)/(1+1/k)\,(1+1/(\rho k))^k\\
&=2\rho^2/(1+1/k)\,(1/\rho^2-1/(k\rho^3))+(1/k)/(1+1/k)\,(1+1/(\rho k))^k\\
&=1/(1+1/k)\,(1+1/k+1-1/(\rho k)+1/k((1+1/(\rho k))^k-1-1/\rho)).
\end{aligned}$$

Wenn $1+1/k((1+1/(\rho k))^k-1-1/\rho)>1/(\rho k)$ ist, dann folgt die Behauptung. Es gilt

$$\rho(k-1-1/\rho)+\rho(1+1/(\rho k))^k$$
$$=\rho k-\rho-1+\rho+1+\rho\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}1/(\rho k)^i=\rho k+\rho\sum_{i=2}^{k}\binom{k}{i}1/(\rho k)^i$$
$$\geqq \rho k+\rho k(k-1)/2!\,(1/(\rho k))^2=\rho k+1/2(k-1)/(\rho k)$$
$$\geqq \rho k+1/2\,.\,1/(\rho k)>1.$$

3. Der Autokorrelationskoeffizient des Abgangsprozesses der bedienten Forderungen im System D/M/1/0 und weitere Eigenschaften. Für einen regulären Eingangsprozeß mit $\alpha_1(s)=\exp(-s\alpha)$, $\alpha_1'(s)=-\alpha\exp(-s\alpha)$ und $\lambda=1/\alpha$, $\sigma_A^2=0$ erhält man aus (1)

$$a_{1,\,D/M/1/0}(\rho)=-\frac{\rho^2(1-\exp(-1/\rho))^2-\exp(-1/\rho)}{2\rho^2(1-\exp(-1/\rho))^2-\exp(-1/\rho)}. \tag{3}$$

3.1. *Für* $\rho\in(0,\infty)$ *gilt* $a_{1,\,D/M/1/0}<0$.

B e w e i s. Wir zeigen, daß $\rho^2(1-\exp(-1/\rho))^2-\exp(-1/\rho)>0$ und $2\rho^2(1-\exp(-1/\rho))^2-\exp(-1/\rho)>0$ ist. Die zweite Ungleichung folgt aus der ersten. Es gilt

$$\rho(1-\exp(-1/\rho)/\exp(-1/(2\rho))=\rho(1-\exp(-1/(2\rho)))(1+$$
$$\exp(-1/(2\rho)))/\exp(-1/(2\rho))=\rho(1+\exp(1/(2\rho)))(1-\exp(-1/(2\rho)))$$
$$=\rho(1-\exp(-1/(2\rho))+\exp(1/(2\rho))-1)=2\rho\sinh(1/(2\rho))$$
$$=2\rho(1/(2\rho)+(1/(2\rho))^3/3!\;+(1/(2\rho))^5/5!\;+\cdots)>1,$$

d. h., $\rho(1-\exp(-1/\rho))>\exp(-1/(2\rho))$ und somit auch $\rho^2(1-\exp(-1/\rho))^2-\exp(-1/\rho)>0$.

Dividiert man Zähler und Nenner von (2) durch $(1+\rho k)^{2k}$, dann überzeugt man sich unmittelbar von der Gültigkeit von

3.2. $\lim a_{1,\,E_k(M)1/0}(\rho)=a_{1,\,D(M)1/0}(\rho)$.

3.3. *Es gilt* $a_{1,\,E_k(M)1/0}>a_{1,\,E_{k+1}(M)1/0}$.

Zum Beweis benötigen wir einige eigenständignützliche Eigenschaften.

3.4. $\mathsf{E}\,D_{n,\,E_k(M)1/0}=1/(\lambda(1-\alpha_{1,\,E_k}(\mu)))$ *fällt in* k.

B e w e i s. Die Ableitung von $\alpha_{1,\,E_k}(\mu)=(\lambda k/(\mu+\lambda k))^k$ nach k ist $(\rho k/(1+\rho k))^k(\ln(\rho k/(1+\rho k))+1/(1+\rho k))$. Sie kann nach oben durch $(\rho k/(1+\rho k))^k(\rho k/(1+\rho k)-1+1/(1+\rho k))=0$ abgeschätzt werden. $\alpha_{1,\,E_k}(\mu)$ fällt somit in k und also auch $\mathsf{E}\,D_{n,\,E_k(M)1/0}$.

3.5. $\mathrm{VAR}\,D_{n,\,E_k(M)1/0}=(\sigma_A^2+\lambda^{-2})/(1-\alpha_1(\mu))+2\mu^{-2}-(\lambda(1-\alpha_1(\mu)))^2$ *fällt in* k.

B e w e i s. ρ_A^2 fällt in k, somit fällt nach 3.4 der erste Term in k. Der dritte Term wächst betragsmäßig gemäß 3.4, folglich fällt $\mathrm{VAR}\,D_{n,\,E_k(M)1/0}$.

B e w e i s v o n 3.3. Es gilt $a_1=\mathrm{COV}(D_n,D_{n+1})/\mathrm{VAR}\,D_n$. Da nach 3.5 $\mathrm{VAR}\,D_{n,\,E_k(M)1/0}$ in k fällt, selbstverständlich positiv ist und $\mathrm{COV}(D_n,D_{n+1})$ nach 2.1 negativ ist, reicht es zu zeigen, daß $\mathrm{COV}(D_n,D_{n+1})$ betragsmäßig wächst. Da $\mathrm{COV}(D_n,D_{n+1})=-\alpha_1'(\mu)/(\lambda(1-\alpha_1(\mu))^2)-1/\mu^2$ ist, erweist es sich als hinreichend zu zeigen, daß der positive Term $-\alpha_1'(\mu)/(\lambda(1-\alpha_1(\mu))^2)$ in k fällt. Es gilt

$$-\alpha_1'(\mu)/(\lambda(1-\alpha_1(\mu))^2)=k(\lambda k)^k/(\mu+\lambda k)^{k+1}.\;1/(\lambda(1-(\lambda k)^k/(\mu+\lambda k)^k)^2)$$
$$=1/\lambda^2(\lambda k)^{k+1}(\mu+\lambda k)^{k-1}/((\mu+\lambda k)^k-(\lambda k)^k)^2$$

$$= 1/\lambda^2(\rho k)^{k+1}(1+\rho k)^{k-1}/((1+\rho k)^k-(\rho k)^k)^2$$
$$= 1/\lambda^2((1+1/(\rho k))^{k+1}-2(1+1/(\rho k))+(1+1/(\rho k))^{-(k-1)})^{-1}.$$

Wenn die Ableitung der Summe in der Klammer positiv ist, dann fällt $-\alpha_1'(\mu)/(\lambda(1-\alpha_1(\mu))^2)$ in k. Diese Ableitung ist gleich

$$(1+1/(\rho k))^{k+1}(\ln(1+1/(\rho k))+(k+1)(-\rho)/((1+1/(\rho k))(\rho k)^2))$$
$$+2\rho/(\rho k^2)+(1+1/(\rho k))^{1-k}(-\ln(1+1/(\rho k))+(1-k)(-\rho)/((1+1/(\rho k))(\rho k)^2)).$$

Sie ist immer positiv.

Bei Erlang-k-verteilten Zwischeneingangsintervallen gilt somit

$$0=a_{1,\,M(M)1/0}(\rho)>\alpha_{1,\,E_k(M)1/0}(\rho)>a_{1,\,E_{k+1}(M)1/0}(\rho)>$$
$$a_{1,\,D(M)1/0}(\rho)=\frac{\rho^2(1-\exp(-1/\rho))^2-\exp(-1/\rho)}{2\rho^2(1-\exp(-1/\rho))^2-\exp(-1/\rho)} \text{ für } k>1.$$

3.6. Bemerkung. $a_{1,\,D(M)1/0}(\rho)$ ist vermutlich auch scharfe untere Schranke für $a_{1,\,GI(M)1/0}(\rho)$, während $a_{1,\,GI(M)1/0}(\rho)$ für ein ρ auch Null sein kann, wenn der Eingangsprozeß nicht Poissonsch ist, z. B.

$$\alpha_1(s)=1/2((1+s)^{-1/2}+(1+s)^{-2}) \text{ (vgl. [2])}.$$

Tab. 1

Der Betrag der Autokorrelation $a_{1,\,E_k/M/1/0}$ für $k=1, 2, 3, 4, 5, 10, \infty$.

ρ \ k	1	2	3	4	5	10	∞
0,01	0	0,000185	0,000298	0,000399	0,000499	0,000998	0,500000
0,05	0	0,003467	0,006559	0,009320	0,011898	0,023759	0,500000
0,1	0	0,010105	0,020566	0,030463	0,039768	0,079842	0,498862
0,2	0	0,023397	0,048139	0,071238	0,902239	0,171101	0,453330
0,25	0	0,028571	0,057738	0,084055	0,107229	0,188030	0,410347
0,3	0	0,032543	0,064225	0,091691	0,115063	0,191143	0,364576
0,33	0	0,034370	0,066782	0,094180	0,117024	0,188625	0,337880
0,4	0	0,037195	0,069584	0,095391	0,115954	0,175572	0,281150
0,5	0	0,038462	0,068235	0,090142	0,106626	0,150359	0,216263
0,6	0	0,037572	0,063529	0,081328	0,094099	0,125759	0,168440
0,7	0	0,035493	0,057560	0,071801	0,081628	0,104742	0,133468
0,8	0	0,032872	0,051447	0,062832	0,070440	0,087605	0,107648
0,9	0	0,030101	0,045717	0,054877	0,060837	0,073837	0,088280
1,0	0	0,027397	0,040571	0,048012	0,052747	0,062789	0,073496
5,0	0	0,002228	0,002739	0,002942	0,003046	0,003211	0,003316
10,0	0	0,000592	0,000714	0,000760	0,000782	0,000815	0,000832
50,0	0	0,000025	0,000029	0,000031	0,000032	0,000033	0,000033
100,0	0	0,000006	0,000007	0,000008	0,000008	0,000008	0,000008

LITERATUR

1. P. J. Burke. Output processes and tandem queues. *Proc. Symp. Computer-Communication Networks and Teletraffic*, 419—428, New York, 1972.
2. D. J. Daley. Characterizing pure loss $GI/G/1$ queues with renewal output. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **75**, 1974, 103—107.
3. P. Franken, D. König, U. Arndt, V. Schmidt. Queues and Point Processes. Berlin, 1981.
4. T. Raykov, W. Warmuth. Zu abhängigen Abgangsprozessen einliniger Verlustsysteme. *Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Optimization*, **13**, 1982, 473—482.
5. T. Raykov, W. Warmuth. On the structure of output processes in n-stages loss systems. *EIK*, **18**, 1982. 275—277.
6. T. L. Vlach. Further results concerning the simple queueing loss system. *Z. Operat. Res.*, **15**, 1971, 55—57.

Humboldt-Universität, Sektion Mathematik
PSF 1297 DDR 1086 Berlin

Eingegangen am 13. 6. 83