Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

УСЛОВИЯ ЖЕСТКОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ СМЕШАННОГО ТИПА, 1

ИВАНКА ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

Получены достаточные условия жесткости некоторых классов поверхностей смешанной кривизны и произвольной кусочно-гладкой границы, которые проектируются однозначно на плоскость и имеют две сопряженные параболические линии, не являющиеся асимптотическими.

Указаны условия жесткости когда граница сцециальная некоторых из рассматриваемых классов поверхностей.

1. Пусть S — регулярная поверхность, однозначно проектирующаяся на плоскость. Тогда она имеет уравнение вида

$$z=f(x, y), \quad (x, y)\in\bar{G}. \tag{1}$$

Предположим, что: (1^0) $f(x, y)\in C^2(\bar{G})$, G — ограниченная конечно-связная область, имеющая кусочно-гладкую границу ∂G и

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=\varepsilon\theta^2(x, y)\varphi^m(x, y)\psi^n(x, y), \quad \varphi, \psi\in C^2(\bar{G}), \quad \theta\in C(\bar{G}), \theta\neq 0, \tag{2}$$

где $m\geqq 0$, $n\geqq 0$, $(m, n)\neq(0, 0)$, $\varepsilon=\pm 1$; (2°) отображение Λ: $\bar{G}\to\bar{D}=\{(\varphi(x, y), \psi(x, y)), (x, y)\in\bar{G}\}$, заданное равенствами

$$u=\varphi(x, y), \ v=\psi(x, y) \tag{3}$$

является C^2-диффеоморфизмом; (3°) сеть линий $\Gamma_1:\psi(x, y)=\gamma_1$ и Γ_2: $\varphi(x, y)=\gamma_2$), сопряженная поверхности S; (4°) функции $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ удовлетворяют в G равенствам

$$\begin{gathered} f_{xx}\psi_y^2-2f_{xy}\psi_x\psi_y+f_{yy}\psi_x^2=\varepsilon\rho\varphi^m, \\ f_{xx}\varphi_y^2-2f_{xy}\varphi_x\varphi_y+f_{yy}\varphi_x^2=\rho\psi^n, \quad \rho(x, y)\in C(\bar{G}), \ \rho\neq 0; \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} f_{xx}\varphi_{yy}-2f_{xy}\varphi_{xy}+f_{yy}\varphi_{xx}=0, \\ f_{xx}\psi_{yy}-2f_{xy}\psi_{xy}+f_{yy}\psi_{xx}=0. \end{gathered} \tag{5}$$

Из предположений (1°) и (2°) следует, что c_1: $\psi(x, y)=0$ и c_2: $\varphi(x, y)=0$), соответственно при $n>0$ и $m>0$, являются параболическими линиями для поверхности S. Отметим, что при $m=0$ $(n=0)$, т. е. когда только линия $c_1(c_2)$ является параболической, функция $\varphi(x, y)\,(\psi(x,y))$ в (3) такова, что она определяет семейство $\Gamma_2(\Gamma_1)$ в (3°). Из (4) видно, что c_1 и c_2 не являются асимптотическими линиями.

Пусть p_j и q_j — взаимно простые целые числа и $p_j\geqq 0$, $q_j>$, $j=1, 2$. Рассмотрим следующие случаи:

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 10, 1974, с. 287—302.

(а) $m=p_1/q_1\geqq 1$, $n=p_2/q_2\geqq 1$, p_j и $q_j(j=1, 2)$ — нечетные числа, $\varepsilon=1$;

(б) $m=p_1/q_1$, $n=p_2/q_2\geqq 1$, $p_1\geqq 0$, p_1 — четное, а p_2, q_1 и q_2 — нечетные числа, $\varepsilon=1$;

(в) $m=p_1/q_1, n=p_2/q_2$, q_j — нечетные, а p_j — четные числа $(j=1, 2)$, $p_1\geqq 0$, $p_2\geqq 2$, $\varepsilon=1$;

(г) $m=p_1/q_1$, $n=p_2/q_2$, q_j — нечетные, а p_j — четные числа $(j=1, 2)$ $p_1\geqq 0$, $p_2\geqq 2$, $\varepsilon=-1$;

(д) $m>0$ и либо $m=p_1/q_1$, где q_1 — четное число, либо m — иррациональное число, а $n=p_2/q_2>1$, p_2, q_2 — нечетные числа, $\varepsilon=1$;

(е) $m>0$ и либо $m=p_1/q_1$, где q_1 — четное число, либо m — иррациональное число, а $n=p_2/q_2$, q_2 — нечетное число, $p_2\geqq 2$, p_2 — четное число, $\varepsilon=1$;

(ж) $m>0$ и либо $m=p_1/q_1$, где q_1 — четное число, либо m — иррациональное число, а $n=p_2/q_2$, q_2 — нечетное число, $p_2\geqq 2, p_2$ — четное число, $\varepsilon=-1$;

(з) $m\geqq 0, n>0$ и либо $m=p_1/q_1, n=p_2/q_2$, где q_1 и q_2 — четные числа либо $m=p_1/q_1(n=p_2/q_2)$, где $q_1(q_2)$ — четное, а $n(m)$ — иррациональное число либо и оба числа m и n иррациональные, $\varepsilon=1$;

(и) $m\geqq 0$, $n>0$ и либо $m=p_1/q_1$, $n=p_2/q_2$, где q_1 и q_2 — четные числа, либо $m=p_1/q_1(n=p_2/q_2)$, где $q_1(q_2)$ — четное, а $n(m)$ — иррациональное число, либо и оба числа m и n иррациональные, $\varepsilon=-1$.

Отметим, что: 1) в случаях (д), (е) и (ж) область $\bar{G}\subset M_1=\{(x, y): \varphi(x, y)\geqq 0\}$ в случаях (з) и (и) при $m=0\,\bar{G}\subset M_2=\{(x, y): \psi(x, y)\geqq 0\}$, а при $m>0\,\bar{G}\subset M_3=\{(x, y): \varphi(x, y)\geqq 0, \psi(x, y)\geqq 0\}$; 2) к рассматриваемым классам поверхностей принадлежат, например, поверхности, имеющие уравнение

$$z=\frac{1}{(m+2)(m+1)}x^{m+2}+\frac{\varepsilon}{(n+2)(n+1)}y^{n+2}+a_1x+b_1y+c_1,$$

а также

$$z=\frac{1}{(m+2)(m+1)}(x+2y)^{m+2}+\frac{\varepsilon}{(n+2)(n+1)}(2x+y)^{n+2}+a_1x+b_1y+c_1,$$

где a_1, b_1 и c_1 — произвольные константы.

Предположим, что граница ∂G: $x=x(s)$, $y=y(s)$ параметризована так, что при ее положительном обходе длина дуги s растет.

Разобьем в случае (а) гладкую часть границы Γ_s на непересекающиеся множества Γ^i_{sa}, $i=1, 2, 3, 4$, которые определяются следующим образом: на Γ^1_{sa} — а) $N^a_S(\varphi^m+\psi^n)>0$, $H^a_S(\varphi^m+\psi^n)\geqq 0$ или б) $N^a_S=0, \varphi^m+\psi^n\neq 0$ или в) $N^a_S=0$, $\varphi^m+\psi^n=0$, $\eta\psi(\psi_xx'+\psi_yy')<0$; на $\Gamma^2_{sa}-N^a_SH^a_S<0$, $H^a_S(\varphi^m+\psi^n)\geqq 0$; на $\Gamma^3_{sa}-N^a_SH^a_S<0$, $H^a_S(\varphi^m+\psi^n)<0$; на Γ^4_{sa} — а) $N^a_S\neq 0, N^a_SH^a_S\geqq 0, N^a_S(\varphi^m+\psi^n)\leqq 0$ или б) $N^a_S=0$, $\varphi^m+\psi^n=0$, $\eta\psi(\psi_xx'+\psi_yy')\geqq 0$, где $N^a_S=\eta[(\psi_x-\varphi_x)x'+(\psi_y-\varphi_y)y']$, $\eta=sgn\Delta$, $\Delta=\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$, $H^a_S=\psi^n(\psi_xx'+\psi_yy')^2+\varphi^m(\varphi_xx'+\varphi_yy')^2$.

В случае (б) ((д)) представим гладкую часть границы Γ_S как объединение непересекающихся множеств $\Gamma^i_{S\text{б}}(\Gamma^i_{S\text{д}})$, $i=1, 2, 3, 4$, которые определяются следующим образом: на $\Gamma^1_{S\text{б}}(\Gamma^1_{S\text{д}})$ — а) $N_SH_S\geqq 0$, $N_S(\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n)>0$ или б) $N_S=0$, $\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n\neq 0$ или в) $N_S=0$, $\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n=0$, $\eta\varphi(\psi_xx'+\psi_yy')>0$;

на $\Gamma^2_{S\text{б}}(\Gamma^2_{S\text{д}})-N_S H_S<0$, $H_S(\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n)\geqq 0$; на $\Gamma^3_{S\text{б}}(\Gamma^3_{S\text{д}})-N_S H_S<0$, $H_S(\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n)<0$; на $\Gamma^4_{S\text{б}}(\Gamma^4_{S\text{д}})$—а) $N_S\neq 0$, $N_S H_S\geqq 0$, $N_S(\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n)\leqq 0$ или б) $N_S=0$, $\varphi^{m+2}+\lambda^2\psi^n=0$, $\eta\varphi(\psi_x x'+\psi_y y')\leqq 0$, где $N_S=\eta[(\varphi\psi_x-\lambda\varphi_x)x'+(\varphi\psi_y-\lambda\varphi_y)y']$, $H_S=\psi^n(\psi_x x'+\psi_y y')^2+\varphi^m(\varphi_x x'+\varphi_y y')^2$, λ — подходящее положительное число.

В случае (в) ((е), (з)) разобьем гладкую часть границы Γ_S на непересекающиеся множества $\Gamma^i_{S\text{в}}(\Gamma^i_{S\text{е}}, \Gamma^i_{S\text{з}})$, $i=1, 2, 3$, такие, что: вдоль $\Gamma^1_{S\text{в}}(\Gamma^1_{S\text{е}}, \Gamma^1_{S\text{з}})$—а) $N^1_S>0$, $H^1_S\geqq 0$ или б) $N^1_S=0$, $(\varphi(x, y), \psi(x, y))\neq(0, 0)$; вдоль $\Gamma^2_{S\text{в}}(\Gamma^2_{S\text{е}}, \Gamma^2_{S\text{з}})-N^1_S<0$, $H^1_S>0$; вдоль $\Gamma^3_{S\text{в}}(\Gamma^3_{S\text{е}}, \Gamma^3_{S\text{з}})$—а) $N^1_S<0$, $H^1_S=0$ или б) $\varphi(x, y)\times\psi(x, y)=0$, где $N^1_S=\eta[(\varphi\psi_x-\lambda\psi\varphi_x)x'+(\varphi\psi_y-\lambda\psi\varphi_y)y']$, $H^1_S=\psi_x(\psi^n_x x'+\psi_y y')^2+\varphi^m(\varphi_x x'+\varphi_y y')^2$, $0<\lambda\leqq 1$ (равенство имеет место, когда $m\neq 0$).

В случае (г) ((ж), (и)) представим гладкую часть границы Γ_S как объединение непересекающихся множеств $\Gamma^i_{S\text{г}}(\Gamma^i_{S\text{ж}}, \Gamma^i_{S\text{и}})$, $i=1, 2, 3, 4$, которые определяются следующим образом: на $\Gamma^1_{S\text{г}}(\Gamma^1_{S\text{ж}}, \Gamma^1_{S\text{и}})$ — а) $N^2_S>0$, $H^2_S\geqq 0$ или б) $\psi_x x'+\psi_y y'=0, \varphi\neq 0$; на $\Gamma^2_{S\text{г}}(\Gamma^2_{S\text{ж}}, \Gamma^2_{S\text{и}})-N^2_S<0, H^2_S>0$; на $\Gamma^3_{S\text{г}}(\Gamma^3_{S\text{ж}}, \Gamma^3_{S\text{и}})-N^2_S>0$, $H^2_S<0$; на $\Gamma^4_{S\text{г}}(\Gamma^4_{S\text{ж}}, \Gamma^4_{S\text{и}})$—а) $N^2_S<0$, $H^2_S\leqq 0$ или б) $\varphi=0$, где $N^2_S=\eta\varphi(\psi_x x'+\psi_y y')$, $H^2_S=\varphi^m(\varphi_x x'+\varphi_y y')^2-\psi^n(\psi_x x'+\psi_y y')^2$.

Отметим, что некоторые из множеств $\Gamma^i_{S\text{а}}$, $\Gamma^i_{S\text{б}}(\Gamma^i_{S\text{д}})$, $\Gamma^i_{S\text{г}}(\Gamma^i_{S\text{ж}}, \Gamma^i_{S\text{и}})$, $i=1, 2, 3, 4$, $\Gamma^i_{S\text{в}}(\Gamma^i_{S\text{е}}, \Gamma^i_{S\text{з}})$, $i=1, 2, 3$, могут быть пустыми. Обозначим через l_ψ, $l_{\varphi-\psi}$, поле направлений, касательных к линиям $\psi(x, y)=\text{const}\,(\varphi(x, y)\,\psi(x, y)=\text{const})$, в $\bar{G}$, где $(\psi_y, -\psi_x)$, $l_{\varphi-\psi}(\psi_y-\varphi_y, \varphi_x-\psi_x)$, а через l и l_1 — векторные поля в $\bar{G}$, имеющие соответственно координаты $(\varphi\psi_y-\lambda\varphi_y, \lambda\varphi_x-\varphi\psi_x)$ и $(\varphi\psi_y-\lambda\psi\varphi_y, \lambda\psi\varphi_x-\psi_x\varphi)$. Очевидно, что $H^{\text{а}}_S(H_S, H^1_S, H^2_S)$ определяет нормальную кривизну Γ_S, а $N^{\text{а}}_S(N_S, N^1_S, N^2_S)$—угол между $n_\text{г}$ и $l_{\varphi-\psi}(l, l_1, l_\psi)$ вдоль ∂G.

Будем говорить, что поле $U(\xi, \eta, \zeta)$ б. м. изгибания поверхности S принадлежит классу $C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$, если $\zeta\in C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$. Имеют место:

Теорема 1. *Поверхность* (1), (1°)—(4°), (а) *жесткa в классе* $C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если*

$$
(6_1)\qquad \begin{aligned} &\zeta=c_0=\text{const} && \textit{вдоль}\quad \Gamma^1_{S\text{а}}\cup\Gamma^3_{S\text{а}},\\ &\zeta_{l_{\varphi-\psi}}=0 && \textit{вдоль}\quad \Gamma^2_{S\text{а}}\cup\Gamma^3{}_{\text{а}}. \end{aligned}
$$

Теорема 2. *Поверхность* (1), (1°)—(4°), (б) ((д)) *жестка в классе* $C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если*

$$
(6_2)\qquad \begin{aligned} &\zeta=c_0=\text{const} && \textit{вдоль}\quad \Gamma^1_{S\text{б}}\cup\Gamma^3_{S\text{б}}(\Gamma^1_{S\text{д}}\cup\Gamma^3_{S\text{д}}),\\ &\zeta_l=0 && \textit{вдоль}\quad \Gamma^2_{S\text{б}}\cup\Gamma^3_{S\text{б}}(\Gamma^2_{S\text{д}}\cup\Gamma^3_{S\text{д}}). \end{aligned}
$$

Теорема 3. *Поверхность* (1), (1°)—(4°), (в) ((е), (з)) *жестка в классе* $C^1(\bar{G})\cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если*

$$
(6_3) \qquad \begin{aligned} &\zeta = c_0 = \text{const} && \textit{вдоль} \quad \Gamma^1_{S\text{в}}(\Gamma^1_{S\text{е}}, \Gamma^1_{S\text{з}}), \\ &\zeta_{l_1} = 0 && \textit{вдоль} \quad \Gamma^2_{S\text{в}}(\Gamma^2_{S\text{е}}, \Gamma^2_{S\text{з}}); \end{aligned}
$$

Теорема 4. *Поверхность* (1), (1°)—(4°), (г) ((ж), (и)) *жестка в классе* $C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если*

$$
(6_4) \qquad \begin{aligned} &\zeta = c_0 = \text{const} && \textit{вдоль} \quad \Gamma^1_{S\text{г}} \cup \Gamma^3_{S\text{г}}(\Gamma^1_{S\text{ж}} \cup \Gamma^3_{S\text{ж}},\ \Gamma^1_{S\text{и}} \cup \Gamma^3_{S\text{и}}), \\ &\zeta_{l_\psi} = 0 && \textit{вдоль} \quad \Gamma^2_{S\text{г}} \cup \Gamma^3_{S\text{г}}(\Gamma^2_{S\text{ж}} \cup \Gamma^3_{S\text{ж}},\ \Gamma^2_{S\text{и}} \cup \Gamma^3_{S\text{и}}); \end{aligned}
$$

Следствие 1. *Поверхность* (1), (1°)—(4°), (а) ((б), (в), (г), (д), (е), (ж), (з), (и)), *имеющая границу* $\Gamma_S = \bar{\Gamma}^1_{S\text{а}} \cup \bar{\Gamma}^4_{S\text{а}}(\Gamma_S = \bar{\Gamma}^1_{S\text{б}} \cup \bar{\Gamma}^4_{S\text{б}}, \Gamma_S = \bar{\Gamma}^1_{S\text{в}} \cup \bar{\Gamma}^3_{S\text{в}}, \Gamma_S = \bar{\Gamma}^1_{S\text{г}} \cup \bar{\Gamma}^4_{S\text{г}}, \Gamma_S = \bar{\Gamma}^1_{S\text{д}} \cup \bar{\Gamma}^4_{S\text{д}}, \Gamma_S = \bar{\Gamma}^1_{S\text{е}} \cup \bar{\Gamma}^3_{S\text{е}}, \Gamma_S = \bar{\Gamma}^1_{S\text{ж}} \cup \bar{\Gamma}^4_{S\text{ж}}, \Gamma_S = \bar{\Gamma}^1_{S\text{з}} \cup \bar{\Gamma}^3_{S\text{з}}, \Gamma_S \bar{\Gamma}^1_{S\text{и}} \cup \bar{\Gamma}^4_{S\text{и}})$ *жестка в классе* $C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если граница* $\Gamma^1_{S\text{а}}(\Gamma^1_{S\text{б}}, \Gamma^1_{S\text{в}}, \Gamma^1_{S\text{г}}, \Gamma^1_{S\text{д}}, \Gamma^1_{S\text{е}}, \Gamma^1_{S\text{ж}}, \Gamma^1_{S\text{з}}, \Gamma^1_{S\text{и}})$ *закреплена, а граница* $\Gamma^4_{S\text{а}}(\Gamma^4_{S\text{б}}, \Gamma^3_{S\text{в}}, \Gamma^4_{S\text{г}}, \Gamma^4_{S\text{д}}, \Gamma^3_{S\text{е}}, \Gamma^4_{S\text{ж}}, \Gamma^3_{S\text{з}}, \Gamma^4_{S\text{и}})$ *свободная.*

Пусть a, b, c — произвольные константы. Для поверхности S предположим еще: (5°) функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ линейные. Тогда имеют место

Следствие 2. *Поверхность* (1), (1°)—(5°), (а) *жестка в классе* $C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если*

$$
\zeta = ax(s) + by(s) + c \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma^1_{S\text{а}} \cup \Gamma^3_{S\text{а}},
$$

$$
\zeta_{l_{\varphi-\psi}} = a(\psi_y - \varphi_y) + b(\varphi_x - \psi_x) \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma^2_{S\text{а}} \cup \Gamma^3_{S\text{а}}.
$$

Следствие 3. *Поверхность* (1), (1°)—(5°), (б) ((д)) *жестка в классе* $C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если*

$$
\begin{aligned} &\zeta = ax(s) + by(s) + c && \textit{вдоль} \quad \Gamma^1_{S\text{б}} \cup \Gamma^3_{S\text{б}}(\Gamma^1_{S\text{д}} \cup \Gamma^3_{S\text{д}}), \\ &\zeta_l = a(\varphi\psi_y - \varphi_y) + b(\lambda\varphi_x - \varphi\psi_x) && \textit{вдоль} \quad \Gamma^2_{S\text{б}} \cup \Gamma^3_{S\text{б}}(\Gamma^2_{S\text{д}} \cup \Gamma^3_{S\text{д}}); \end{aligned}
$$

Следствие 4. *Поверхность* (1), (1°)—(5°), (в) ((е), (з)) *жестка в классе* $C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если*

$$
\begin{aligned} &\zeta = ax(s) + by(s) + c && \textit{вдоль} \quad \Gamma^1_{S\text{в}}(\Gamma^1_{S\text{е}}, \Gamma^1_{S\text{з}}), \\ &\zeta_{l_1} = a(\varphi\psi_y - \lambda\psi\varphi_y) + b(\lambda\psi\varphi_x - \varphi\psi_x) && \textit{вдоль} \quad \Gamma^2_{S\text{в}}(\Gamma^2_{S\text{е}}, \Gamma^2_{S\text{з}}). \end{aligned}
$$

Следствие 5. *Поверхность* (1), (1°)—(5°), (г) ((ж), (и)) *жестка в классе* $C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если*

$$
\zeta = ax(s) + by(s) + c \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma^1_{S\text{г}} \cup \Gamma^3_{S\text{г}}(\Gamma^1_{S\text{ж}} \cup \Gamma^3_{S\text{ж}},\ \Gamma^1_{S\text{и}} \cup \Gamma^3_{S\text{и}}),
$$

$$
\zeta_{l_\psi} = a\psi_y - b\psi_x \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma^2_{S\text{г}} \cup \Gamma^3_{S\text{г}}(\Gamma^2_{S\text{ж}} \cup \Gamma^3_{S\text{ж}},\ \Gamma^2_{S\text{и}} \cup \Gamma^3_{S\text{и}}).
$$

2. Доказательство теорем. а) Пусть D — ограниченная конечно-связная область плоскости $\widetilde{O}uv$, имеющая кусочно-гладкую границу ∂D. Рассмотрим в D уравнение

$$L\zeta = a^{11}\zeta_{uu} + a^{22}\zeta_{vv} + b^1\zeta_u + b^2\zeta_v = 0, \tag{7}$$

где $a^{11}(u, v)$, $a^{22}(u, v) \in C^2(\bar{D})$, $b^1(u, v)$, $b^2(u, v) \in C^1(\bar{D})$. Пусть $\zeta(u, v) \in C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$ и $\gamma(u, v) \in C^2(\bar{D})$, $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v) \in C^1(\bar{D})$ — пока произвольные функции. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} 2\int_D (\gamma\zeta + \alpha\zeta_u + \beta\zeta_v) L\zeta\, du\, dv &= \int_D A(\zeta_u, \zeta_v)\, du\, dv + \int_{\partial D} B(\zeta_u, \zeta_v)\, ds \\ &+ \int_D [(\gamma a^{11})_{uu} + (\gamma a^{22})_{vv} - (\gamma b^1)_u - (\gamma b^2)_v]\zeta^2\, du\, dv - \int_{\partial D} [(\gamma a^{11})_u n_1 \\ &+ (\gamma a^{22})_v n_2 - \gamma(b^1 n_1 + b^2 n_2)]\zeta^2\, ds + 2\int_{\partial D} \gamma\zeta(a^{11} n_1 \zeta_u + a^{22} n_2 \zeta_v)\, ds, \end{aligned} \tag{8}$$

где $n(n_1, n_2)$ — единичный вектор нормали к Γ (Γ — гладкая часть ∂D),

$$\begin{aligned} A(\zeta_u, \zeta_v) = [&-(\alpha a^{11})_u + (\beta a^{11})_v - 2\gamma a^{11} + 2\alpha b^1]\zeta_u^2 + [-2(\alpha a^{22})_v - 2(\beta a^{11})_u \\ &+ 2\alpha b^2 + 2\beta b^1]\zeta_u\zeta_v + [(\alpha a^{22})_u - (\beta a^{22})_v - 2\gamma a^{22} + 2\beta b^2]\zeta_v^2, \end{aligned} \tag{9}$$

$$B(\zeta_u, \zeta_v) = (\alpha a^{11} n_1 - \beta a^{11} n_2)\zeta_u^2 + (2\alpha a^{22} n_2 + 2\beta a^{11} n_1)\zeta_u\zeta_v + (\beta a^{22} n_2 - \alpha a^{22} n_1)\zeta_v^2. \tag{10}$$

Обозначим через A^{ij}, $i, j = 1, 2$, коэффициенты квадратичной формы $A(\zeta_u, \zeta_v)$. Тогда

$$\begin{aligned} A^{11} &= -(\alpha a^{11})_u + (\beta a^{11})_v - 2\gamma a^{11} + 2\alpha b^1, \\ A^{12} &= -(\alpha a^{22})_v - (\beta a^{11})_u + \alpha b^2 + \beta b^1, \\ A^{22} &= (\alpha a^{22})_u - (\beta a^{22})_v - 2\gamma a^{22} + 2\beta b^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Отметим, что если $\gamma \equiv 0$, то для получения равенств (8)—(11) достаточно, чтобы a^{11}, $a^{22} \in C^1(\bar{D})$, b^1, $b^2 \in C(\bar{D})$ — даже достаточно, чтобы α, β, a^{11}, a^{22}, b^1, $b^2 \in C(\bar{D})$, но αa^{11}, αa^{22}, βa^{11}, $\beta a^{22} \in C^1(\bar{D})$.

б) Известно [1; 2], что отыскание поля $U(\xi, \eta, \zeta)$ б. м. изгибания регулярной однозначно проектирующейся поверхности (1) сводится к отысканию решения уравнения

$$f_{yy}\zeta_{xx} - 2f_{xy}\zeta_{xy} + f_{xx}\zeta_{yy} = 0. \tag{12}$$

Так как тип уравнения (12) зависит от знака гауссовой кривизны поверхности S, то в случаях (а), (б) и (д) оно является уравнением смешанного типа, в случаях (в), (е) и (з) — уравнением эллиптико-параболического типа, а в случаях (г), (ж) и (и) — уравнением гиперболо-параболического типа.

Известно [1; 2], что поле $U(\xi, \eta, \zeta)$ б. м. изгибания поверхности (1) тривиально, т. е. имеет вид $U = \Omega \wedge r + C$ (Ω и C — постоянные векторы, r — радиус-вектор поверхности) тогда и только тогда, когда $\zeta = ax + by + c$, где a, b, c — произвольные константы.

Поверхность S называется жесткой, если она, с учетом наличных связей, допускает лишь тривиальное поле б. м. изгибания.

Сведем уравнение (12) к уравнению вида (7). Для этого сделаем замену (3) переменных. В силу предположения (3°), получаем уравнение

$$\bar{a}^{11}(u, v)\zeta_{uu}+\bar{a}^{22}(u, v)\zeta_{vv}+\bar{b}^{1}(u, v)\zeta_u+\bar{b}^{2}(u, v)\zeta_v=0, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
&\bar{a}^{11}(u, v)=W(L\varphi_y^2-2M\varphi_x\varphi_y+N\varphi_x^2),\\
&\bar{a}^{22}(u, v)=W(L\psi_y^2-2M\psi_x\psi_y+N\psi_x^2),\\
&\bar{b}^{1}(u, v)=W(L\varphi_{yy}-2M\varphi_{xy}+N\varphi_{xx}),\\
&\bar{b}^{2}(u, v)=W(L\psi_{yy}-2M\psi_{xy}+N\psi_{xx}),
\end{aligned} \tag{14}$$

$L=f_{xx}/W$, $M=f_{xy}/W$, $N=f_{yy}/W$ — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности (1), а $W=\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$. Из (3) имеем $x=\bar{\varphi}(u, v)$, $y=\bar{\psi}(u,v)$, $(u, v)\in\bar{D}$, откуда для поверхности S получаем представление $S:\ x=\bar{\varphi}(u, v)$, $y=\bar{\psi}(u, v)$, $z=f[\bar{\varphi}(u, v), \bar{\psi}(u, v)]$, $(u, v)\in\bar{D}$. Тогда $\bar{a}^{11}(u, v)=\Delta_3\bar{W}\bar{N}$, $\bar{a}^{22}=\Delta^3\bar{W}\bar{L}$, где $\Delta=\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$, $\bar{W}=\eta\dfrac{W}{\Delta}$, $\eta=\operatorname{sgn}\Delta$. Пользуясь предположением (1°) и инвариантностью гауссовой кривизны поверхности S при замене переменных, получаем

$$\bar{a}^{11}\bar{a}^{22}=\varepsilon\theta^2\Delta^2u^mv^n. \tag{15}$$

В силу (15), (4) и (5), уравнение (13), после сокращения на $|\Delta\theta|$, принимает вид

$$u^m\zeta_{vv}+\varepsilon v^n\zeta_{uu}=0. \tag{16}$$

в) Применим метод „a, в, c" к уравнению (16), чтобы найти краевые условия, при которых оно имеет единственное решение. Для этого будем пользоваться равенствами (8)—(11). Теперь $a^{11}=\varepsilon v^n$, $a^{22}=u^m$, $b^1=b^2=0$.

В случае (a) выберем $\alpha=\beta=\text{const}>0$, $\gamma=0$. Тогда $A^{11}=\beta n v^{n-1}\geq 0$ (равенство имеет место только на $\tilde{c}_1:\ v=0$ при $n>1$, $\tilde{c}_1=\Lambda(c_1)$). $A^{12}=0$, $A^{22}=\alpha m u^{m-1}\geq 0$ (равенство имеет место только на $\tilde{c}_2:\ u=0$ при $m>1$, $\tau_2=\Lambda(c_2)$). Таким образом квадратичная форма $A(\zeta_u, \zeta_v)$ будет положительно определена на множестве $\tilde{D}=\bar{D}\setminus(\tilde{c}_1\cup\tilde{c}_2)$, всюду плотном в $\bar{D}$. После сделанного выбора для α, β и γ квадратичная форма $B(\zeta_u, \zeta_v)$ имеет представление

$$\begin{aligned}
&B(\zeta_u, \zeta_v)=\frac{\alpha}{n_1+n_2}\left[H_a(\zeta_u+\zeta_v)^2-(u^m+v^n)(\zeta_u n_2-\zeta_v n_1)^2\right] \quad \text{при} \quad n_1+n_2\neq 0,\\
&B(\zeta_u, \zeta_v)=2n_1\alpha(\zeta_u v^n-\zeta_v u^m)(\zeta_u+\zeta_v) \quad \text{при} \quad n_1+n_2=0,
\end{aligned} \tag{17}$$

где $H_a=v^n n_1^2+u^m n_2^2$.

Представим гладкую часть Γ_a границы ∂D в виде суммы непересекающихся множеств Γ_a^i, $i=1, 2, 3, 4$, которые определяются следующим образом: на Γ_a^1 — а) $(n_1+n_2)(u^m+v^n)>0$, $(u^m+v^n)H_a\geq 0$ или б) $n_1+n_2=0$, $u^m+v^n\neq 0$ или в) $n_1+n_2=0$, $u^m+v^n=0$, $n_1 v<0$; на Γ_a^2 — $(n_1+n_2)H_a<0$, $H_a(u^m+v^n)\geq 0$;

на $\Gamma_а^3$ — $(n_1+n_2)H_а<0$, $H_а(u^m+v^n)<0$; на $\Gamma_а^4$ — а) $n_1+n_2\neq 0$, $(n_1+n_2)H_а\geqq 0$, $(n_1+n_2)(u^m+v^n)\leqq 0$ или б) $n_1+n_2=0$, $u^m+v^n=0$, $n_1v\geqq 0$.

Рассмотрим следующую краевую задачу А: *Найти решение уравнения* (16), (а) *в* D, *которое удовлетворяет краевым условиям*

(18а)
$$\zeta=\varphi_1(s) \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma_а^1\cup\Gamma_а^3,$$
$$\zeta_u+\zeta_v=\varphi_2(s) \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma_а^2\cup\Gamma_а^3.$$

В случае (б) ((д)) выберем $\alpha=\alpha_1 u$, $\alpha_1>0$, $\beta=\text{const}$, $\gamma=0$, где α_1 — фиксированная постоянная, а β столь большая, что $\beta n-\alpha_1 v>0$ в $\bar{D}$. Тогда квадратичная форма $A(\zeta_u,\zeta_v)$ будет положительно определена на множестве $\tilde{D}$, всюду плотном в $\bar{D}$, а квадратичная форма $B(\zeta_u,\zeta_v)$ имеет представление

(17б)
$$B(\zeta_u,\zeta_v)=\frac{\alpha_1}{un_1+\lambda n_2}[H(u\zeta_u+\lambda\zeta_v)^2-(u^{m+2}+\lambda^2v^n)(\zeta_u n_2-\zeta_v n_1)^2] \text{ при } un_1+\lambda n_2\neq 0,$$
$$B(\zeta_u,\zeta_v)=\frac{2n_1\alpha_1}{\lambda}(\lambda v^n\zeta_u-u^{m+1}\zeta_v)(u\zeta_u+\lambda\zeta_v) \text{ при } un_1+\lambda n_2=0,$$

где $\lambda=\beta/\alpha_1$, $H=v^n n_1^2+u^m n_2^2$.

Представим гладкую часть $\Gamma_б(\Gamma_д)$ границы ∂D как объединение непересекающихся множеств $\Gamma_б^i(\Gamma_д^i)$, $i=1, 2, 3, 4$, такие, что: на $\Gamma_б^1(\Gamma_д^1)$ — а) $H(un_1+\lambda n_2)\geqq 0$, $(un_1+\lambda n_2)(u^{m+2}+\lambda^2v^n)>0$ или б) $un_1+\lambda n_2=0$, $u^{m+2}+\lambda^2v^n\neq 0$ или в) $un_1+\lambda n_2=0$, $u^{m+2}+\lambda^2v^n=0$, $n_1u>0$; на $\Gamma_б^2(\Gamma_д^2)$ — $H(un_1+\lambda n_2)<0$, $H(u^{m+2}+\lambda^2v^n)\geqq 0$; на $\Gamma_б^3(\Gamma_д^3)$ — $H(un_1+\lambda n_2)<0$, $H(u^{m+2}+\lambda^2v^n)<0$; на $\Gamma_б^4(\Gamma_д^4)$ — а) $un_1+\lambda n_2\neq 0$, $H(un_1+\lambda n_2)\geqq 0$, $(un_1+\lambda n_2)(u^{m+2}+\lambda^2v^n)\leqq 0$ или б) $un_1+\lambda n_2=0$, $u^{m+2}+\lambda^2v^n=0$, $n_1u\leqq 0$.

Рассмотрим следующую краевую задачу Б (Д): *Найти решение уравнения* (16), (б) ((д)) *в* D, *которое удовлетворяет краевым условиям*

(18б(д))
$$\zeta=\varphi_1(s) \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma_б^1\cup\Gamma_б^3(\Gamma_д^1\cup\Gamma_д^3),$$
$$u\zeta_u+\lambda\zeta_v=\varphi_2(s) \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma_б^2\cup\Gamma_б^3(\Gamma_д^2\cup\Gamma_д^3).$$

В случае (в) ((е), (з)) выберем $\alpha=\alpha_1 u$, $\beta=\beta_1 v$, $\gamma=0$, где α_1 и β_1 такие положительные постоянные, что $\beta_1+\beta_1 n>\alpha_1\geqq\beta_1$ (равенство имеет место только тогда, когда $m\neq 0$). Из $A^{11}=v^n(\beta_1-\alpha_1+\beta_1 n)$, $A^{12}=0$, $A^{22}=u^m(\alpha_1-\beta_1+\alpha_1 m)$ видно, что квадратичния форма $A(\zeta_u,\zeta_v)$ будет положительно определена на множестве $\tilde{D}$, всюду плотном в $\bar{D}$. Теперь

$$B(\zeta_u,\zeta_v)=\frac{\alpha_1}{un_1+\lambda vn_2}[H_1(u\zeta_u+\lambda v\zeta_v)^2-(u^{m+2}+\lambda^2v^{n+2})(\zeta_u n_2-\zeta_v n_1)^2] \text{ при}$$
$$un_1+\lambda vn_2\neq 0.$$

(17 в(е, з))
$$B(\zeta_u,\zeta_v)=\frac{2\alpha_1 n_1}{\lambda v}[\lambda v^{n+1}\zeta_u-u^{m+1}\zeta_v](u\zeta_u+\lambda v\zeta_v) \text{ при}$$
$$un_1+\lambda vn_2=0,\ v\neq 0,$$
$$B(\zeta_u,\zeta_v)=2\alpha_1 n_2u^{m+1}\zeta_u\zeta_v \quad \text{при} \quad un_1=0,\ v=0,$$

где $\lambda=\beta_1/\alpha_1$, $0<\lambda\leq 1$ (равенство имеет место, когда $m\neq 0$), $H_1=v^n n_1^2+u^m n_2^2$, а $\Gamma_в=\bigcup_{i=1}^{3}\Gamma_в^i$, $\Gamma_в^i\cap\Gamma_в^j=\varnothing$ при $i\neq j$, ($\Gamma_е=\bigcup_{i=1}^{3}\Gamma_е^i$, $\Gamma_е^i\cap\Gamma_е^j=\varnothing$ при $i\neq j$, $\Gamma_з=\bigcup_{i=1}^{3}\Gamma_з^i$, $\Gamma_з^i\cap\Gamma_з^j=\varnothing$ при $i\neq j$). На $\Gamma_в^1(\Gamma_е^1, \Gamma_з^1)$ имеем а) $un_1+\lambda vn_2>0$, $H_1\geq 0$ или б) $un_1+\lambda vn_2=0$, $(u, v)\neq(0, 0)$; на $\Gamma_в^2(\Gamma_е^2, \Gamma_з^2)$—$un_1+\lambda vn_2<0$, $H_1>0$; на $\Gamma_в^3(\Gamma_е^3, \Gamma_з^3)$—а) $un_1+\lambda vn_2<0$, $H_1=0$ или б) $(u, v)=(0, 0)$. Отметим, что множество $\Gamma_в^3(\Gamma_е^3, \Gamma_з^3)$ можем содержать только изолированные точки.

Рассмотрим следующую краевую задачу В (Е, З): *Найти решение уравнения* (16), (в) ((е), (з)) в D, которое удовлетворяет краевым условиям

$$(18в(е, з))\qquad \zeta=\varphi_1(s)\quad \text{вдоль}\quad \Gamma_в^1(\Gamma_е^1, \Gamma_з^1),$$

$$u\zeta_u+\lambda v\zeta_v=\varphi_2(s)\quad \text{вдоль}\quad \Gamma_в^2(\Gamma_е^2, \Gamma_з^2).$$

В случае (г) ((ж), (и)) выберем $\alpha=\alpha_1 u$, $\beta=\gamma=0$, $\alpha_1=\text{const}>0$. Тогда квадратичная форма $A(\zeta_u, \zeta_v)$ будет положительно определена на множестве $\bar{D}$, всюду плотном в $\bar{D}$, а

$$(17г(ж, и))\qquad \begin{aligned} B(\zeta_u, \zeta_v)&=\frac{\alpha_1 u}{n_1}[H_2\zeta_u^2-u^m(n_2\zeta_u-n_1\zeta_v)^2] \quad \text{при}\quad n_2\neq 0,\\ B(\zeta_u, \zeta_v)&=2\alpha_1 u^{m+1}n_2\zeta_u\zeta_v \quad \text{при}\quad n_1=0,\end{aligned}$$

где $H=-v^n n_1^2+u^m n_2^2$.

Гладкую часть $\Gamma_г(\Gamma_ж, \Gamma_и)$ границы ∂D представим следующим образом: $\Gamma_г=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_г^i$, $\Gamma_г^i\cap\Gamma_г^j=\varnothing$ при $i\neq j$($\Gamma_ж=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_ж^i$, $\Gamma_ж^i\cap\Gamma_ж^j=\varnothing$ при $i\neq j$, $\Gamma_и=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_и^i$, $\Gamma_и^i\cap\Gamma_и^j=\varnothing$ при $i\neq j$), где: на $\Gamma_г^1(\Gamma_ж^1, \Gamma_и^1)$—а) $n_1 u>0$, $H_2\geq 0$ или б) $n_1=0$, $u\neq 0$; на $\Gamma_г^2(\Gamma_ж^2, \Gamma_и^2)$—$n_1 u<0$, $H_2>0$; на $\Gamma_г^3(\Gamma_ж^3, \Gamma_и^3)$—$n_1 u>0$, $H_2<0$; на $\Gamma_г^4(\Gamma_ж^4, \Gamma_и^4)$—а) $n_1 u<0$, $H_2\leq 0$ или б) $u=0$.

Рассмотрим краевую задачу Г(Ж, И): *Найти решение уравнения* (16), (г) ((ж), (и)) *в* D, *которое удовлетворяет краевым условиям*

$$(18\,г(ж, и))\qquad \begin{aligned} \zeta&=\varphi_1(s)\quad \textit{вдоль}\quad \Gamma_г^1\cup\Gamma_г^3(\Gamma_ж^1\cup\Gamma_ж^3, \Gamma_и^1\cup\Gamma_и^3),\\ \zeta_u&=\varphi_2(s)\quad \textit{вдоль}\quad \Gamma_г^2\cup\Gamma_г^3(\Gamma_ж^2\cup\Gamma_ж^3, \Gamma_и^2\cup\Gamma_и^3).\end{aligned}$$

Заметим, что если выберем в случае (г) ((ж), (и)) $\alpha=\gamma=0$, $\beta=-\beta_1 v$, $\beta_1>0$, то в краевой задаче Г (Ж, И) u и v поменяют свою роль.

Имеют место:

Лемма А (Б(Д), В(Е, З), Г(Ж, И)). *Задача* А (В(Д), В(Е, З), Г(Ж, И)) *может иметь не более одного решения* $\zeta(u, v)$ *в классе* $C^1(\bar{D})\cap C^2(D)$, *если* $\Gamma_а^1\cup\Gamma_а^3\neq\varnothing(\Gamma_б^1\cup\Gamma_б^3\neq\varnothing$, $(\Gamma_д^1\cup\Gamma_д^3\neq\varnothing)$, $\Gamma_в^1\neq\varnothing(\Gamma_е^1\neq\varnothing$, $\Gamma_з^1\neq\varnothing)$, $\Gamma_г^1\cup\Gamma_г^3\neq\varnothing(\Gamma_ж^1\cup\Gamma_ж^3\neq\varnothing$, $\Gamma_и^1\cup\Gamma_и^3\neq\varnothing)$). *Если* $\Gamma_а^1\cup\Gamma_а^3=\varnothing(\Gamma_б^1\cup\Gamma_б^3=\varnothing(\Gamma_д^1\cup\Gamma_д^3=\varnothing)$, $\Gamma_в^1=\varnothing(\Gamma_е=\varnothing$, $(\Gamma_з^1=\varnothing)$, $\Gamma_г^1\cup\Gamma_г^3=\varnothing(\Gamma_ж^1\cup\Gamma_ж^3=\varnothing$, $\Gamma_и^1\cup\Gamma_и^3=\varnothing)$), *то любые две решения класса* $C^1(\bar{D})\cup C^2(D)$ *задачи* А(Б(Д), В (Е, З), Г (Ж, И)) *отличаются на константу.*

Докажем только лемму А. Доказательство остальных лемм аналогично.

Пусть $\zeta(u, v)$ — решение задачи А при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Поскольку квадратичная форма $A(\zeta_u, \zeta_v)$ положительно определена на множестве $\widetilde{D}$, всюду плотном в $\bar{D}$, и непрерывна, то $A(\zeta_u, \zeta_v) \geqq 0$ в $\bar{D}$. Кроме этого, из краевых условиях (18а) и равенств (17а) видно, что квадратичная форма $B(\zeta_u, \zeta_v) \geqq 0$ на ∂D. Из того, что левая часть равенства (8) равна нулю, следует, что оба интеграла правой части равенства (8) тоже равны нулю. Тогда квадратичная форма $A(\zeta_u, \zeta_v)$ равна нулю почти везде в D и так как она непрерывна, то $A(\zeta_u, \zeta_v) = 0$ везде в $\bar{D}$. Но из положительной определенности квадратичной формы $A(\zeta_u, \zeta_v)$ на $\widetilde{D}$ следует $\zeta_u = \zeta_v = 0$ на $\widetilde{D}$. Отсюда и из непрерывности ζ_u и ζ_v следует $\zeta_u = \zeta_v = 0$ в $\bar{D}$.

Из леммы А (Б(Д), В (Е, З), Г (Ж, И)) немедленно вытекает утверждение теоремы 1 (2, 3, 4). В самом деле, множества $\Gamma^i_{S\text{а}}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $(\Gamma^i_{S\text{б}}(\Gamma^i_{S\text{д}})$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\Gamma^i_{S\text{в}}(\Gamma^i_{S\text{е}}, \Gamma^i_{S\text{з}})$, $i = 1, 2, 3$, $\Gamma^i_{S\text{г}}(\Gamma^i_{S\text{ж}}, \Gamma^i_{S\text{и}})$, $i = 1, 2, 3, 4)$ являются образами соответственно множеств $\Gamma^i_{\text{а}}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $(\Gamma^i_{\text{б}}(\Gamma^i_{\text{д}})$, $i = 1, 2, 3, 4$, $\Gamma^i_{S\text{в}}(\Gamma^i_{S\text{е}}$, $\Gamma^i_{S\text{з}})$, $i = 1, 2, 3$, $\Gamma^i_{S\text{г}}(\Gamma^i_{S\text{ж}}, \Gamma^i_{S\text{и}})$, $i = 1, 2, 3, 4)$ при отображении $\Pi^{-1} \circ \Lambda^{-1}$, где Π — проекция поверхности S на плоскость Qxy, а краевые условия (18а) (18б(д)), (18 в(е, з), (18 г(ж, и)) при $\varphi_1 = c_0$, $\varphi_2 = 0$ через $\Pi^{-1} \circ \Lambda^{-1}$ переходят соответственно в краевые условия (6_1) $((6_2), (6_3), (6_4))$. В силу леммы А (Б(D), В(Е, З), Г(Ж, И)), уравнение (12) при предположениях (1°)—(4°), (а) (б) (д)), (в)((е), (з), (г)(ж), (и)) и при краевых условиях (6_1) $((6_2), (6_3), (6_4))$, где вместо $\Gamma^i_{S\text{а}}(\Gamma^i_{S\text{б}}(\Gamma^i_{S\text{д}})$, $\Gamma^i_{S\text{в}}(\Gamma^i_{S\text{е}}, \Gamma^i_{S\text{з}})$, $\Gamma^i_{S\text{г}}(\Gamma^i_{S\text{ж}}, \Gamma^i_{S\text{и}}))$ поставлены их образы через Π, имеет только решение вида $\zeta = \text{const}$. Отсюда вытекает, что поверхность (1), (1°)—(4°), (а) ((б) ((д)), (в) ((е), (з)), (г) ((ж), (и))), вдоль края которой наложены краевые условия (6_1) $((6_2), (6_3), (6_4))$ жестка.

3. В этом пункте применим полученные результаты в случаях, когда область G характеристическая, т. е. когда часть границы поверхности S, вдоль которой гауссовая кривизна $K < 0$, составлена из дуг асимптотических линий.

3.1. Рассмотрим поверхность (1) класса (1°)—(4°), удовлетворяющая (а). Для определенности предположим, что m и n целые числа и $m \geqq n$. Пусть $O = c_1 \cap c_2$, $A = c_1 \cap c_{2a}$, $A_1 = c_1 \cap c_{2\bar{a}}$, $B = c_2 \cap c_{1b}$, $B_1 = c_2 \cap c_{1\bar{b}}$, где c_{2a}: $\varphi(x, y) = a$, $c_{2\bar{a}}$: $\varphi(x, y) = \bar{a}$, c_{1b}: $\psi(x, y) = b$, $c_{1\bar{b}}$: $\psi(x, y) = \bar{b}$, $0 < \bar{a} < a$, $0 < \bar{b} < b$. Пусть AA', A_1A_1', BB', B_1B_1' — характеристики уравнения (12), где $A' = AA' \cap c_2$, $A_1' = A_1A_1' \cap c_2$, $B' = BB' \cap c_1$, $B_1' = B_1B_1' \cap c_1$, а AB, A_1B_1, $A'B'$ и $A_1'B_1'$ — кусочно-гладкие линии, внутренние точки которых эллиптические и такие, что $N_S^{\text{а}} > 0$ вдоль AB и $A_1'B_1'$, $N_S^{\text{а}} < 0$ вдоль A_1B_1 и $A'B'$. Обозначим образы точек плоскости Oxy при отображении Λ теми же буквами но с тильдой над ними, например, $\Lambda(A) = \widetilde{A}$ и т. д. (см. рис. 1). Тогда

$$\widetilde{A}\widetilde{A}': \frac{1}{m+2} u^{\frac{m+2}{2}} + \frac{1}{n+2}(-v)^{\frac{n+2}{2}} = \frac{1}{m+2} a^{\frac{m+2}{2}}, \quad \widetilde{A}_1\widetilde{A}_1': \frac{1}{m+2} u^{\frac{m+2}{2}}$$

$$+ \frac{1}{n+2}(-v)^{\frac{n+2}{2}} = \frac{1}{m+2} \bar{a}^{\frac{m+2}{2}},$$

$$\widetilde{B}\widetilde{B}': \frac{1}{m+2}(-u)^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=\frac{1}{n+2}b^{\frac{n+2}{2}}, \quad \widetilde{B}_1\widetilde{B}_1': \frac{1}{m+2}(-u)^{\frac{m+2}{2}}$$

$$+\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=\frac{1}{n+2}\bar{b}^{\frac{n+2}{2}}.$$

а) Пусть $\partial G=AB\cup BB'\cup B'A'\cup A'A$. Тогда $D=\Lambda(G)$ имеет границу $\partial D=\widetilde{A}\widetilde{B}\cup\widetilde{B}\widetilde{B}'\cup\widetilde{B}'\widetilde{A}'\cup\widetilde{A}'\widetilde{A}$ (см. рис. 1) и

$$n_1+n_2=\omega[u^{m/2}-(-v)^{n/2}],\ (n_1+n_2)(u^m+v^n)=\omega[u^{m/2}-(-v)^{n/2}]^2[u^{m/2}+(-v)^{n/2}]$$

$$\geqq 0 \text{ вдоль } \widetilde{A}\widetilde{A}',$$

$$n_1+n_2=-\bar{\omega}[(-u)^{m/2}+v^{n/2}],\quad (n_1+n_2)(u^m+v^n)=\bar{\omega}[(-u)^{m/2}-v^{n/2}]^2[(-u)^{m/2}+v^{n/2}]$$

$$\geqq 0 \text{ вдоль } \widetilde{B}\widetilde{B}',$$

где $\omega=(u^m-v^n)^{-1/2}$, $\bar{\omega}=(v^n-u^m)^{-1/2}$. Таким образом вся граница $\Gamma_a=\Gamma_a^1$ и, следовательно, рассматриваемая поверхность будет жесткой, если вся ее граница Γ_S зафиксирована или вдоль нее $\zeta=\text{const}$.

б) Пусть теперь $\partial G=AB\cup BB'\cup B'A'\cup A'A\cup A_1B_1\cup B_1B_1'\cup B_1'A_1'\cup A_1'A_1$, (см. рис. 1). Так как $n_1+n_2=\omega[-u^{m/2}+(-v)^{n/2}]$ вдоль $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_1'$, $n_1+n_2=\bar{\omega}[(-u)^{m/2}-v^{n/2}]$ вдоль $\widetilde{B}_1\widetilde{B}_1'$ и $(n_1+n_2)(u^m+v^n)\leqq 0$ вдоль $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_1'\cup\widetilde{B}_1\widetilde{B}_1'$ (равенство может иметь место только в таких точках дуги $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_1'$, соответственно $\widetilde{B}_1\widetilde{B}_1'$, где $n_1+n_2=0$ и $u^m+v^n=0$), то $\widetilde{A}\widetilde{B}\cup\widetilde{A}'\widetilde{B}\cup\widetilde{A}\widetilde{A}'\cup\widetilde{B}\widetilde{B}'=\Gamma_a^1$, $\widetilde{A}_1\widetilde{B}_1\cup\widetilde{A}_1'\widetilde{B}_1'=\Gamma_a^2$, $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_1'\cup\widetilde{B}_1\widetilde{B}_1'=\Gamma_a^4$. Следовательно, рассматриваемая поверхность будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(AB\cup A'B'\cup AA'\cup BB')$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\text{const}$, вдоль $\Pi^{-1}(A_1B_1\cup A_1'B_1')-\zeta_{l_{\varphi-\psi}}=0$, а граница $\Pi^{-1}(A_1A_1'\cup B_1B_1')$ свободная.

в) Пусть $\partial G=AB\cup BC\cup CO\cup OD\cup DA(\partial G=B'A'\cup A'D\cup DO\cup OC\cup CB')$, где $AD(A'D)$ и $CB(CB')$ — куски характеристик AA' и BB', а OD и OC — характеристики уравнения (12) через O, т. е. $\widetilde{O}\widetilde{D}$: $v=-(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{2}{n+2}}u^{\frac{m+2}{n+2}}$, $u\geqq 0$, $\widetilde{O}\widetilde{C}$: $v=(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{2}{n+2}}(-u)^{\frac{m+2}{n+2}}$, $u\leqq 0$ (см. рис. 1.). Так как $n_1+n_2<0(n_1+n_2>0)$ вдоль $\widetilde{O}\widetilde{D}$, $n_1+n_2<0(n_1+n_2>0)$ вдоль $\widetilde{O}\widetilde{C}$, u^m+v^n вдоль $\widetilde{O}\widetilde{D}$ и $\widetilde{O}\widetilde{C}$ равняется соответственно $u^{\frac{(m+2)n}{n+2}}[u^{\frac{2(m-n)}{n+2}}-(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{2n}{n+2}}]$, $(-u)^{\frac{(m+2)n}{n+2}}[(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{2n}{n+2}}-(-u)^{\frac{2(m-n)}{n+2}}]$, то куски $\bar{\widetilde{M}}\bar{\widetilde{D}}(\bar{\widetilde{O}}\bar{\widetilde{M}})$ и $\bar{\widetilde{N}}\bar{\widetilde{O}}(\bar{\widetilde{N}}\bar{\widetilde{C}})$, соответственно характеристик $\widetilde{O}\widetilde{D}$ и $\widetilde{O}\widetilde{C}$, где $\widetilde{M}((\frac{n+2}{m+2})^{\frac{n}{m-n}}, -(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{m}{m-n}})$, $\widetilde{N}(-(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{n}{m-n}}, (\frac{n+2}{m+2})^{\frac{m}{m-n}})$ принадлежат Γ_a^4, а куски $\widetilde{O}\widetilde{M}(\widetilde{M}\widetilde{D})$ и $\widetilde{N}\widetilde{C}(\widetilde{N}\widetilde{O})-\Gamma_a^1$. Отметим, что при $m=n$ вся характеристика $\widetilde{C}\widetilde{D}$: $u+v=0$ принадлежит Γ_a^4. Таким образом рассматриваемая поверхность при $m>n$ будет жесткой, если $\Pi^{-1}(AB\cup AD\cup MO\cup NC\cup CB)$ $(\Pi^{-1}(A'B'\cup A'D\cup DM\cup ON\cup CB'))$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\text{const}$ и граница $\Pi^{-1}(MD\cup NO)(\Pi^{-1}(NC\cup OM))$ свободная, а при $m=n$ — если $\Pi^{-1}(AB\cup AD\cup CB)$ $(\Pi^{-1}(A'B'\cup A'D\cup CB'))$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\text{const}$ и $\Pi^{-1}(CD)$ $(\Pi^{-1}(CD))$ свободная.

г) Наконец, рассмотрим при $m=n$ область G, для которой $\partial G=AB\cup BC\cup CN_1\cup N_1B_1\cup B_1A_1\cup A_1M_1\cup M_1D\cup DA$ $(\partial G=A'B'\cup B'C\cup CN_1\cup N_1B_1'\cup B_1'A_1'\cup A_1'M_1\cup M_1D\cup DA')$ (см. рис. 2), где $BC(BC), B_1N_1(B_1'N_1), AD, (A'D), A_1M_1$ $(A_1'M_1)$ — куски соответственно характеристик $BB', B_1B_1', AA', A_1A_1', C=BB'\cap CD$, $N_1=CD\cap B_1B_1'$, $D=AA'\cap CD$, $M_1=CD\cap A_1A_1'$, CN_1 и DM_1 — куски характеристики CD. Тогда рассматриваемая поверхность будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(DA\cup AB\cup BC)$ $(\Pi^{-1}(DA'\cup A'B'\cup B'C))$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\mathrm{const}$, вдоль $\Pi^{-1}(A_1B_1)$ $(\Pi^{-1}(A_1'B_1'))$ — $\zeta_{l\varphi-\psi}=0$, а граница $\Pi^{-1}(A_1M_1\cup M_1D\cup B_1N_1\cup N_1C)$ $(\Pi^{-1}(A_1'M_1\cup M_1D\cup B_1'N_1\cup N_1C)$ свободная.

3.2. Рассмотрим поверхность (1) класса (1°)—(4°), (б). Предположим, что $m/2$ — четное положительное число. Пусть $O=c_1\cap c_2$, $C=c_2\cap c_{1c}$, c_{1c}: $\psi(x,y)=-c$, $C_1=c_2\cap c_{1\bar{c}}$, $c_{1\bar{c}}$: $\psi(x,y)=-\bar{c}$ $(0<\bar{c}<c)$; BC, B_1C_1, AC и A_1C_1 — характеристики уравнения (12), где $A=c_1\cap AC$, $A_1=c_1\cap A_1C_1$, $B=c_1\cap BC$, $B_1=c_1\cap B_1C_1$, а AM, A_1M_1, BM и B_1M_1 (M, $M_1\in c_2$, M_1 лежит между O и M) — кусочно-гладкие линии, внутренние точки которых эллиптические, и такие, что $N_S>0$ вдоль AMB, $N_S<0$ вдоль $A_1M_1A_1$. Тогда

$$\tilde{B}\tilde{C}:\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{n+2}(-v)^{\frac{n+2}{2}}=\frac{c}{n+2}^{\frac{n+2}{2}},\quad \tilde{A}_1\tilde{C}:\ -\frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{n+2}(-v)^{\frac{n+2}{2}}=\frac{c}{n+2}^{\frac{n+2}{2}},$$

$$\tilde{B}_1\tilde{C}_1:\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{n+2}(-v)^{\frac{n+2}{2}}=\frac{\bar{c}}{n+2}^{\frac{n+2}{2}},\quad \tilde{A}_1\tilde{C}_1:\ -\frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{n+2}(-v)^{\frac{n+2}{2}}=\frac{\bar{c}}{n+2}^{\frac{n+2}{2}}.$$

а) Пусть $\partial G=AMB\cup BC\cup CA$. Тогда область $D=\Lambda(G)$ имеет границу $\partial D=\tilde{A}\tilde{M}\tilde{B}\cup\tilde{B}\tilde{C}\cup\tilde{C}\tilde{A}$ (см. рис. 3) и $un_1+\lambda n_2$ вдоль $\tilde{B}\tilde{C}$ и $\tilde{A}\tilde{C}$ равняется соответственно

$$\omega[u^{\frac{m+2}{2}}-\lambda(c^{\frac{n+2}{2}}-\frac{n+2}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}})^{\frac{n}{2+2}}],\quad -\omega[u^{\frac{m+2}{2}}+\lambda(c^{\frac{n+2}{2}}+\frac{n+2}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}})^{\frac{n+2}{2}}],$$

где $\omega=(u^m-v^n)^{1/2}$, а для $(un_1+\lambda n_2)(u^{m+2}+\lambda^2v^n)$ имеем соответственно

$$\omega[u^{\frac{m+2}{2}}-\lambda(c^{\frac{n+2}{2}}-\frac{n+2}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}})^{\frac{n}{n+2}}]^2[u^{\frac{m+2}{2}}+\lambda(c^{\frac{n+2}{2}}-\frac{n+2}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}})^{\frac{n}{n+2}}]\geqq 0\ \text{вдоль}\ \tilde{B}\tilde{C},$$

$$-\omega[u^{\frac{m+2}{2}}+\lambda(c^{\frac{n+2}{2}}+\frac{n+2}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}})^{\frac{n}{n+2}}]^2[u^{\frac{m+2}{2}}-\lambda(c^{\frac{n+2}{2}}+\frac{n-2}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}})^{\frac{n}{n+2}}]\geqq 0\ \text{вдоль}\ \tilde{A}\tilde{C},$$

где равенство может иметь место только в таких точках дуги $\tilde{B}\tilde{C}$, $\tilde{A}\tilde{C}$, в которых $un_1+\lambda n_2=0$ и $u^{m+2}+\lambda^2v^n=0$. Следовательно, рассматриваемая поверхность жестка, если вся граница Γ_S фиксирована или вдоль нее $\zeta=\mathrm{const}$.

б) Пусть теперь $\partial G=AMB\cup BC\cup CA\cup B_1C_1\cup A_1C_1\cup A_1M_1B_1$. Тогда (см. рис. 3) для $(un_1+\lambda n_2)(u^{m+2}+\lambda^2v^n)$ имеем соответственно

$$-\omega[u^{\frac{m+2}{2}}-\lambda(c^{-\frac{n+2}{2}}-\frac{n+2}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}})^{\frac{n}{n+2}}]^2[u^{\frac{m+2}{2}}+\lambda(c^{-\frac{n+2}{2}}-\frac{n+2}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}})^{\frac{n}{n+2}}]$$

$$\leqq 0 \text{ вдоль } \widetilde{B}_1\widetilde{C}_1,$$

$$\omega[u^{\frac{m+2}{2}}+\lambda(c^{-\frac{n+2}{2}}-\frac{n+2}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}})^{\frac{n}{n+2}}]^2[u^{\frac{m+2}{2}}-\lambda(c^{-\frac{n+2}{2}}+\frac{n+2}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}})^{\frac{n}{n+2}}]$$

$$\leqq 0 \text{ вдоль } \widetilde{A}_1\widetilde{C}_1,$$

где равенство может иметь место только в таких точках дуги $\widetilde{B}_1\widetilde{C}_1$, $\widetilde{A}_1\widetilde{C}_1$, в которых $un_1+\lambda n_2=0$ и $u^{m+2}+\lambda^2v^n\neq 0$. Следовательно, рассматриваемая поверхность будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(AMB\cup BC\cup AC)$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\text{const}$, вдоль $\Pi^{-1}(A_1M_1B_1)-\zeta_l=0$, а граница $\Pi^{-1}(B_1G_1\cup A_1C_1)$ свободная.

в) Пусть $\partial G=AMB\cup BC\cup CA\cup OB_1'\cup B_1'C_1\cup C_1A_1'\cup A_1'O$, где

$$\widetilde{O}\widetilde{B}_1':\ v=-(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{2}{2+n}}u^{\frac{m+2}{n+2}} \quad \text{и} \quad \widetilde{O}\widetilde{A}_1':\ v=-(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{2}{n+2}}(-u)^{\frac{m+2}{n+2}}$$

характеристики уравнения (16) через $\widetilde{O}$, $\widetilde{B}_1'=\widetilde{O}\widetilde{B}_1'\cap\widetilde{C}_1\widetilde{B}_1$, $\widetilde{A}_1'=\widetilde{O}\widetilde{A}_1'\cap\widetilde{C}_1\widetilde{A}_1$. (см. рис. 3). Тогда $un_1+\lambda n_2$ вдоль $\widetilde{O}\widetilde{B}_1'$ и $\widetilde{O}\widetilde{A}_1'$ равняется соответственно

$$-\omega[u^{\frac{m+2}{2}}+\lambda(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{n}{n+2}}n^{\frac{(m+2)n}{2(n+2)}}],\quad -\omega[(-u)^{\frac{m+2}{2}}+\lambda(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{n}{n+2}}(-u)^{\frac{(m+2)n}{2(n+2)}}],$$

а $(un_1+\lambda n_1)(u^{m+2}+\lambda^2v^n)$ соответственно

$$-\omega[u^{\frac{m+2}{2}}+\lambda(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{n}{n+2}}u^{\frac{(m+2)n}{2(n+2)}}]^2[u^{\frac{m+2}{2}}-\lambda(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{n}{n+2}}u^{\frac{n(m+2)}{2(n+2)}}],$$

$$-\omega[(-u)^{\frac{m+2}{2}}+\lambda(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{n}{n+2}}(-u)^{\frac{n(m+2)}{2(n+2)}}]^2[(-u)^{\frac{m+2}{2}}-\lambda(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{n}{n+2}}(-u)^{\frac{n(m+2)}{2(n+2)}}].$$

Легко обнаруживается, что $\widetilde{N}_1\widetilde{A}_1'\cup\widetilde{A}_1'\widetilde{C}_1\cup\widetilde{C}_1\widetilde{B}_1'\cup\widetilde{B}_1'\widetilde{M}_1'\cup\widetilde{O}\cup\widetilde{M}_1'\cup\widetilde{N}_1\in\Gamma_6^4$, $\widetilde{O}\widetilde{N}_1\cup\widetilde{O}\widetilde{M}_1'\in\Gamma_6^1$, где

$$\widetilde{M}_1'[\lambda^{\frac{n+2}{m+2}}(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{n}{m+2}},\ -\lambda^{\frac{n+2}{m+2}}]\in\widetilde{O}\widetilde{B}_1',\ \widetilde{N}_1[-\lambda^{\frac{n+2}{m+2}}(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{n}{m+2}},\ -\lambda^{\frac{n+2}{m+2}}]\in\widetilde{O}\widetilde{A}_1',$$

а $\widetilde{N}_1\widetilde{A}_1'$ и $\widetilde{N}_1\widetilde{O}(\widetilde{M}_1'\widetilde{B}_1'$ и $\widetilde{M}_1'\widetilde{O})$ — куски характеристики $\widetilde{O}\widetilde{A}_1'(\widetilde{O}\widetilde{B}_1')$. Следовательно, рассматриваемая поверхность будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(AMB\cup BC\cup CA\cup OM_1'\cup ON_1)$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\text{const}$, а граница $\Pi^{-1}(M_1'B_1'\cup B_1'C_1\cup C_1A_1'\cup A_1'N_1)$ свободная.

3.3. Рассмотрим поверхность (1) класса (1°)–(4°), (г). Для определенности предположим, что $n>2$, $m\geqq 0$, $m/2$, $n/2$ — четные и $m\geqq n$ при $m\neq 0$. Пусть $O=c_1\cap c_2$, $A=c_1\cap c_{2a}$, $A_1=c_1\cap c_{2\bar{a}}$, c_{2a}; $\varphi(x,y)=a$, $c_{2\bar{a}}$: $\varphi(x,y)=\bar{a}$, $0<\bar{a}<a$, и AB, A_1B_1, AC и A_1C_1 — характеристики уравнения (12), где $B=c_2\cap AB$, $B_1=c_2\cap A_1B_1$, $C=c_2\cap AC$, $C_1=c_2\cap A_1C_1$. Пусть $A'B$, $A_1'B_1$, $A'C$, $A_1'C_1$ — тоже характеристики уравнения (12), где $A'=BA'\cap c_1$, $A_1'=B_1A_1'\cap c_1$. Тогда (см. рис. 4)

$$\tilde{A}\tilde{B}:\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=\frac{1}{m+2}a^{\frac{m+2}{2}};\quad \tilde{A}_1\tilde{B}_1:\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}$$
$$+\frac{1}{n+2}v^{n+2}=\frac{1}{m+2}\bar{a}^{\frac{m+2}{2}};$$

$$\tilde{A}\tilde{C}:\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}-\frac{1}{n+2}^{\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{m+2}a^{\frac{m+2}{2}};\quad \tilde{A}_1\tilde{C}_1:\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}-\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=\frac{1}{m+2}\bar{a}^{\frac{m+2}{2}};$$

$$\tilde{A}'\tilde{B}:\ -\frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{n+2}v^{n+2}=\frac{1}{m+2}a^{\frac{m+2}{2}};\quad \tilde{A}_1'\tilde{B}_1:\ -\frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}$$

$$+\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=\frac{1}{m+2}\bar{a}^{\frac{m+2}{2}};$$

$$\tilde{A}'\tilde{C}:\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=-\frac{1}{m+2}a^{\frac{m+2}{2}};\quad \tilde{A}_1'\tilde{C}:\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}$$

$$+\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=-\frac{1}{m+2}\bar{a}^{\frac{m+2}{2}}.$$

Из теоремы 4 вытекает:

а) Если $\partial G=AB\cup BA'\cup A'C\cup CA$, то поверхность S жестка, когда вся ее граница фиксирована или вдоль нее $\zeta=\mathrm{const}$;

б) Если $\partial G=AB\cup BA'\cup A'C\cup CA\cup A_1B_1\cup B_1A_1'\cup A_1'C_1\cup C_1A_1$, то поверхность S будет жесткой, когда граница $\Pi^{-1}(AB\cup AC\cup BA'\cup A'C)$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\mathrm{const}$, а граница $\Pi^{-1}(A_1B_1\cup A_1C_1\cup B_1A_1'\cup A_1'C_1)$ свободная;

в) Если $\partial G=BOC\cup CA\cup AB(\partial G=BOC\cup CA'\cup A'B)$, то поверхность S будет жесткой, когда граница $\Pi^{-1}(BA\cup AC)\,(\Pi^{-1}(BA'\cup A'C))$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\mathrm{const}$, а $\Pi^{-1}(BOC)$ свободная:

г) Если $\partial G=BB_1\cup B_1A_1\cup A_1C_1\cup C_1C\cup CA\cup AB(\partial G=BB_1\cup B_1A_1'\cup A_1'C_1\cup C_1C\cup CA'\cup A'B)$, то поверхность S будет жесткой, когда граница $\Pi^{-1}(BA\cup AC)\,(\Pi^{-1}(BA'\cup A'C))$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\mathrm{const}$, а остальная часть границы свободна.

Пусть $B'B_2$ и $B'B_2'$, $C'C_2$ и $C'C_2'$ — характеристики уравнения (12) соответственно через $B'(0,\bar{b})$ и $C'(0,-\bar{b})$, где $(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{2}{n+2}}\bar{a}^{\frac{m+2}{n+2}}<\bar{b}<(\frac{n+2}{m+2})^{\frac{2}{n+2}}a^{\frac{m+2}{n+2}}$, $B_2=B'B_2\cap AB$, $B_2'=B'B_2'\cap A'B$, $C_2=AC\cap C'C_2$, $C_2'=A'C\cap C'C_2'$. Тогда (см. рис. 4)

$$\tilde{B}'\tilde{B}_2:\ -\frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=\frac{1}{n+2}\bar{b}^{\frac{n+2}{2}};\quad \tilde{B}'\tilde{B}_2':\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}$$

$$+\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=\frac{1}{n+2}\bar{b}^{\frac{n+2}{2}};$$

$$\tilde{C}'\tilde{C}_2:\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}+\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=-\frac{1}{n+2}\bar{b}^{\frac{n+2}{2}};\quad \tilde{C}'\tilde{C}_2:\ \frac{1}{m+2}u^{\frac{m+2}{2}}$$

$$-\frac{1}{n+2}v^{\frac{n+2}{2}}=-\frac{1}{n+2}\bar{b}^{\frac{n+2}{2}}.$$

Легко видно, что:

д) Если $\partial G = B_2A \cup AC_2 \cup B_2'A' \cup A'C_2' \cup B_2B' \cup B'B_2' \cup C_2C' \cup C'C_2' \cup B_1A_1 \cup A_1C_1 \cup C_1A_1' \cup A_1'B_1$, то рассматриваемая поверхность S будет жесткой, когда граница $\Pi^{-1}(B_2A \cup AC_2 \cup B_2'A' \cup A'C_2')$ фиксирована или вдоль нее $\zeta = \text{const}$, а остальная часть границы свободная;

е) Если $\partial G = B_2A \cup AC_2 \cup C_2C' \cup C'C_1 \cup C_1A_1 \cup A_1B_1 \cup B_1B' \cup B'B_2 (\partial G$ $B_2'A' \cup A'C_2' \cup C_2'C' \cup C'C_1 \cup C_1A_1' \cup A_1'B_1 \cup B_1B' \cup B'B_2')$, то поверхность S будет жесткой, когда граница $\Pi^{-1}(B_2A \cup AC_2)(\Pi^{-1})(B_2'A' \cup A'C_2')$ фиксирована или вдоль нее $\zeta = \text{const}$, а остальная часть границы свободная.

4. В этом пункте укажем другие достаточные условия жесткости рассматриваемых классов поверхностей, которые вытекают из некоторых известных результатов в теории уравнений смешанного типа.

В работах [3; 4; 5] исследованы краевые задачи соответственно для уравнений

$$v\zeta_{uu} + u\zeta_{vv} = 0, \tag{19}$$

$$|v|^k\zeta_{uu} + \operatorname{sgn}(uv)\,|u|^k\zeta_{vv} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

$$|v|^\alpha\zeta_{uu} + \operatorname{sgn}(uv)\,|u|^\alpha\zeta_{vv} = 0, \quad \alpha = \text{const} > 0, \tag{21}$$

когда D — характеристическая область. Из единственности решения этих задач, которая доказана при помощи принципа максимума [6], вытекают:

Утверждение 1. *Поверхность класса* (1), (1°)—(4°), (а) *при* $m = n$, *когда* $\partial G = CB \cup BA \cup AD \cup DC (\partial D = \Lambda(\partial G) = \tilde{C}\tilde{B} \cup \tilde{B}\tilde{A} \cup \tilde{A}\tilde{D} \cup \tilde{D}\tilde{C}$, см. рис. 2, *где дуги* $\tilde{C}\tilde{B}$, $\tilde{A}\tilde{D}$ *и* $\tilde{C}\tilde{D}$ — *характеристики, а* $\tilde{A}\tilde{B}$ — *кусочно-гладкая линия*) *жестка в классе* $C(\bar{G}) \cup C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если граница* $\Pi^{-1}(BA \cup CD)$ *фиксирована или вдоль нее* $\zeta = c_0 = \text{const}$, *а граница* $\Pi^{-1}(BC \cup AD)$ *свободна*;

Следствие 1. *Поверхность класса* (1), (1°)—(5°), (а) *при* $m = n$, $\partial G = CB \cup BA \cup AD \cup DC$, *жестка в классе* $C(\bar{G}) \cup C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если* $\zeta = ax(s) + by(s) + c$ *вдоль* $\Pi^{-1}(AB \cup CD)$, *а граница* $\Pi^{-1}(BC \cup AD)$ *свободна.*

В работе [7] исследована краевая задача для уравнения (19) в области D, $\partial D = \tilde{A}\tilde{B} \cup \tilde{B}\tilde{B}' \cup \tilde{B}'\tilde{A}' \cup \tilde{A}'\tilde{A}$ (см. рис. 2), где $\tilde{A}\tilde{A}'$ и $\tilde{B}\tilde{B}'$ — характеристики уравнения (19), $\tilde{A}\tilde{B}$ и $\tilde{A}'\tilde{B}'$ — гладкие дуги, удовлетворяющие условию Ляпунова, т. е. тангенс угла, составленного касательной $\tilde{A}\tilde{B}(\tilde{A}'\tilde{B}')$ с выбранным постоянным направлением, удовлетворяет условию Гельдера. Для дуг $\tilde{A}\tilde{B}$ и $\tilde{A}'\tilde{B}'$ предполагается еще, что оканчиваются сколь угодно малой длины дужками нормального контура $|u|^3 + |v|^3 = 1$ и расположены симметрично относительно начала координат. Из единственности решения задачи следуют:

Утверждение 2. *Поверхность класса* (1), (1°)—(4°), (а) *при* $m = n = 1$, *где* $\partial G = AB \cup BB' \cup B'A' \cup A'A (G = \Lambda^{-1}(D))$ *жестка в классе* $C(\bar{G}) \cap C^1(G \setminus CD) \cap C^2(G \setminus (AB' \cup BA' \cup CD))$ $(CD = CO \cup OD$, *где* $\tilde{G}\tilde{O}$ *и* $\tilde{O}\tilde{D}$ — *характеристики, а* $\tilde{A}\tilde{B}'$ *и* $\tilde{B}\tilde{A}'$ — *линии вырождения уравнения* (19)) *б. м. изгибаний, если граница* $\Pi^{-1}(AB \cup A'B' \cup BC \cup A'D)$ *фиксирована или вдоль нее* $\zeta = c_0 = \text{const}$, *а граница* $\Pi^{-1}(AD \cup CB')$ *свободна.*

Следствие 2. *Поверхность класса* (1), (1°)—(5°), (а) *при* $m = n = 1$, *где* $\partial G = AB \cup BB' \cup B'A' \cup A'A$ *жестка в классе* $C(\bar{G}) \cap C^1(G \setminus CD) \cap C^2(G$

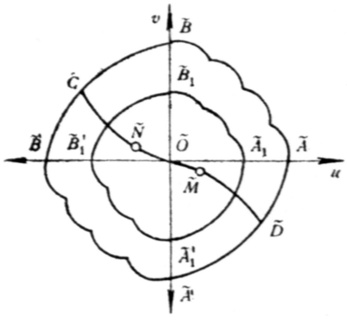

Рис. 1

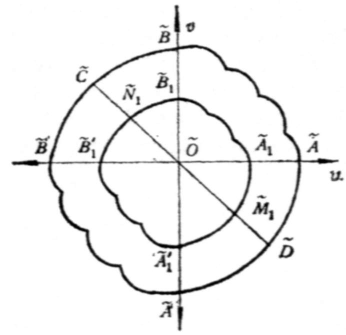

Рис. 2

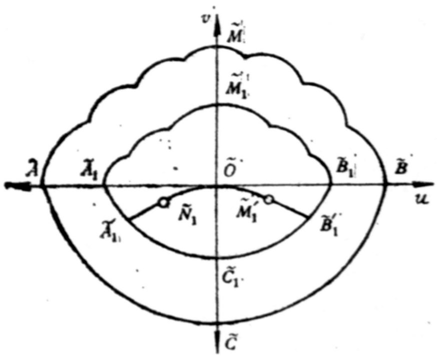

Рис. 3

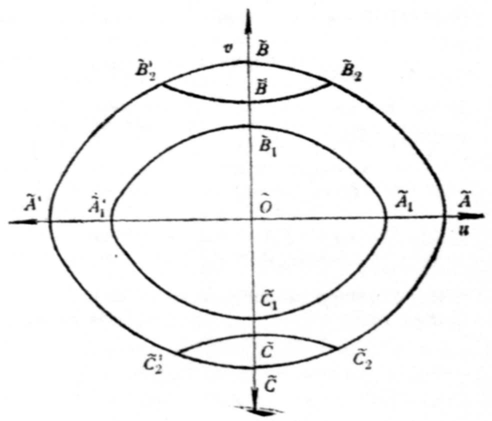

Рис. 4

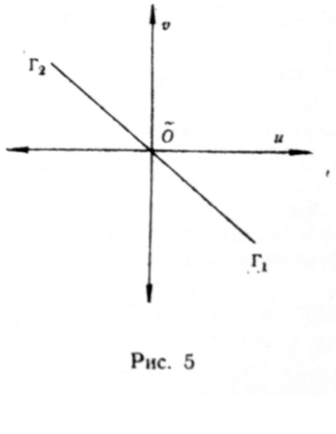

Рис. 5

$\diagup(AB' \cup BA' \cup CD))$ *б. м. изгибаний, если* $\zeta = ax(s) + by(s) + c$ *вдоль* $\Pi^{-1}(AB \cup A'B' \cup BC \cup A'D)$, *а граница* $\Pi^{-1}(AD \cup CB')$ *свободна.*

В работе [4] исследована еще краевая задача для уравнения (20), когда область $D = \{(u, v): u + v > 0\}$ (см. рис. 5). Из единственности задачи, которая доказана при помощи интегральных уравнений, следует

Утверждение 3. *Поверхность класса* (1), (1°)--(4°), (а) *при* $m = n$, m — *целое число, где* $\partial G = \Lambda^{-1}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)(\Gamma_1: v = -u < 0$ *и* $\Gamma_2: u = -v < 0$ — *характеристики уравнения* (20)) *жестка в классе* $C(\overline{G}) \cap C^2(G \diagdown \Lambda^{-1}(Ou \cup Ov)$ *б. м. изгибаний, если* $\zeta = 0$ *вдоль* $\Pi_0^{-1}\Lambda^{-1}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ *и на бесконечности* $\zeta \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Ефимов. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей. *Успехи мат. наук*, **3**, 1948, № 2, 47—158.
2. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции. Москва, 1959.
3. М. М. Зайнулабидов. О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. *Дифференц. уравнения*, **5**, 1969, № 1, 91—99.
4. О. И. Маричев. Краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. *Весці АН БССР*, № 5, 1970, 21—29.
5. Хе Кан Чер. О задаче Трикоми для одного уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения. Сб. *„Динамика сплошной среды"*, вып. 16, Новосибирск, 1974, 112—119.
6. А. В. Бицадзе. Уравнения смешанного типа. Москва, 1959.
7. М. М. Зайнулабидов. Краевая задача для уравнений смешанного типа с двумя пересекающимися линиями вырождения. *Дифференц. уравнения*, **6**, 1970, № 1, 99—108.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 12. 1. 1982 г.