Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О РАБОТАХ И. В. ЦЕНОВА ПО КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

В. А. АБИЛОВ

Иван Васильевич Ценов родился в 1906 году в деревне Сарабуз Симферопольского района Крымской области. Его родители были болгары, которые жили в ту пору в Крымской области.

В 1929 году И. В. Ценов окончил физико-технический факультет Крымского педагогического института.

В 1958 году при математическом институте имени В. А. Стеклова АН СССР он защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по теории приближения функций.

С 1959 года по настоящее время И. В. Ценов работает в Дагестане. (Дагестанская АССР входит в состав РСФСР. Население — 1 600 000, столица — Махачкала.)

Математические работы И. В. Ценова относятся главным образом к теории приближения функций. Ему принадлежит также ряд работ по вопросам преподавания математики в школе.

Педагогическая деятельность И. В. Ценова характеризуется ясностью и подробностью изложения, частым обращениям к примерам и задачам. Он не только обладает мастерством лектора, но горячо любит дело преподавания и относится к нему с исключительной добросо-, вестностью. Требуя от студентов широкой эрудиции в области литературы по специальности И. В. Ценов в то же время подчеркивает важность детального изучения одного-двух полных курсов или монографий по математическому анализу, которые, по его мысли, должны образовать как бы общий прочный остов математических значений. Интересы И. В. Ценова не ограничиваются узкой специальностью, он проявляет большой интерес к истории науки и культуры. Много сил и душевной теплоты отдает И. В. Ценов воспитанию молодых научных кадров нашей республики.

В 1969 году И. В. Ценову присвоено звание заслуженного учителя школы Дагестанской АССР.

В настоящее время И. В. Ценов находится в расцвете творческих сил, активно участвуя в общественно-научной жизни республики, неустанно обучая и воспитывая новые поколения студентов и молодых ученых.

Остановимся теперь вкратце на содержании этой небольшой работы. Заметим, что выбор материала, прежде всего, отражает интересы автора.

Раздел 1 посвящен некоторым исследованиям И. В. Ценова. Здесь мы приводим отдельные результаты И. В. Ценова по теории приближения функций, которые получили дальнейшее развитие в работах либо его учеников, либо участников его университетского семинара по конструктивной теории функций.

В 2 мы приводим ряд результатов Г. Я. Ярахмедова, чьи научные интересы сложились под влиянием И. В. Ценова.

В 3, в основном, даны формулировки определений и теорем, доказанных М. С. Алиевым — учеником И. В. Ценова.

В 4 мы формулируем ряд утверждений, доказанных И. И. Шарапудиновым и связанных с интересным обобщением одной теоремы И. В. Ценова. В этой работе, а также в ряде других работ И. И. Шарапудинова, чувствуется благоприятное влияние И. В. Ценова.

В 1967 году И. В. Ценов на семинаре обратил наше внимание на задачу о „перемежаемости" корней полиномов, наименее уклоняющихся от нуля в пространстве $L_p[a, b]$.

В 5 мы даем ее решение.

Наконец, отметим, что мы приводим доказательства теорем тогда и только тогда, когда они связаны одной общей идеей.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 10, 1984, с. 317—336.

В заключение, пользуясь случаем, хочу выразить глубокую признательность Ивану Васильевичу, который привлек меня к тематике теории приближения функций, следил за моей работой и давал ряд ценных советов и указаний.

1. 1.1. В этом пункте мы остановимся на некоторых результатах И. В. Ценова [26], связанных с вопросами приближения функций в пространстве $L_p\,[a,\ b]$. Для дальнейшего напомним, что система непрерывных и линейно независимых на отрезке $[a,\ b]$ функций $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ называется системой Чебышева, если полином $P_n(x)=\Sigma_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$ имеет не более n различных нулей на $[a,\ b]$.

Теорема 1.1 *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ образуют систему Чебышева на $[a,\ b]$ и*

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx=0 \quad (k=0,\ 1, \ldots, n), \tag{1.1}$$

то или $f(x)\equiv 0$, или найдутся $n+2$ точки $a<x_0<x_1<\ldots<x_{n+1}<b$ такие, что $\operatorname{sign} f(x_i) . \operatorname{sign} f(x_{i+1})=-1$ $(i=0, 1, \ldots, n)$.

Доказательство. Допуская, что $f(x)\neq 0$, предположим $f(x)\geqq 0$ для всех $x\in[a,\ b]$. Тогда для полинома $P_n(x)=\Sigma_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)>0$ будем иметь, что $\int_a^b f(x)\ P_n(x)\,dx>0$, но это находится в противоречии с (1.1). Пусть далее, при условиях теоремы для точек $a<x_0<x_1<\ldots<x_k<b$, где $k\leqq n$, имеем $\operatorname{sign} f(x_i) . \operatorname{sign} f(x_{i+1})=-1$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$ и не существует другой системы точек, содержащей более чем $k+1$ точек, для которой выполнялись бы последние соотношения. В таком случае для функции $f(x)$ можно указать k корней $a<x_1'<x_2'<\ldots<x_k'<b$ таких, что на любом из сегментов $[a,\ x_1']$, $[x_1',\ x_2'], \ldots, [x_k',\ b]$ функция $f(x)$ не меняет знака, причем если на некотором из них $f(x)\geqq 0\ (\leqq 0)$, то на следующем $f(x)\leqq 0\ (\geqq 0)$. Как показали С. Н. Бернштейн [14, стр. 9—11] и М. Г. Крейн [13, стр. 195], существует полином $Q_n(x)=\Sigma_{k=0}^n c_k \varphi_k(x)$, который меняет знак в точках $x_1',\ x_2', \ldots, x_k'$ и только в этих точках и, следовательно, $\int_a^b f(x)\ Q_n(x)\,dx\neq 0$, что находится в противоречии с условиями (1.1).
Теорема доказана.

Теорема 1.2. *Для того чтобы полином $P_n^*(x)=\Sigma_{k=0}^n a_k^* \varphi_k(x)$ реализовал минимум интеграла*

$$\int_a^b |f(x)-P_n(x)|^p\,dx, \tag{1.2}$$

где $p>1$, $f(x)$ — непрерывная функция на $[a,\ b]$, необходимо и достаточно выполнение равенств:

$$\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1}\,\varphi_k(x)\operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]\,dx=0\ (k=0,\ 1, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Доказательство. Необходимость. Функция

$$J(a_0, a_1, \ldots,\ a_n)=\int_a^b \Bigl|f(x)-\sum_{k=0}^n a_k\,\varphi_k(x)\Bigr|^p\,dx,$$

очевидно, имеет частные производные по $a_0, a_1, \ldots, a_n$ в любой точке $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, причем

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = p \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) \right|^{p-1} \varphi_k(x) \operatorname{sign}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) \right] dx = 0$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n).$$

И, следовательно, для полинома $P_n^*(x)$, реализующего минимум интеграла (1.2), осуществляются равенства (1.3).

Достаточность. Допуская для полинома $Q_n(x)$ осуществление равенств (1.3), докажем, что $Q_n(x)$ реализует минимум интеграла (1.2). Если через $P_n^*(x)$ мы обозначим полином, реализующий минимум интеграла (1.2), то, как мы сейчас показали, для него будут осуществляться равенства (1.3). Мы теперь, очевидно, имеем

$$\int_a^b \{ |f(x) - Q_n(x)|^{p-1} \operatorname{sign}[f(x) - Q_n(x)] - |f(x) - P_n^*(x)|^{p-1} \operatorname{sign}[f(x) - P_n^*(x)] \}$$

$$\varphi_k(x)\, dx = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, n)$$

и, следовательно, в силу теоремы 1.1, в интервале (a, b) найдутся точки $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} < b$, в которых

$$|f(x_i) - Q_n(x_i)|^{p-1} \operatorname{sign}[f(x_i) - Q_n(x_i)] = |f(x_i) - P_n^*(x_i)|^{p-1} \operatorname{sign}[f(x_i)$$

$$- P_n^*(x_i)] \ (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Отсюда, очевидно, имеем, что

$$|f(x_i) - Q_n(x_i)|^{p-1} = |f(x_i) - P_n^*(x_i)|^{p-1}, \ \operatorname{sign}[f(x_i) - Q_n(x_i)]$$

$$= \operatorname{sign}[f(x_i) - P_n^*(x_i)] \ (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Последние два равенства показывают, что $f(x_i) - Q_n(x_i) = f(x_i) - P_n^*(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, т. е. $P_n^*(x_i) = Q_n(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Откуда $P_n^*(x) \equiv Q_n(x)$.

Теорема 1.3. *Если полином $P_n^*(x) = \Sigma_{k=0}^n a_k^* \varphi_k(x)$ реализует минимум интеграла*

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) \right|^p dx,$$

где $p > 1$, $f(x)$ — непрерывная функция на $[a, b]$, то можно найти такие $n+2$ точки $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} < b$, в которых

(1.4) $\operatorname{sign}[f(x_i) - P_n^*(x_i)] \cdot \operatorname{sign}[f(x_{i+1}) - P_n^*(x_{i+1})] = -1 \ (i = 0, 1, \ldots, n).$

Доказательство. Пусть полином $P_n^*(x)$ реализует минимум интеграла $\int_a^b |f(x) - P_n(x)|^p dx$. В таком случае, в силу теоремы 1.2, для этого полинома имеем

$$\int_a^b |f(x) - P_n^*(x)|^{p-1} \varphi_k(x) \operatorname{sign}[f(x) - P_n^*(x)]\, dx = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Так как функция $F(x)=|f(x)-P_n^*(x)|^{p-1}\operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]$, очевидно, непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме 1.1 можно найти $n+2$ точек $a<x_0<x_1<\ldots<x_{n+1}<b$, в которых $\operatorname{sign} F(x_i)\cdot\operatorname{sign} F(x_{i+1})=-1$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, т. е. выполняются равенства (1.4).

Следствие. *Если $p>1$, то уравнение $f(x)-P_n^*(x)=0$ имеет в интервале (a, b) по крайней мере $n+1$ корней, т. е. $P_n^*(x)$ есть интерполяционный полином Лагранжа для функции $f(x)$.*

Если же $p=1$, то уравнение $f(x)-P_n^*(x)=0$ также имеет не менее $n+1$ корней ([12, стр. 98—99]; [25]).

Замечание. Легко показать, что при $p=1$ теорема 1.3 может не иметь места.

Теперь мы приведем обобщение теоремы 1.2, которое также принадлежит И. В Ценову.

Пусть функции $f(x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ принадлежат $L_p[a, b]$ $(p>1)$ и, кроме того, функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно независимы на отрезке $[a, b]$.

Хорошо известно [23 стр. 16—18], что, с точностью до множества меры нуль, существует единственный полином $P_n^*(x)=\Sigma_{k=0}^n a_k^*\varphi_k(x)$, реализующий минимум интеграла

$$\int_a^b \Big|f(x)-\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k(x)\Big|^p dx.$$

Напишем неравенства ([18, стр. 187] и [19, стр. 107—108]), которыми мы будем пользоваться:

$$|a+b|^p\geqq|a|^p+p|a|^{p-1}b\operatorname{sign} a+c(p)|b|^p \quad (p\geqq 2), \tag{1.5}$$

$$|a+b|^p\geqq|a|^p+p|a|^{p-1}b\operatorname{sign} a+c(p)\frac{|b|^2}{\overline{|a|^{2-p}+|b|}^{2-p}} \quad (1<p<2), \tag{1.6}$$

$$|a+b|^p\leqq|a|^p+p|a|^{p-1}b\operatorname{sign} a+A(p)(|b|^p+|a|^{p-2}|b|^2) \quad (p>2), \tag{1.7}$$

$$|a+b|^p\leqq|a|^p+p|a|^{p-1}b\operatorname{sign} a+A(p)|b|^p \quad (1<p\leqq 2). \tag{1.8}$$

Здесь a и b — произвольные действительные числа, а $C(p)$ и $A(p)$ — постоянные, не зависящие от a и b, причем $C(p)>0$ и $A(p)>1$. Аналогичные неравенства были доказаны и И. В. Ценовым. Мы не будем приводить их доказательства.

Теорема 1.4. *Для того чтобы полином $P_n^*(x)=\Sigma_{k=0}^n a_k^*\varphi_k(x)$ реализовал минимум интеграла*

$$\int_a^b \Big|f(x)-\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k(x)\Big|^p dx \quad (p>1), \tag{1.9}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1}\varphi_k(x)\operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]\,dx=0 \quad (k=0, 1, \ldots, n) \tag{1.10}$$

или

$$\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1}Q_n(x)\operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]\,dx=0 \tag{1.11}$$

для любого полинома $Q_n(x)=\Sigma_{k=0}^n a_k\varphi_k(x)$. *Напомним, что здесь* $f(x)$, $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ *принадлежит пространству* $L_p[a, b]$ $(p>1)$, *а функции* $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ *образуют линейно независимую систему функций.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $P_n^*(x)$ реализует минимум интеграла (1.9). Если $1<p\leqq 2$, то для любого полинома $P_n(x)$ из неравенства (1.9) получаем

$$\int_a^b |f(x)-P_n(x)|^p\,dx\leqq\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^p\,dx \tag{1.12}$$

$$+p\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1}Q_n(x)\operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]\,dx+A(p)\int_o^b |Q_n(x)|^p\,dx,$$

где $Q_n(x)=P_n^*(x)-P_n(x)$.

Допустим, что существует такой полином $R_n(x)$, для которого

$$I=\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1}R_n(x)\operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]\,dx\neq 0.$$

Полагая в (1.12) $Q_n(x)=\lambda R_n(x)$ и $H_n(\lambda, x)=P_n^*(x)-\lambda Q_n(x)$, получаем

$$\int_a^b |f(x)-H_n(\lambda, x)|^p dx-\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^p\,dx \tag{1.13}$$

$$\leqq\lambda\left[I+A(p)\frac{|\lambda|^p}{\lambda}\int_a^b |R_n(x)|^p\,dx\right].$$

Если $I>0$, то при отрицательном и достаточно малом по абсолютной величине λ правая часть (1.13) будет отрицательна и, следовательно, приходим к очевидному противоречию. Если же $I<0$, то при достаточно малом положительном λ, очевидно, снова придем к противоречию. Итак, справедливость (1.11) доказана для случая $1<p\leqq 2$.

Аналогично устанавливается справедливость равенства (1.11) для полинома $P_n^*(x)$, реализующего минимум интеграла (1.9), и для случая $p>2$.

Достаточность. Допуская, что осуществляется (1.11), из неравенства (1.5) для $p\geqq 2$ получаем

$$\int_a^b |f(x)-P_n(x)|^p\,dx\geqq\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^p\,dx+C(p)\int_a^b |P_n^*(x)-P_n(x)|^p\,dx$$

и, следовательно, полином $P_n^*(x)$ реализует минимум интеграла (1.9). Если же $1<p<2$, то применяя неравенство (1.6), приходим к тому же заключению. Теорема доказана.

Мы привели здесь подробные доказательства теорем 1.2 и 1.4, потому что они, во-первых, различны; а во-вторых, интересно их сравнить с результатами раздела 2.

1.2. В этом пункте мы приведем некоторые результаты И. В. Ценова, связанные с вопросами приближения функций интерполяционными полиномами [25].

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют в интервале (a, b) производные $n+1$ порядка. Обозначим через $P_n(f; x)$ и $P_n(\varphi; x)$ интерполяционные полиномы Лагранжа функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, определяемые одной и той же системой узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$, принадлежащих отрезку $[a, b]$.

Рассмотрим функцию $\Phi(z) = [f(x) - P_n(f; x)]\, [\varphi(z) - P_n(\varphi; z)] - [f(z) - P_n(f; z)]\, [\varphi(x) - P_n(\varphi; x)]$, где $x \in [a, b]$, $x \neq x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — фиксированная точка. Так как $\Phi(x) = \Phi(x_0) = \Phi(x_1) = \ldots = \Phi(x_n)$, то по теореме Ролля $\Phi^{(n+1)}(\xi) = 0$, где ξ — некоторая точка, заключенная между наименьшим и наибольшим из чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и, следовательно,

$$[f(x) - P_n(f; x)]\, \varphi^{(n+1)}(\xi) = [\varphi(x) - P_n(\varphi; x)]\, f^{(n+1)}(\xi). \tag{1.14}$$

Т е о р е м а 1.5. *Пусть $x_k \in [a, b]$ $[k = 0, 1, \ldots, n)$ — любая система узлов. Пусть, далее, для любой точки $x \in (a, b)$ будет $|f^{(n+1)}(x)| < |\varphi^{(n+1)}(x)|$. Тогда для любого $x \in [a, b]$, $x \neq x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ имеет место неравенство*

$$|f(x) - P_n(f; x)| < |\varphi(x) - P_n(\varphi; x)|. \tag{1.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $|f^{(n+1)}(x)| < |\varphi^{(n+1)}(x)|$ $(x \in (a, b))$, то $\varphi^{(n+1)}(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$. Поэтому из интерполяционной формулы Лагранжа

$$\varphi(x) = P_n(\varphi; x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(n+1)!}\, \varphi^{(n+1)}(\xi)$$

следует, что $\varphi(x) - P_n(\varphi; x)$ обращается в нуль только в точках $x_k \in [a, b]$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Если $f^{(n-1)}(x) = 0$, когда $x \in (a, b)$, то из (1.14) следует (1.15).

Если же $f^{(n+1)}(x) = 0$, то в каждой точке ξ, для которой $f^{(n+1)}(\xi) = 0$, мы получаем из (1.14), что $f(x) - P_n(f : x) = 0$ и, значит, и в этом случае выполняется (1.15).

Т е о р е м а (С. Н. Б е р н ш т е й н). *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и в интервале (a, b) имеют производные $n+1$ порядка. Если для всех точек интервала (a, b) будет $|f^{(n+1)}(x)| < |\varphi^{(n+1)}(x)|$, то $E_n(f) < E_n(\varphi)$.*

(Напомним, что здесь $E_n(\cdot)$ — наилучшее равномерное приближение непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции алгебраическими многочленами порядка не выше n).

Д о к а з а т е л ь с т в о (И. В. Ц е н о в). Пусть $Q_n(\varphi; x)$ — полином, наименее уклоняющийся от функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$, т. е. $E_n(\varphi) = \max_{a \leq x \leq b} |\varphi(x) - Q_n(\varphi; x)|$. Тогда, как известно, разность $\varphi(x) - Q_n(\varphi; x)$ принимает значения $\pm E_n(\varphi)$ не менее $n+2$ раза с последовательной переменой знака. Учитывая, что $\varphi^{(n+1)}(x)$ не обращается в нуль в интервале (a, b), заключаем, что уравнение $\varphi(x) - Q_n(\varphi; x) = 0$ имеет в (a, b) строго $n+1$ различных корней. Итак, $Q_n(\varphi; x)$ есть интерполяционный многочлен Лагранжа, определяемый некоторой системой узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и связанный с функцией $\varphi(x)$. Применяя неравенство (1.15) к этой системе узлов, получим, что $|f(x)-P_n(f;x)|<|\varphi(x)-Q_n(\varphi;x)|$. Отсюда, очевидно, следует, что $E_n(f)<E_n(\varphi)$. Теорема доказана.

Отметим, что это простое доказательство теоремы С. Н. Бернштейна, предложенное И. В. Ценовым, вошло в монографии по теории приближения функций ([23, стр. 74—77]; [17, стр, 250—252]; [38, стр. 38]).

Теорема 1.6. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют производные $n+1$ порядка в интервале (a, b). Если для всех точек интервала (a, b) будет $|f^{(n+1)}(x)|<|\varphi^{(n+1)}(x)|$, то $E_n^{(p)}(f)<E_n^{(p)}(\varphi)$ $(p\geqq 1)$.*

Здесь $E_n^{(p)}(\cdot)$ — наилучшее приближение непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции алгебраическими многочленами порядка не выше n в метрике пространства $L_p[a, b]$.

Доказательство. Пусть $P_n^*(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше n, для которого

$$E_n^{(p)}(\varphi)=\left(\int_a^q|\varphi(x)-P_n^*(x)|^p\,dx\right)^{1/2}.$$

Примем какие-нибудь $n+1$ корней уравнения $\varphi(x)-P_n^*(x)=0$ за узлы интерполяции функции $\varphi(x)$. Неравенство (1.15), написанное для этой системы узлов нам даст, что $|f(x)-P_n(f;x)|<|\varphi(x)-P_n^*(x)|$. Так как последнее неравенсто имеет место и для точек x, отличных от узлов, то, очевидно, имеем

$$\int_a^b|f(x)-P_n(f;x)|^p\,dx<\int_a^b|\varphi(x)-P_n^*(x)|^p\,dx.$$

Отсюда следует, что $E_n^{(p)}(f)<E_n^{(p)}(\varphi)$.

В заключение этого пункта отметим, что формула (1.14), полученная И. В. Ценовым, позволила ему легко доказать теорему Шохота [39], которая утверждает, что если в интервале (a, b) существуют производные $f^{(n+1)}(x)$ и $\varphi^{(n+1)}(x)$, причем $\varphi^{(n+1)}(x)\neq 0$, то для некоторого $\xi\in(a,b)$ имеет место равенство $E_n(f)/E_n(\varphi)=|f^{(n+1)}(\xi)/|\varphi^{(n+1)}(\xi)|$. Эта теорема И. В. Ценовым распространена на случай пространства $L_p[a, b]$.

Теорема 1.7. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, непрерывные на отрезке $[a, b]$, имеют производные $n+1$ порядка в (a, b) и $\varphi^{(n+1)}(x)$ не обращается в нуль (a, b), то для некоторого $\xi\in(a, b)$ имеет место равенство*

$$E_n^{(p)}(f)/E_n^{(p)}(\varphi)=|f^{(n+1)}(\xi)|/|\varphi^{(n+1)}(\xi)|.$$

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы.

1.3. Обозначим через $S[a,b]$ множество всех суммируемых на отрезке $[a, b]$ функций. Множество $S[a, b]$ мы обратим в линейное нормированное пространство, если для $f(x)\in S[a, b]$ определим норму так:

$$\|f\|_S=\max_{E\subset[a,b]}\left|\int_E(x)\,dx\right|,$$

где $E=[a', b']$ — произвольный сегмент, содержащийся в $[a, b]$.

Теорема 1. 8. *Для того чтобы многочлен $P_n^*(x)=\Sigma_{k=0}^n a_k^*x^k$ наименее уклонялся от функции $f(x)\in S[a, b]$ в метрике пространства $S[a, b]$,* *необходимо и достаточно, чтобы существовало по крайней мере* $n+2$ *сегментов* $E_1, E_2, \ldots, E_{n+2}$, *содержащихся в* $[a, b]$, *и таких, что*:

а) *конец* E_i *совпадает с началом* E_{i+1} $(i=1, 2, \ldots, n+1)$,

б) $$\left| \int_{E_i} [f(x)-P_n^*(x)]\, dx \right| = \| f-P_n^* \|_S \quad (i=1, 2, \ldots, n+2),$$

в) *знаки интегралов*

$$\int_{E_i} [f(x)-P_n^*(x)]\, dx$$

последовательно чередуются.

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы. Отметим еще, что среди всех многочленов вида $x^n+\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ в метрике пространства $S|-1, 1|$ наименее уклоняется от нуля многочлен

$$\frac{1}{2^n} \frac{\sin (n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

По поводу этих утверждений см. [29].

1.4. Приведем теперь интерполяционные формулы, полученные И. В. Ценовым [17] для случая, когда интерполирование совершается обобщёнными полиномами, т. е. функциями вида

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \tag{1.16}$$

где функции $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ непрерывны и линейно независимы на отрезке $[a, b]$. Такие формулы часто применяются в вопросах приближения функций.

Пусть даны $2n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_i \neq x_j,\ i \neq j)$: $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Требуется построить полином вида (1.16), который в точках $x_k \in [a, b]$ $[k=1, 2, \ldots, n)$ принимает значения y_k $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Введем обозначения:

$$A_n=\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}, \quad B_n=\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_{n-1}(x_1) & y_2 \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_{n-1}(x_2) & y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_{n-1}(x_n) & y_2 \end{vmatrix},$$

$$A_{ni}(x)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_{i-1}) & \varphi_2(x_{i-1}) & \ldots & \varphi_n(x_{i-1}) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1(x_{i+1}) & \varphi_2(x_{i+1}) & \ldots & \varphi_n(x_{i+1}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что искомый полином имеет вид

$$P_n(x)=\frac{1}{A_n}\sum_{i=1}^{n} y_i A_{ni}(x) \tag{1.17}$$

Формула (1.17) представляет собой обобщение интерполяционной формулы Лагранжа на случай обобщенных полиномов вида (1.16).

Далее, И. В. Ценов показывает, что формула (1.17) может быть преобразована к виду

$$P_n(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_1)}y_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{A_{ii}(x)}{A_{i-1}A_i}B_i.$$

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть значения интерполируемой функции $f(x)$, т. е. $y_i=f(x_i)$, $x_i\in[a, b]$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, то из последней формулы можно получить интерполяционные формулы с остаточным членом, который легко преобразовать к виду, содержащему производные n-го порядка функций $f(x)$ $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ для некоторого значения $x=\xi$. Частные случаи этих результатов содержатся в работе [20].

1.5. В работе [30] И. В. Ценов рассматривает задачу о минимуме интеграла вида

$$\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x)\right|^{p_1}\left|f(x)-\sum_{i=1}^{m}b_i\psi_i(x)\right|^{p_2}dx, \tag{1.18}$$

где $p_i\geq 1$ $(i=1, 2)$, $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $\psi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$ — обычные системы Чебышева.

Имеет место следующая

Теорема 1.9. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, $P_n^*(x)$, $Q_m^*(x)$ — полиномы, обращающие в минимум интеграл* (1.18). *Тогда разность $f(x)-P_n^*(x)$ внутри $[a, b]$ имеет не менее $n+1$ простых нулей, а разность $f(x)-Q_m^*(x)$ — не менее $m+1$.*

Отметим, что пара полиномов, реализующая минимум интеграла (1.18), вообще говоря, не является единственной.

Мы не будем приводить здесь доказательства этих утверждений.

2. В начале 60-х годов И. В. Ценов обратил внимание Г. Я. Ярахмедова на возможность обобщения некоторых вопросов, относящихся к приближениям функций в пространстве $L_p[a, b]$ $(1\leq p\leq\infty)$. Этот параграф посвящен исследованиям Г. Я. Ярахмедова [32—36]. В [33] он показал, что теорема И. В. Ценова о том, что разность $f(x)-P_n^*(x)$ между данной функцией $f(x)\in C[a, b]$ и полиномом $P_n^*(x)$ по системе Чебышева, наименее уклоняющейся от $f(x)$ в метрике пространства $L_p[a, b]$, меняет знак на $[a, b]$ не менее $n+1$ раз, распространяется на случай, когда $f(x)\in L_p[a, b]$ $(1\leq p<\infty)$. В связи с этим обобщением им дается два определения перемены знака $\mathfrak{L}$-измеримой функции соответственно в „глобальном" и „локальном" смысле. Для числовых множеств E_1 и E_2 запись $E_1<E_2$ будет означать, что $\sup E_1\leq\inf E_2$.

Определение 2.1 (перемена знака в глобальном смысле). *Будем говорить, что $\mathfrak{L}$-измеримая функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, n раз гло-*

бально меняет знак на $[a, b]$, *если существует система из* $n+1$ *множеств* $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$, *обладающая свойствами*:

1) $$E_1 < E_2 < \ldots < E_{n+1}, \quad E_k \subset [a, b] \quad (k=1, 2, \ldots, n+1),$$

2) *функция* $f(x)$ *не эквивалентна нулю ни на одном из множеств* $E_1, E_2, \ldots, E_{n+1}$, *причём* $(-1)^{k-1} f(x) \geqq 0$ $(\leqq 0)$ *почти всюду на* E_k $(k=1, 2, \ldots, n+1)$.

Далее, если $f(x)$ глобально меняет знак на $[a, b]$ n раз, но не более, то будем говорить, что $f(x)$ глобально меняет знак на $[a, b]$ точно n раз. Если же $f(x)$ глобально меняет знак на $[a, b]$ n раз, каково бы ни было натуральное число n, то будем говорить, что она бесконечно много раз глобально меняет знак на $[a, b]$.

В работе [32] доказывается, что для того, чтобы $\mathscr{L}$-измеримая функция $f(x)$ глобально меняла знак на $[a, b]$ точно n раз, необходимо и достаточно, чтобы нашлись n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, таких, что:

1) $$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b,$$

2) *функция* $f(x)$ *не эквивалентна нулю ни на одном из отрезков* $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, *причем* $(-)^k f(x) \geqq 0$ $(\leqq 0)$ *почти всюду на* $[x_k, x_{k+1}]$ $(k=0, 1, \ldots, n)$.

Определение 2.2 (перемена знака в локальном смысле). *Будем говорить, что* $\mathscr{L}$*-измеримая функция* $f(x)$, *заданная на отрезке* $[a, b]$, *локально меняет знак в точке* $x_0 \in [a, b]$, *если существуют такие положительные числа* ε_1 *и* ε_2, *что* $f(x) \geqq 0$ $(\leqq 0)$ *почти всюду на* $(x_0-\varepsilon_1, x_0)$, $f(x) \leqq 0$ $(\geqq 0)$ *почти восюду на* $(x_0, x_0+\varepsilon_2)$, *причём* $f(x)$ *не эквивалентна нулю ни на одном из интервалов* $(x_0-\varepsilon_1, x_0)$, $(x_0, x_0+\varepsilon_2)$.

Далее, Г. Я. Ярахмедов дает обобщение понятия системы Чебышева. Систему $\mathscr{L}$-измеримых функций $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{mes}\left\{ x \in [a, b] : \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x) = 0, \ \sum_{k=0}^{n} a_k^2 > 0 \right\} = 0, \tag{2.1}$$

он называет обобщенной системой Чебышева на отрезке $[a, b]$, если произвольный полином $\Sigma_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$ глобально меняет знак на $[d, b]$ не более n раз. Указывается удобный необходимый и достаточный признак для того, чтобы система $\{\varphi_k(x)\}$ была обобщенной системой Чебышева.

Доказывается, что если суммируемые на $[a, b]$ функции $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ образуют обобщенную систему Чебышева на отрезке $[a, b]$, то каковы бы ни были точки $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ $(m \leqq n)$ интервала (a, b), существует полином $\Sigma_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$, который локально меняет знак в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и только в них.

Это утверждение обобщает упомянутую выше лемму С. Н. Бернштейна и М. Г. Крейна, когда непрерывные функции $\varphi_k(x)$ образуют систему Чебышева в классическом смысле.

Теперь мы можем сформулировать теоремы, доказанные Г. Я. Ярахмедовым, о которых мы говорили в начале параграфа.

Теорема 2.1. *Если* $f(x) \in L[a, b]$, *а* $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ *образуют обобщенную систему Чебышева на* $[a, b]$ *и* $\int_a^b f(x) \varphi_k(x)\, dx = 0$ $(k=0, 1$

..., n), то или $f(x)$ эквивалентна нулю, или не менее $n+1$ раз глобально меняет знак на $[a, b]$.

Теорема 2.2. *Пусть функции $f(x)$, $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ принадлежат пространству $L_p[a, b]$ $(1 \leqq n < \infty)$, причем $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ образуют обобщенную систему Чебышева на $[a, b]$, полином $P_n^*(x)$ реализуют минимум интеграла*

$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)|^p dx \quad (p>1),$$

а разность $f(x)-P_n^*(x)$ не менее $n+1$ раз глобально меняет знак на $[a, b]$.

Если mes $\{x \in [a, b] : f(x) = P_n^*(x)\} = 0$, *то теорема верна и для случая $p=1$.*

Замечание. Казалось бы, локальная перемена знака функции из L_p $[a, b]$ естественнее глобальной перемены, и теоремы 2.1 и 2.2 останутся верными и в смысле локальной перемены знака. Однако это не так. Кроме того, если отказаться от условия (2.1), наложенного на систему функций $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, то теоремы 2.1 и 2.2, вообще говоря, не будут иметь места.

Систему $\mathscr{L}$-измеримых функций $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ назовем обобщенной системой Маркова на $[a, b]$, если при любом $k \geqq 0$ функции $\varphi_i(x)$ $\times (i=0, 1, \ldots, k)$ образуют систему Чебышева на $[a, b]$.

Если $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots)$ — обобщенная система Маркова на $[a, b]$, φ_k $\times (x) \in L[a, b]$,

$$\| \varphi_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_i^* \varphi_i \|_{L[a, b]} = \inf \| \varphi_k - \sum_{i=0}^{k-1} a_i \varphi_i \|_{L[a, b]},$$

то разность

$$\Phi_k(x) = \varphi_k(x) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i^* \varphi_i(x)$$

точно k раз глобально меняет знак на $[a, b]$.

Ясно, что в условиях этого предложения найдется k и только k точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ интервала (a, b), в которых $\Phi_k(x)$ локально меняет знак. Тогда в предположении, что функции $\varphi_i(x)$ $(i=0, 1, \ldots, k)$ взяты из обобщенной системы Маркова, доказывается утверждение, которое служит в некотором смысле обобщением теоремы А. А. Маркова [12, стр. 96]:

пусть $f(x)$, $\varphi_i(x) \in L[a, b]$ $(i=0, 1, \ldots, k)$, если разность $f(x) - \Sigma_{i=0}^{k-1} a_i^*$ $\times \varphi_i(x)$ локально меняет знак в точках $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (в которых локально меняет знак функция $\Phi_k(x)$) и точно k раз глобально меняет знак на $[a, b]$, то полином $P_{k-1}^*(x) = \Sigma_{i=0}^{k-1} a_i^* \varphi_i(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в метрике $L[a, b]$ среди всех полиномов по системе $\varphi_i(x)$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$, причем

$$\| f - P_{k-1}^* \|_{L[a, b]} = \left| \int_a^b f(x) \operatorname{sign} \Phi_k(x)\, dx \right| \cdot$$

Определения о перемене знака, приведенные выше, дали возможность Г. Я. Ярахмедову получить своеобразный аналог основной теоремы Чебышева (теорема об альтернансе) и некоторые другие результаты о приближении функций в метрике $M[a, b]$ — пространства измеримых, почти везде ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций [34].

Заканчивая этот параграф, приведем еще одну теорему, доказанную Г. Я. Ярахмедовым [36]. По характеру доказательства она также примыкает к результатам раздела 1.

Лемма. *Каковы бы ни были действительные числа a и b, $a \neq 0$, справедливы неравенства*

$$|a+b|^p \leq |a|^p + p|a|^{p-1} b \operatorname{sign} a + A|b|\,|\alpha|^{p-1}, \tag{2.2}$$

$$|a+b|^p \leq |a|^p + p|a|^{p-1} b \operatorname{sign} a \quad (|b| < |a|). \tag{2.3}$$

Здесь $0<p<1$, а A — абсолютная постоянная.

Пусть, далее, $f(x)$, $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ принадлежат $L_p[a, b]$ $(0<p<1)$ и, кроме того, $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ линейно независимы. Легко показать, что существует хотя бы один полином $P_n^*(x)=\Sigma_{k=0}^n a_k^* \varphi_k(x)$, который реализует минимум интеграла

$$\int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{x} a_k \varphi_k(x) \right|^p dx \quad (0<p<1). \tag{2.4}$$

Теорема 2.3. *Пусть полином $P_n^*(x)$ реализует минимум интеграла* (2.4) *и*

$$\left| \int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1} \varphi_k(x) \operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]dx \right| < \infty \quad (k=0, 1, \ldots, n). \tag{2.5}$$

Тогда, если $\operatorname{mes}\{x \in [a, b] : f(x)=P_n^*(x)\}=0$, *то*

$$\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1} \varphi_k(x) \operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]dx = 0 \quad (k=0, 1, \ldots, n). \tag{2.6}$$

Доказательство. Предположим, что при некотором $k=k_0$, $0 \leq k \leq n$ интеграл

$$I_{k_0} = \int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1} \varphi_{k_0}(x) \operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]dx \neq 0.$$

Введем обозначения

$$E_1 = \{x \in [a, b] : |\varepsilon\varphi_{k_0}(x)| < |f(x)-P_n^*(x)|\},$$

$$E_2 = \{x \in [a, b] : |\varepsilon\varphi_{k_0}(x)| \geq |f(x)-P_n^*(x)|\}.$$

Здесь ε — любое действительное число.

В силу (2.2),

$$\begin{aligned} \int_{E_2} |f(x)-P_n^*(x)+\varepsilon\varphi_{k_0}(x)|^p dx - \int_{E_2} |f(x)-P_n^*(x)|^p dx \\ \leq p\varepsilon \int_{E_2} |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1} \varphi_{k_0}(x) \operatorname{sign}[f(x)-P_n^*(x)]dx \\ + A|\varepsilon| \int_{E_2} |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1} |\varphi_{k_0}(x)|\, dx, \end{aligned} \tag{2.7}$$

Существование последнего интеграла в (2.7) следует из (2.5).

Далее, из (2.3) вытекает

$$\int_{E_1} |f(x)-P_n^*(x)+\varepsilon\varphi_{k_0}(x)|^p dx - \int_{E_1} |f(x)-P_n^*(x)|^p dx \tag{2.8}$$
$$\leq p\varepsilon \int_{E_1} |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1}\varphi_{k_0}(x)\,\mathrm{sign}\,[f(x)-P_n^*(x)]dx.$$

Сложив (2.7) и (2.8), получим

$$\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)+\varepsilon\varphi_{k_0}(x)|^p dx - \int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^p dx$$
$$\leq \varepsilon[pJ_{k_0}+A\,\mathrm{sign}\,\varepsilon \int_{E_2} |f(x)-P_n^*(x)|^{p-1}|\varphi_{k_0}(x)|\,dx].$$

Так как $\mathrm{mes}\,E_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то, в силу абсолютной непрерывности последнего интеграла, выражение в квадратных скобках при достаточно малом по абсолютной величине ε будет иметь знак интеграла J_{k_0}. В таком случае, очевидно, существует ε_0, что

$$\int_a^b |f(x)-P_n^*(x)+\varepsilon_0\varphi_{k_0}(x)|^p dx < \int_a^b |f(x)-P_n^*(x)|^p dx,$$

т. е. получается противоречие. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Если $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ — обобщенная система Чебышева на $[a, b]$, то в условиях теоремы 2.3 разность $f(x)-P_n^*(x)$ меняет знак на $[a, b]$ не менее $n+1$ раз.*

Укажем теперь на существенность условий в последней теореме.

Пусть $a=-1$, $b=1$, $\varphi_0(x)\equiv 1$, $p=1/2$,

$$f(x)=\begin{cases} -x^2, & -1\leq x\leq 0, \\ x^2, & 0\leq x\leq 1. \end{cases}$$

Тогда $P_0^*(x)\equiv 0$, однако интеграл

$$\int_{-1}^{1} |f(x)-P_0^*|^{-1/2}\,\mathrm{sign}\,[f(x)-P_0^*(x)]dx$$

даже не имеет смысла. Нарушены условия (2.5).

Пусть вновь $a=-1$, $b=1$, $\varphi_0(x)\equiv 1$, $p=1/2$, $\alpha>3$,

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -1\leq x< -1/\alpha, \\ \alpha x, & -1/\alpha\leq x\leq 1/\alpha, \\ 1, & 1/\alpha\leq x\leq 1. \end{cases}$$

Пусть, далее,

$$J(c)=\int_{-1}^{1} |f(c)-C|^{1/2}dx \quad (-\infty<c<\infty).$$

Нетрудно показать, что $\min_c J(c)=J(-1)=J(+1)$. Из этого примера видно, что

1) условие $\operatorname{mes}\{x \in [a, b] : f(x) = P_n^*(x)\} = 0$
существенно в теореме 2.3; равенства (2.5) невыполнены;

2) в отличие от строго нормированного пространства $L_p(p>1)$ полином наулучшего прнближения в $L_p(0<p<1)$, вообще говоря, не единствен;

3) $L_p(0<p<1)$ „хуже", чем пространство L; в пространстве $L_p(0<p<1)$ — полином наилучшего приближения, вообще говоря, не единствен, если $f(x) \in C[a, b]$, а $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ — обыкновенная система непрерывных функций Чебышева;

4) как видно из предыдущего примера, условия (2.6) недостаточны, для того чтобы полином $P_n^*(x)$ наименее уклонялся от $f(x)$ в $L_p(0<p<1)$.

Вопрос о достаточных условиях здесь остается открытым.

3. На одном из семинаров И. В. Ценов обратил наше внимание на возможность классифицировать линейно независимые системы непрерывных функций $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ на отрезке $[a, b]$ с точки зрения теории приближения функций. Здесь мы приведем результаты, полученные М. С. Алиевым — учеником И. В. Ценова в этом направлении [2—11].

Следуя Е. Я. Ремезу, будем говорить, что на системе точек x_k $(k=1, 2 \ldots, s)$ система функций $\varphi_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ линейно зависима в узком смысле, если матрица

$$(3.1)\qquad \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2)\varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_s)\varphi_2(x_s) & \ldots & \varphi_n(x_s) \end{bmatrix}$$

имеет ранг $s-1$, и существуют числа a_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, отличные от нуля такие, что $\Sigma_{j=1}^{s} a_j \varphi_i(x_j) = 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Определение 3.1. *Систему непрерывных и линейно независимых на отрезке $[a, b]$ функций $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ назовем системой типа $k(0 \leq k \leq n)$, если*:

1) *для произвольной системы точек* $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_s \leq b$, на которой функции $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ линейно зависимы в узком смысле, в соответствующей матрице (3.1) $s \geq k+1$;

2) *в последовательности a_k $(k=1, 2, \ldots, s)$ имеется k перемен знака, причем хотя бы для одной системы точек x_i $(i=1, 2, \ldots, s)$ в указанной последовательности имеется точно k перемен знака.*

Замечания. 1. В [2] определение 3.1 дано в терминах определителей и миноров матрицы (3.1). Легко доказывается эквивалентность этих определений.

2. При $k=n$ мы имеем систему Чебышева.

3. Для любого k $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ легко построить примеры систем типа k.

Системы типа k обладают рядом замечательных свойств, которые установлены в приводимых ниже теоремах.

Теорема 3.1. *Для того чтобы для каждой функции $f(x) \in C[a, b]$ любой наименее уклоняющийся от неё полином $P_n(x) = \Sigma_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$ обладал не менее $k+1$ точечным альтернансом, причем хотя бы для одной функции $f(x)$ по крайней мере один из наименее уклоняющихся от неполиномов обладал точно $k+1$ точечным альтернансом, необходимо и* *достаточно, чтобы система функций* $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *была типа* k $(0 \leqq k \leqq n)$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ $(2 \leqq p \leqq n)$ — произвольные точки отрезка $[a, b]$. Найдем теперь условия существования полинома $\Sigma_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$, имеющего простые нули в данных точках и не имеющего других нулей.

Рассмотрим полином

$$P_n(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x) = \sum_{k=p}^{n} c_k D\begin{pmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \ldots, & \varphi_{p-1}, & \varphi_k \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{p-1}, & x \end{pmatrix},$$

$$D\begin{pmatrix} \varphi_1, & \varphi_2, & \ldots, & \varphi_{p-1}, & \varphi_k \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{p-1}, & x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_{p-1}(x_1) & \varphi_k(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_{p-1}(x_2) & \varphi_k(x_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi(x_{p-1}) & \varphi_2(x_{p-1}) & \ldots & \varphi_{p-1}(x_{p-1}) & \varphi(x_{p-1}) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_{p-1}(x) & \varphi_k(x) \end{vmatrix}$$

и бесконечную систему линейных (относительно c_i) неравенств

$$(-1)^{\sigma_x} P_n(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x) > 0, \quad (x \in [a, b] \diagdown \{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}\}), \tag{3.2}$$

где σ_x — количество больших, чем x, чисел из $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$. Очевидно $P_n(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x)$ тогда и только тогда имеет простые нули в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ и не обращается в нуль в остальных точках $[a, b]$, когда $c=(c_p, c_{p-1}, \ldots, c_n)$ есть решение системы неравенств (3.2).

Обозначим через η расстояние между ближайшими двумя точками множества $\{a, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, b\}$ (если $x_1=a$ или $x_{p-1}=b$, то точку берем один раз) и рассмотрим систему неравенств

$$(-1)^{\sigma_x} P_n(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x) > 0 \quad (x \in Q_\varepsilon), \tag{3.3}$$

$$\text{где } 0 < \varepsilon < n/2, \quad Q_\varepsilon = [a, b] \diagdown \bigcup_{i=1}^{p-1} \delta_i, \quad \delta_i = (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$$

(если $x_1 = a$, $x_{p-1} = b$, то $\delta_1 = (a, a+\varepsilon)$, $\delta_{p-1} = (b-\varepsilon, b)$).

Теорема 3.2. *Для того чтобы* (3.3) *при любых* $a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_{p-1} \leqq b$ *и* $0 < \varepsilon < \eta/2$ *была совместной, необходимо и достаточно, чтобы тип системы функций* $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *был не меньше* p.

Теорема 3.3. *Если тип системы функций* $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *не меньше* p $(2 \leqq p \leqq n)$, *то система линейных неравенств*

$$(-1)^{\sigma_x} P_n(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x) \geqq 0 \quad (x \in [a, b]) \tag{3.4}$$

совместна.

Определение 3.2. *Точку* $\widetilde{x} \in [a, b] \diagdown \{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}\}$, *для которой при любом решении* $c=(c_p, c_{p+1}, \ldots, c_n)$ *системы* (3.4) *имеет место равенство* $P_n(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, \widetilde{x}) = 0$, *назовем дефектной.*

Обозначим множество всех дефектных точек линейно независимой системы непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и множества точек $x_j \in [a, b]$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ через $\mathscr{X}(\varphi; x)$.

Теорема 3.4. *Если тип системы функций* $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *не меньше* p, *то существует полином* $P_n(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x)$, *для которого* $(-1)^{\sigma_x} P_n(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x)>0$ *при* $x \in [a, b] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}\} \cup \mathscr{Z}(\varphi_i x)$.

Дефектные множества $\mathscr{Z}(\varphi_i x)$ до конца не описаны.

Для системы функций $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ с пустыми дефектными множествами справедлива

Теорема 3.5. *Если* $f(x) \in C[a, b]$ *и полином* $P_n(c^*, x)=\Sigma_{i=1}^{n} c_i^* \varphi_i(x)$, *где* $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — *система типа* $k(0 \leq k \leq n)$ *с пустым дефектным множеством, реализует минимум интеграла*

$$\int_a^b \left| f(x)- \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)\right|^q dx \quad (q>1),$$

то функция $f(x)-P_n(c^*, x)$ *не менее* k *раз меняет знак на отрезке* $[a, b]$.

Решен вопрос об условиях существования полинома, положительного и неотрицательного на произвольном компакте Q, по системе непрерывных и линейно независимых функций $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ на компакте Q.

Для краткости множество точек $x_i \in Q$ $(i=1, 2, \ldots, s)$, на котором функции линейно зависимы в узком смысле, обозначим через Q_s. Пусть, далее, $z(Q_s)$ — число перемен знака в соответствующей последовательности чисел $a_k (k=1, 2, \ldots, s)$:

$$Q_s^0=\{x_i \in Q_s (i=1, 2, \ldots, s) \mid z(Q_s)=0\}, \quad Q^0=\cup Q_s^0$$

и, наконец, $r(Q^0)$ — ранг множества векторов $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$ при $x \in Q^0$.

Определение 3.3. *Будем говорить, что непрерывные и линейно независимые на компакте* Q *функции* $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *образуют*:

а) π_0-*систему на* Q, *если* $r(Q^0)=n$;

б) π_1-*систему на* Q, *если для любого подмножества* Q_s *из* Q *будет* $z(Q_s) \geqq 1$, $s \geqq 2$;

в) π_2-*систему на* Q, *если для любого подмножества* Q_s *из* Q *будет* $z(Q_s) \geqq 0$, $s \geqq 2$, *причем* $Q^0 \neq \varnothing$ *и* $r(Q^0) \leqq n-1$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.6. *Для того чтобы существовал положительный полином* $P_n(x)=\Sigma_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$ *на компакте* Q, *необходимо и достаточно, чтобы система функций* $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *образовала* π_1-*систему на* Q.

Теорема 3.7. *Если функции* $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *образуют* π_0-*систему, то система неравенств* $\Sigma_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x) \geqq 0$ $(x \in Q)$ *имеет только тривиальное решение.*

Теорема 3.8. *Для того чтобы система неравенств* $\Sigma_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)>0$ $(x \in Q)$ *была несовместной, а система неравенств* $\Sigma_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \geqq 0$ $(x \in Q)$ *имела нетривиальное решение, достаточно, а при необращении в нуль одновременно всех функций* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ *ни в одной точке* $x \in Q$ *и необходимо, чтобы система функций* $\varphi_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *образовала* π_2-*систему на* Q.

Теорема 3.8. *Пусть для непрерывных функций* $f(x)<g(x)$ $(x \in [a, b])$ *существует полином* $P_n(x)$ *по данной системе типа* $k(0 \leq k \leq n)$ *такой, что* $f(x)<P_n(x)<g(x)$ $[(x \in [a, b])$. *Тогда существуют полином* $P_n^*(x)$ *по*

этой же системе и точки $a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_{k+1} \leqq b$, *для которых* $f(x) \leqq P_n^*(x) \leqq g(x)$ *и* $P_n^*(x_i)$ *попеременно равен* $f(x_i)$ *и* $g(x_i)$.

Отметим также, что найдены необходимые и достаточные условия существования полинома $P_n(x)$, заключенного между двумя заданными непрерывными функциями [11] $f(x) < g(x)$ $(x \in [a, b])$.

4. В 1966 году И. В. Ценов обратил внимание автора на исследование поведения интеграла $\int_a^b |f(x) - P_n(x)|^{p(x)} dx$, который был также предметом и одного его исследования [28]. Однако наиболее интересные результаты, на наш взгляд, здесь получены И. И. Шарапудиновым [31]. В этом параграфе мы приведем их.

Через $L_{p(x)}$ обозначим множество измеримых функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0, 1]$, и таких, что

$$\int\limits_{[0, 1] \setminus B} |f(x)|^{p(x)} dx < +\infty, \quad \operatorname*{vrai\,max}_{x \in B} |f(x)| < +\infty,$$

где $p(x)$ — положительная функция, заданная на $[0, 1]$ и не обращающаяся в $+\infty$ вне B. По определению последовательность $\{f_n(x)\}$ функций из $L_{p(x)}$ сходится к функции $f(x) \in L_{p(x)}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует n_ε такое, что при $n \geqq n_\varepsilon$ будет

$$\int\limits_{[0, 1] \setminus B} |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} dx < \varepsilon, \quad \operatorname*{vrai\,max}_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Заметим, что если $p(x)$ не константа, то не существует функции $\varphi(x)$, определенной на $[0, +\infty)$, и такой, что для любого $f(x) \in L_{p(x)}$

$$\varphi(|f(x)|) = |f(x)|^{p(x)},$$

т. е. $L_{p(x)}$ не совпадает ни с одним из классов $\varphi(L)$ [24].

И. И. Шарапудинов получил следующие результаты.

Для того чтобы $L_{p(x)}$ было линейным топологическим пространством, необходимо и достаточно, чтобы функция $p(x)$ была существенно ограниченной на $[0, 1]$.

Пусть $p(x)$ — существенно ограниченная, измеримая функция, определенная на $[0, 1]$. Тогда, если $p(x) \geqq 1$, то топология пространства $L_{p(x)}$ нормируема. Одну из эквивалентных норм можно определить, полагая для

$$\|f\| = \inf \{\alpha \mid \alpha > 0, \int\limits_0^1 |f(x)/\alpha|^{p(x)} dx \leqq 1\}.$$

Пусть существует множество $E \subset [0, 1]$, такое, что $\operatorname{mes} E > 0$ и $p(x) < 1$ для любого $x \in E$. Тогда пространство $L_{p(x)}$ не будет локально выпуклым и, значит, оно не нормируемо.

Если функция $p(x)$ не является существенно ограниченной, то пространство $L_{p(x)}$ не будет линейным, но линейная оболочка такого пространства будет линейным нормированным.

Если p — постоянное число, больше единицы, то хорошо известно, что пространство, сопряженное к L_p, изоморфно пространству L_q, где $1/p + 1/q = 1$. Отсюда, в частности, вытекает рефлексивность пространства $L_p (p > 1)$. Это важное свойство пространства L_p удается обобщить на случай произвольной существенно ограниченной функции $p(x) > 1$. Пространство, сопряженное к $L_{p(x)}$, мы условимся обозначать через $L^*_{p(x)}$.

Положим

$$q(x) = \begin{cases} p(x)/(p(x)-1) & \text{при} \quad p(x)>1, \\ +\infty & \text{при} \quad p(x)=1, \end{cases}$$

и назовём $q(x)$ сопряженной функцией к функции $p(x)$. Кроме того, пусть

$$p_* = \operatorname*{vrai\,min}_{x\in[0,\,1]} p(x), \quad p^* = \operatorname*{vrai\,max}_{x\in[0,\,1]} p(x).$$

Заметим, что если $p(x)$ — измеримая существенно ограниченная функция, такая, что $p_*>1$, то сопряженная функция обладает теми же свойствами. Поэтому $L_q(x)$ будет линейным нормированным пространством.

Пусть $p(x)$ — измеримая функция такая, что $1<p_*$, $p^*<+\infty$. Тогда, пространство $L^*_{p(x)}$ совпадает с пространством $L_{q(x)}$ и, в частности, $L_{p(x)}$ рефлексивно.

Для доказательства этого утверждения предварительно доказывается, что произвольный ограниченный линейный функционал $\Phi(f)$, заданный на $L_{p(x)}$, имеет вид

$$\Phi(f) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x) \in L_{q(x)}$.

Заметим, что все сформулированные выше результаты остаются справедливыми, если вместо отрезка $[0, 1]$ взять произвольное множество E, измеримое по Лебегу.

Если $p_*=1$, то пространство $L^*_{p(x)}$ не совпадет с $L_{q(x)}$, так как сопряженная функция не будет существенно ограниченной и, значит, $L_{q(x)}$ нелинейно. Однако имеет место следующее утверждение:

если $p(x)$ — измеримая на $[0, 1]$ функция, такая, что $1 \le p_*$, $p^*<+\infty$, то $L^*_{q(x)}$ совпадает с линейной оболочкой пространства $L_{q(x)}$.

Пусть функции $f(x)$, $\varphi_k(x)$ $(k=0,\ 1, \ldots, n)$ принадлежат $L_{p(x)}$, $p(x)>1$ — измеримая, существенно ограниченная функция на $[0, 1]$. Тогда для того чтобы полином $P^*_n(x)=\Sigma^n_{k=0}a^*_k\varphi_k(x)$ реализовал минимум интеграла

$$\int_0^1 |f(x)-\sum_{k=0}^n a_k\varphi_k(x)|^{p(x)}dx,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\int_0^1 p(x)\,|f(x)-P^*_n(x)|^{p(x)-1}\varphi_k(x)\,\mathrm{sign}\,[f(x)-P^*_n(x)]dx=0 \quad (k=0, 1, \ldots, n)$$

(здесь предполагается, что $\varphi_k(x)$ образуют линейно независимую систему в пространстве $L_{p(x)}$).

Недавно нам сообщил И. И. Шарапудинов, что он построил пример непрерывной функции $p(x)$, для которой тригонометрическая система не образует базиса в пространстве $L_{p(x)}$. Кроме того, он построил пример непрерывной на отрезке $[0, 1]$ функции $p(x)$, для которой система Хаара не образует базиса в $L_{p(x)}$, но если $p(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то система Хаара образует базис в $L_{p(x)}$.

В заключение этого параграфа заметим, что пространство $L_{p(x)}$ впервые рассмотрено И. В. Ценовым в работе [28]. Им же был установлен критерий для полинома наилучшего приближения в пространстве $L_{p(x(}$, когда $f(x)$, $s(x)>1$, $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ — непрерывные функции на отрезке [0, 1].

5. Пусть функции $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ непрерывны и линейно независимы на отрезке $[a, b]$. Обозначим через $P_n^{(p)}(x)=\varphi_n(x)-\Sigma_{k=0}^{n-1}a_k^{(p)}\varphi_k(x)$ полином, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L(p, \mu)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$, т. е.

$$\| R_n^{(p)} \|_p=\begin{cases} \inf\{\dfrac{1}{\int\limits_a^b d\mu(x)a} \int\limits_a^b \varphi_n(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\varphi_k(x)\,|^p d\mu(x)\}^{1/p}, & 1\leqq p<\infty, \\ \inf\{\max|\varphi_n(x)-\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\varphi_k(x)|\}, & p=\infty, \end{cases}$$

где $\mu(x)$ — заданная неубывающая функция с бесконечным числом точек роста на отрезке $[a, b]$.

В этом параграфе мы сформулируем две теоремы, доказанные в работе [1].

Мы будем говорить, что система функций $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, непрерывных и линейно независимых на отрезке $[a, b]$, обладает свойством T, если она образует систему Чебышева, и свойством T', если она обладает свойством T и существуют непрерывные на $[a, b]$ производные $\varphi_k'(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$.

Справедливы следующие две теоремы.

Теорема 5.1. *Если система функций* $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ *обладает свойством* T, *то равномерно на отрезке* $[a, b]$

$$\lim_{p\to p_0} R_n^{(p)}(x)=R_n^{(p_0)}(x) \qquad (1\leqq p,\, p_0<\infty).$$

Для $\varphi_k(x)=x^k (k=0, 1, \ldots, n)$ и $\mu(x)=x$ эта теорема доказана С. М. Никольским [21].

Теорема 5.2. *Если система функций* $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ *обладает свойством* T', *то при* $1\leqq p\leqq\infty$ *нули полиномов* $R_{n+1}^{(p)}(x)$ *и* $R_n^{(p)}(x)$ *перемежаются, т. е.* $x_1^{(n+1,p)}<x_1^{(n,p)}<x_2^{(n+1,p)}<\ldots<x_n^{(n,p)}<x_{n+1}^{(n+1,p)}$.

Для $1<p<\infty$, $\varphi_k(x)=x^k (k=0, 1, \ldots, n)$ и $d\mu(x)$-непрерывной эта теорема другим путем доказана в [37].

Для $p=2$ и $p=\infty$ эта же теорема доказана в работах [15] и [16].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Абилов, С. А. Агаханов. О некоторых свойствах полиномов наилучшего интегрального приближения. *Уч. зап. Азербайджанского гос. унив. им. С. М. Кирова*, **4**, 1968, 57—60.
2. М. С. Алиев. О наилучшем приближении непрерывных функций в метрике $C[a, b]$ обобщенными полиномами. *Доклады СССР*, **129**, 1968.
3. М. С. Алиев. Некоторые соотношения для определителей. В: *Сб. научных работ кафедр матем. факультета Дагестанского гос. унив. им. В. И. Ленина*, Махачкала, 1967.
4. М. С. Алиев. О наилучшем приближении в метрике $S[a, b]$. В: *Сб. аспирантских работ. Дагестанский гос. унив. им. В. И. Ленина*. Махачкала, 1969.
5. М. С. Алиев. Об одном свойстве линейно независимой системы функций, не образующих систему Чебышева. *Известия вузов, Матем.*, 7, 1969, 3—7.

6. М. С. Алиев. К вопросу о структуре многогранника наилучшего приближения. Сб. *Матем. и методика ее преподавания.* Ростов-на-Дону, 1972.
7. М. С. Алиев. Условия совместности одной системы линейных неравенств. Сб. *Функциональный анализ, тедрия функций и их приложения,* вып. 1. Махачкала, 1974.
8. М. С. Алиев. К вопросу о существовании полиномов, меняющих знак в заданных точках. Сб. *Функциональный анализ, теория функций и их приложения,* вып. 2, ч. 1, Махачкала, 1975.
9. Алиев М. С. Обобщенная теорема Карлина. Сб. *Функциональный анализ, теория функций и их приложения,* вып. 3, ч. 2. Махачкала, 1976.
10. М. С. Алиев. Условия существования неотрицательного полинома для линейно независимых систем функций. Об. *Функциональный анализ, теория функций и их приложения,* вып. 4. Махачкала, 1979.
11. М. С. Алиев. Условия существования полинома, заключенного между двумя заданными функциями. ВИНИТИ, № 55, 1—80, 1981.
12. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимаций. М., 1965.
13. Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938.
14. С. Н. Бернштейн. Экстремальные свойства полиномов. Л. — М., 1937.
15. В. С. Виденский. О нулях ортогональных многочленов, *Доклады АН СССР,* **152**, 1963, 1038—1041.
16. В. С. Виденский. *Доклады АН СССР,* **116**, 1957.
17. В. Л. Гончаров. Теория интерполирования и приближения функций. Москва, 1954.
18. М. И. Кадец. Безусловно сходящиеся ряды в равномерно выпуклом пространстве. *Успехи матем. наук,* **11**, вып. 5, 1956.
19. М. И. Кадец. Об условно сходящихся рядах в пространстве L_p. *Успехи матем. наук,* **11**, вып. 1, 1954.
20. А. К. Минятов. О построении интерполяционных формул. *Матем. сб.* **39**, № 1—2, 1932.
21. С. М. Никольский. Квадратурные формулы. Москва, 1979.
22. С. М. Никольский. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем. *Известия АН СССР, серия матем.,* 10, 1946.
23. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного. Москва, 1960.
24. П. Л. Ульянов. Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$. *Успехи матем. наук,* **27**, 1972, № 2.
25. И. В. Ценов. Об одном вопросе прпближения функций полиномами. *Матем. сборник,* **28**, 1951, № 2.
26. И. В. Ценов. О некоторых вопросах приближения функций в пространствах $C[a, b]$ и $L^p[a, b]$. *Известия вузов, Математика,* **№ 4**, 1959.
27. И. В. Ценов. Интерполирование обобщенными полиномами. *Уч. зап. Дагестанского гос. унив. им. В. И. Ленина,* **10**, 1961.
28. И. В. Ценов. Обобщение задачи о наилучшем приближении функций в пространстве L_p. *Уч. зап. Дагестанского гос. унив. им. В. И. Ленина,* **7**, 1961.
29. И. В. Ценов. О наилучшем интегральном приближении. Сб. *Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций.* Баку, 1965.
30. И. В. Ценов. О минимуме некоторых интегралов. Сб. *Математика и методика ее преподавания.* Ростов-на-Дону, 1972.
31. И. И. Шарапудинов. О топологии пространства $L^{p(t)}[0, 1]$. *Матем. заметки,* **26**., 1969, № 4.
32. Г. Я. Ярахмедов. Об одном свойстве измеримых функций. *Вестник ЛГУ, серия матем.,* **19**, 1964.
33. Г. Я. Ярахмедов. Об одном обобщении понятия систем П. Л. Чебышева. Сб. *Функциональный анализ и теория функций,* **№ 2**. Казань, 1964.
34. Г. Я. Ярахмедов. К основной теореме П. Л. Чебышева. *Успехи матем. наук,* **20**, 1965, № 5.
35. Г. Я. Ярахмедов. К вопросу об единственности многочлена наилучшего приближения в метрике *M*. Сб. *Функциональный анализ, теория функций,* № 3, Казань, 1965.
36. Г. Я. Ярахмедов. О приближении функций в пространстве L_p. Сб. *Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций.* Л., 1965.
37. F. V. Atkinson. Über die Nullstellen gewisser extremaler Polynome. *Archiv der Math.,* **3**. 1952.
38. G. G. Lorentz. Approximation of Functions. N.-Y., 1966.
39. I. Shohat. The best Polinomial of functions possessing derivatives. *Duke Math. J.,* **8**, 1941, No 2.

СССР, Дагестанская АССР
Махачкала, Университет

Поступила 3. 6. 1983 г.