Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

УСЛОВИЯ ЖЕСТКОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ СМЕШАННОГО ТИПА 2

ИВАНКА ИВАНОВА-КАРАТОПРАКЛИЕВА

Получены достаточные условия жесткости некоторых классов поверхностей, смешанной кривизны и с произвольной кусочно-гладкой границей, которые проектируются однозначно на плоскость, и имеют две сопряженные параболические линии, одна из которых является асимптотической. Указаны условия жесткости для некоторых из рассматриваемых классов поверхностей.

1. Пусть

(1) $$S: z=f(x, y),\ (x, y)\in\overline{G}.-$$

регулярная поверхность. Предположим, что: (1°) $f(x, y)\in C^2(\overline{G})$, G — ограниченная, конечно-связная область, имеющая кусочно-гладкую границу ∂G и

(2) $$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=\varepsilon\theta^2(x, y)\varphi^m(x, y))\psi^n(x, y),\ \varphi(x, y), \psi(x, y)\in C^2(\overline{G}),\ \theta\in C(\overline{G}),\ \theta\neq 0,$$

где $m>0$, $n\geqq 0$, $\varepsilon=\pm 1$; (2°) отображение $\Lambda:\overline{G}\to\overline{D}$, заданное равенствами

(3) $$u=\varphi(x, y),\ v=\psi(x, y),$$

является C^2-дифеоморфизмом; (3°) сеть линий $\Gamma_1:\psi(x, y)=\gamma_1$ и $\Gamma_2:\varphi(x, y)=\gamma_2$, сопряженная на поверхности S; (4°) функции $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ удовлетворяют в G равенствами

(4) $$f_{xx}\varphi_y^2-2f_{xy}\varphi_x\varphi_y+f_{yy}\varphi_x^2=\varepsilon\rho\varphi^{m-l}\psi^n,$$
$$f_{xx}\psi_y^2-2f_{xy}\psi_x\psi_y+f_{yy}\psi_x^2=\rho\varphi^l,\ m-l>0,\ l\geqq 0,\ \rho(x, y)\in C(\overline{G}),\ \rho\neq 0,$$

где $l=p/q$, p, и q — взаимно простые целые числа, q — нечетное.

Отметим, что $c_1:\psi(x, y)=0$ при $n>0$ и $c_2:\varphi(x, y)=0$ являются параболическими линиями для S, а функция $\psi(x, y)$ при $n=0$ такова, что она определяет семейство Γ_1 в (3°). Кроме этого, c_1 несимптотическая, а c_2 асимптотическая линия, и все ее точки являются точками уплощения.

Пусть p_j и q_i — взаимно простые целые числа, $q_j>0$, $j=1, 2$, и $p_1>0$, $p_2\geqq 0$. Возможны следующие случаи:

(а) $m=p_1/q_1$, $n=p_2/q_2$, p_j и q_j $(j=1, 2)$ — нечетные числа, $\varepsilon=1$;

(б$_1$) $m=p_1/q_1$, $n=p_2/q_2$, $p_1>0$ — четное, а p_2, q_1, q_2 — нечетные числа, $\varepsilon=1$;

(б$_2$) $m=p_1/q_1$, $n=p_2/q_2$, $p_2\geqq 0$ — четное, а p_1, q_1, q_2 — нечетные числа, $\varepsilon=1$;

(в) $m=p_1/q_1$, $n=p_2/q_2$, q_1, q_2 — нечетные, а p_1, p_2 — четные числа, $p_1>0$, $p_2\geqq 0$, $\varepsilon=1$;

(г) $m=p_1/q_1$, $n=q_2/q_2$, q_1, q_2 — нечетные, а p_1, p_2 — четные числа, $p_1>0$, $p_2\geqq 0$, $\varepsilon=-1$;

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 10, 1984, с. 345—352.

(д$_1$) либо $m=p_1/q_1$, где q_1 — четное число, либо m — иррациональное число а $n=p_2/q_2$, p_2, q_2 — нечетные числа, $\varepsilon=1$;

(д$_2$) $n>0$ и либо $n=p_2/q_2$, где q_2 — четное число, либо n — иррациональное число, а $m=p_1/q_1$, p_1, q_1 — нечетные числа, $\varepsilon=1$;

(е) либо $m=p_1/q_1(n=p_2/q_2>0)$, где q_1 (q_2) — четное число, либо m (n) — иррациональное число, а $n=p_2/q_2(m=p_1/q_1)$, где $q_2(q_1)$—нечетное число, $p_2(p_1)$— четное число, $\varepsilon=1$;

(ж) либо $m=p_1/q_1(n=(p_2/b_2>)$, где q_1 (q_2) — четное число, либо m (n) — иррациональное число, а $n=p_2/q_2(m=p_2/q_1)$, где q_2 (q_1) — нечетное число $p_2\geq 2$ $(p_1\geq 2)$, $p_2(p_1)$ — четное число, $\varepsilon=-1$;

(з) либо $m=p_1/q_1$, $n=p_2/q_2$, где q_1 и q_2 — четные числа, либо $m=p_1/q_1$, $n(=p_2/p_2)$, где q_1 (q_2) — четное, а $n(m)$ — иррациональное число, либо и оба числа m и n иррациональные, $\varepsilon=1$;

(и) либо $m=p_1/q_1$, $n=p_2/q_2$, где q_1 и q_2 — четные числа, либо $m=p_1/q_1$ $(n=p_2/q_2)$, где $q_1(q_2)$ четное, а n (m) иррациональное число, либо и оба числа m и n иррациональные, $\varepsilon=-1$;

Очевидно, что: в случаях (д$_1$), (е) при q_2 — нечетное, (ж) при q_2 нечетное, (з) при $n=0$ и (и) при $n=0$ область $\bar{G}\subset M_1=\{(x, y)\colon \varphi(x, y)\geq 0\}$; в случаях (д$_2$), (е) при q_1 — нечетное, (ж) при q_1 — нечетное, область $\bar{G}\subset M_2=\{(x, y)\colon \psi(x, y)\geq 0\}$; в случаях (з) при $n>0$ и (и) при $n>0$, область $\bar{G}\subset M_3=\{(x, y)\colon \varphi(x, y)\geq 0, \psi(x, y)\geq 0\}$. Будем предполагать, что граница $\partial G\colon x=x(s)$, $y=y(s)$ параметризована так, что длина дуги s растет при ее положительном обходе.

Предположим, что для поверхности (1) выполнены еще условия: (5_1^0) $m-2l\geq 1$, $f_{xx}\,\psi_{yy}-2f_{xy}\,\psi_{xy}+f_{yy}\,\psi_{xx}=0$, $2b^1/\varphi^l-\varepsilon\,(m-2l)\varphi^{m-2l-1}\psi^n\geq 0$, ($(5_2^0)$ $m-2l\geq 1$, $f_{xx}\,\psi_{yy}-2f_{xy}\,\psi_{xy}+f_{yy}\,\psi_{xx}=0$, $2b^1/\varphi^l-\varepsilon\,(m-2l)\,\varphi^{m-2l-1}\,\psi^n\leq 0$), где $b^1=(f_{xx}\varphi_{yy}-2f_{xy}\varphi_{xy}+f_{yy}\varphi_{xx})/|\theta\Delta|$, $\Delta=D(\varphi, \psi)/D(x, y)$, а $2b^1/\varphi^l-\varepsilon(m-2l)\varphi^{m-2i-1}\psi^n$ может равняться нулю только на линии c_1 и c_1.

Отметим, что к рассматриваемым классам поверхностей принадлежат, например, поверхности, имеющие уравнение

$$z=\frac{2}{m+3}\left(\varepsilon\,\frac{m+1}{2(n+1)(n+2)}\,x^{n+2}+y\right)^{\frac{m+3}{2}}+ax+by+c \quad \text{при} \quad m\geq 1,\ n\geq 0,$$

где a, b, c — произвольные константы $\varepsilon=\pm 1$.

Представим гладкую часть границы Γ_S как объединение непересекающихся множеств Γ_S^i, $i=1, 2, 3, 4$, которые в случае (5_1^0) определяются следующим образом: на Γ_S^1 — $\eta(\psi_x x'+\psi_y y')\geq 0$, $H_S\geq 0$; на Γ_S^2 — $\eta(\psi_x x'+\psi_y y')<0$, $H_S>0$; на Γ_S^3 — $\eta(\psi_x x'+\psi_y y')>0$, $H_S<0$; на Γ_S^4 — $\eta(\psi_x x'+\psi_y y')<0$, $H_S\leq 0$. В случае (5_2^0) множества Γ_S^i, $i=1, 2, 3, 4$, такие, что: вдоль Γ_S^1 — $\eta(\psi_x x'+\psi_y y')\leq 0$, $H_S\geq 0$; вдоль Γ_S^2 — $\eta(\psi_x x'+\psi_y y')>0$, $H_S>0$; вдоль Γ_S^3 — $\eta(\psi_x x'+\psi_y y')<0$, $H_S<0$; вдоль Γ_S^4 — $\eta(\psi_x x'+\psi_y y')>0$, $H_S\leq 0$, где $H_S=\varepsilon\varphi^{m-2l}\,\psi^n\,(\psi_x x'+\psi_y y')^2+(\varphi_x x'+\varphi_y y')^2$, $\eta=\operatorname{sgn}\Delta$. Тогда имеют место:

Теорема 1. *Поверхность* (1), (1^0)—(4^0), (5_1^0) ((1), (1^0)—(4^0), (5_2^0)) *жестка в классе* $C'(\bar{G})\cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если*

$$\begin{aligned} &\zeta=c_0=\text{const} \quad &&\textit{вдоль} \quad \Gamma_S^1\cup\Gamma_S^3, \\ (5)\qquad &\zeta_{l_\psi}=0 &&\textit{вдоль} \quad \Gamma_S^2\cup\Gamma_S^3, \end{aligned}$$

а вдоль границы Γ_S^4 *на изгибание не накладываются никаких условий.*

Следствие 1. *Поверхность* (1), (1^0)—(4^0), (5_1^0) ((1), (1^0)—(4^0), (5_2^0)), *имеющая границу* $\Gamma_S = \overline{\Gamma}_S^1 \cup \overline{\Gamma}_S^4$ *жестка в классе* $C^1(\overline{G}) \cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если граница* Γ_S^1 *закреплена, а граница* Γ_S^4 *свободная.*

Пусть теперь для поверхности (1) выполнены условия (1^0)—(4^0) и (5^{00}): $f_{xx}\varphi_{yy} - 2f_{xy}\varphi_{xy} + f_{yy}\varphi_{xx} = 0$, $f_{xx}\psi_{yy} = 2f_{xy}\psi_{xy} + f_{yy}\psi_{xx} = 0$. Рассмотрим случай (г) ((ж), (и)). Разобьем гладкую часть границы Γ_S на непересекающиеся множества $\Gamma_{S\text{г}}^i$ ($\Gamma_{S\text{ж}}^i$, $\Gamma_{S\text{и}}^i$), $i = 1, 2, 3, 4$, такие что: вдоль $\Gamma_{S\text{г}}^1$ ($\Gamma_{S\text{ж}}^1$, $\Gamma_{S\text{и}}^1$) — а) $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') > 0$, $H_S^1 \geq 0$ или б) $\psi_x x' + \psi_y y' = 0$, $\varphi(x, y) \neq 0$; вдоль $\Gamma_{S\text{г}}^2$ ($\Gamma_{S\text{ж}}^2$, $\Gamma_{S\text{и}}^2$) — $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') < 0$, $H_S^1 > 0$; вдоль $\Gamma_{S\text{г}}^3$ ($\Gamma_{S\text{ж}}^3$, $\Gamma_{S\text{и}}^3$) — $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') > 0$, $H_S^1 < 0$; вдоль $\Gamma_{S\text{г}}^4$ ($\Gamma_{S\text{ж}}^4$, $\Gamma_{S\text{и}}^4$) — а) $\eta\varphi(\psi_x x' + \psi_y y') < 0$, $H_S^1 \leq 0$ или б) $\varphi(x, y) = 0$, где $\eta = \operatorname{sgn} \Delta$, $H_S^1 = \varepsilon\varphi^{m-l}\psi^n(\psi_x x' + \psi_y y')^2 + (\varphi_x x' + \varphi_y y')^2$. Тогда имеют место

Теорема 2. Поверхность (1), (1^0)—(4^0), (5^{00}), (г) ((ж), (и)) *жестка в классе* $C^1(\overline{G}) \cap C^9(G)$ *б. м. изгибаний, если*

$$\zeta = c_0 = \text{const} \quad \text{вдоль} \quad \Gamma_{S\text{г}}^1 \cup \Gamma_{S\text{г}}^3 \ (\Gamma_{S\text{ж}}^1,\ \Gamma_{S\text{ж}}^3,\ \Gamma_{S\text{и}}^1 \cup \Gamma_{S\text{и}}^3),$$
(6)
$$\zeta_{l_\psi} = 0 \quad \text{вдоль} \quad \Gamma_{S\text{г}}^2 \cup \Gamma_{S\text{г}}^3 \ (\Gamma_{S\text{ж}}^2 \cup \Gamma_{S\text{ж}}^3,\ \Gamma_{S\text{и}}^2 \cup \Gamma_{S\text{и}}^3),$$

а вдоль границы $\Gamma_{S\text{г}}^4$ ($\Gamma_{S\text{ж}}^4$, $\Gamma_{S\text{и}}^4$) *на изгибание не накладывается никаких условий.*

Следствие 2. *Поверхность* (1), (1^0)—(4^0), (5^{00}), (г) ((ж), (и)), *имеющая границу* $\Gamma_{S\text{г}} = \overline{\Gamma}_{S\text{г}}^1 \cup \overline{\Gamma}_{S\text{г}}^4$ ($\Gamma_{S\text{ж}} = \overline{\Gamma}_{S\text{ж}}^1 \cup \overline{\Gamma}_{S\text{ж}}^4$, $\Gamma_{S\text{и}} = \overline{\Gamma}_{S\text{и}}^1 \cup \overline{\Gamma}_{S\text{и}}^4$) *жестка в классе* $C^1(\overline{G}) \cap C^2(G)$ *б. м. изгибаний, если граница* $\Gamma_{S\text{г}}^1$ ($\Gamma_{S\text{ж}}^1$, $\Gamma_{S\text{и}}^1$) *закреплена, а граница* $\Gamma_{S\text{г}}^4$ ($\Gamma_{S\text{ж}}^4$, $\Gamma_{S\text{и}}^4$) *свободная.*

Отметим, что H_S (H_S^1) определяет нормальную кривизну границы Γ_S, а $\psi_x x' + \psi_y y'$ — угла между $n_\text{г}$ и l_ψ.

2. Доказательство теорем. В случаях (а), ($б_1$), ($б_2$), ($д_1$), ($д_2$) уравнение (12) (см. [1]) б. м. изгибаний является уравнением смешанного типа, в случаях (в), (е), (з) — уравнением эллиптико-параболического типа, а в случаях (г), (ж) и (и) — уравнением гиперболо-параболического типа. После замены (3) переменных и сокращения на $|\Delta\theta|$ уравнение (12) [1], в силу предположений (2) и (4), принимает вид

$$\varepsilon u^{m-l} v^n \zeta_{uu} + u^l \zeta_{vv} + b^1 \zeta_u + b^2 \zeta_v = 0, \tag{7}$$

где $b^1 = (f_{xx}\varphi_{yy} - 2f_{xy}\varphi_{xy} + f_{yy}\varphi_{xx}) / |\Delta\theta|$, $b^2 = (f_{xx}\psi_{yy} - 2f_{xy}\psi_{xy} + f_{yy}\psi_{xx}) / |\Delta\theta|$. Вопрос о постановке краевых задач для уравнения этого типа при $l = 0$ рассматривался в [2].

Для получения краевых условий, при которых уравнение (7) имеет единственное решение, применим метод „a, в, c“. Для этого будем пользоваться равенствами (8)—(11) работы [1]. Отметим, что для получения этих равенств достаточно, чтобы: γa^{11}, $\gamma a^{22} \in C^2(\overline{D})$, γb^1, $\gamma b^2 \in C^1(\overline{D})$, αa^{11}, αa^{22}, βa^{11}, $\beta a^{22} \in C^1(\overline{D})$, αb^1, αb^2, βb^1, $\beta b^2 \in C(\overline{D})$.

В случае поверхности класса (1), (1^0)—(4^0), (5_1^0) ((1), (1^0)—(4^0) (5_2^0)) выберем $\alpha = \alpha_1 u^{l+1} + \alpha_2/u^l$, $\beta = \gamma = 0$, где $\alpha_1 = \text{const} > 0$, $\alpha_2 = \text{const}$, $|\alpha^2|$ достаточно большое число и $\operatorname{sgn} \alpha_2 = \operatorname{sgn}[2b^1/u^l - (a^{11}/u^l)_u]$ вне параболических линий $\tilde{c}_1 : v = 0$, $\tilde{c}_2 : u = 0$ (последнее возможно в силу предположения (5_1^0) ((5_2^0)). Тогда

$A^{11}=\alpha_1[2b^1u^{l+1}-(u^{l+1}a^{11})_u]+\alpha_2[2b^1/u^l-(a^{11}/u^l)_u], A^{12}=0, A^{22}=u^{2l}\alpha_1(2l+1)$. Так как $a^{11}=\varepsilon u^{m-l}v^n$, $m-2l>1$, $b^1=u^l\tilde{b}^1$, $\tilde{b}^1\in C(\bar{D})$, и $2b^1/u^l-(a^{11}/u^l)_u$ может равняться нулю только на $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$, то при $|\alpha_2|$ достаточно большое $A^{11}\geqq 0$, $A^{11}A^{22}-A^{12^2}\geqq 0$, где равенство может иметь место только на $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}$. Таким образом квадратичная форма $A(\zeta_u, \zeta_v)$ (см. (9) [1]) будет положительно определена на множестве $\tilde{D}$, всюду плотном в $\bar{D}$. После сделанного выбора для α, β, γ квадратичная форма $B(\zeta_u, \zeta_v)$ (см. (10), [1]) имеет представление

$$B(\zeta_u, \zeta_v)=\frac{\tilde{\alpha}}{n_1}[H\zeta_u^2-(n_1\zeta_v-n_2\zeta_u)^2] \quad \text{при} \quad n_1\neq 0, \tag{8}$$

$$B(\zeta_u, \zeta_v)=2\tilde{\alpha}n_2\zeta_u\zeta_v \quad \text{при} \quad n_1=0,$$

где $\tilde{\alpha}=\alpha_1u^{2l+1}+\alpha_2$, $H=\varepsilon u^{m-2l}v^n n_1^2+n_2^2$.

Представим гладкую часть Γ границы ∂D в виде суммы непересекающихся множеств Γ^i, $i=1, 2, 3, 4$, которые в случае (5_1^0) определяются следующим образом: на $\Gamma^1 - n_1\geqq 0$, $H\geqq 0$; на $\Gamma^2 - n_1<0$, $H>0$; на $\Gamma^3 - n_1>0$, $H<0$; на $\Gamma^4 - n_1<0$, $H\leqq 0$. В случае (5_2^0) множества Γ^i, $i=1, 2, 3, 4$, такие, что: на $\Gamma^1 - n_1\leqq 0$, $H\geqq 0$; на $\Gamma^2 - n_1>0$. $H>0$; на $\Gamma^3 - n_1<0$, $H<0$; на $\Gamma^4 - n_1>0$, $H\leqq 0$. Отметим, что $\operatorname{sgn}\tilde{\alpha}=\operatorname{sgn}\alpha_2$ при $|\alpha_2|$ достаточно большое.

Рассмотрим следующую краевую задачу 1: *Найти решение уравнения* (7), *когда* $m-2l\geqq 1$, $b^2=0$, $2b^1/u^l-(a^{11}/u^l)_u\geqq 0$ ($m-2l\geqq 1$, $b^2=0$, $2b^1/u^l-(a^{11}/u^l)_u\leqq 0$), *где* $2b^1/u^l-(a^{11}/u^l)_u$ *может равняться нулю только на линии* $\tilde{c}_1$, $\tilde{c}_2$, *которое удовлетворяет краевым условиям*

$$\zeta=\varphi_1(s) \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma^1\cup\Gamma^3, \tag{9}$$

$$\zeta_u=\varphi_2(s) \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma^2\cup\Gamma^3.$$

В случае поверхности класса (1), (1^0)—(4^0), (5^{00}), (г) ((ж), и (и), выбирая $\alpha=\alpha_1u^{l+1}$, $\alpha_1=\text{const}$, $\alpha_1>0$, $\beta=\gamma=0$, получаем $A^{11}=u^m v^n\alpha_1(m+1)$, $A^{12}=0$, $A^{22}=u^{2l}\alpha_1(2l+1)$. Таким образом квадратичная форма $A(\zeta_u, \zeta_v)$ (см. (9), [1]) будет положительно определена на множестве $\tilde{D}$, всюду плотном в $\bar{D}$, а квадратичная форма $B(\zeta_u, \zeta_v)$ (см. (10), [1] имеет представление

$$B(\zeta_u, \zeta_v)=\frac{\alpha_1u}{n_1}[H\zeta_u^2-u^{2l}(n_1\zeta_v-n_2\zeta_u)^2] \quad \text{при} \quad n_1\neq 0, \tag{10}$$

$$B(\zeta_u, \zeta_v)=2\alpha_1u^{2l+1}n_2\zeta_u\zeta_v \quad \text{при} \quad n_1=0,$$

где $H=\varepsilon u^m v^n n_1^2+u^{2l}n_2^2$.

Представим гладкую часть $\Gamma_г$ ($\Gamma_ж$, $\Gamma_и$) границы ∂D в виде суммы непересекающихся множеств $\Gamma_г^i$ ($\Gamma_ж^i$, $\Gamma_и^i$), $i=1, 2, 3, 4$, следующим образом: на $\Gamma_г^1$ ($\Gamma_ж^1$, $\Gamma_и^1$) — а) $n_1, u>0$, $H\geqq 0$ или б) $n_1=0, u\neq 0$; на $\Gamma_г^2$ ($\Gamma_ж^2$, $\Gamma_и^2$) — $v_1u<0$, $H>0$; на $\Gamma_г^3$ ($\Gamma_ж^3$, $\Gamma_и^3$)— $n_1u>0$, $H<0$; на $\Gamma_г^4$ ($\Gamma_ж^4$, $\Gamma_и^4$) — а) $n_1u<0$, $H\leqq 0$ или б) $u=0$.

Рассмотрим следующую краевую задачу 2: *Найти решение уравнения* (7), (г) ((ж), (и)), *когда* $b^1=b^2=0$, *которое удовлетворяет краевым условиям*

$$\zeta=\varphi_1(s) \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma_г^1\cup\Gamma_г^3 \, (\Gamma_ж^1\cup\Gamma_ж^3, \Gamma_и^1\cup\Gamma_и^3), \tag{11}$$

$$\zeta_u=\varphi_2(s) \quad \textit{вдоль} \quad \Gamma_г^2\cup\Gamma_г^3 \, (\Gamma_ж^2\cup\Gamma_ж^3, \Gamma_и^2\cup\Gamma_и^3).$$

Имеют место:

Лемма 1 (2). *Задача* 1 (2) *может иметь не более одного решения в классе* $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$, *если* $\Gamma^1 \cup \Gamma^3 \neq \varnothing (\Gamma^1_г \cup \Gamma^3_г \neq \varnothing (\Gamma^1_ж \subset \Gamma^3_ж \neq \varnothing, \Gamma^1_и \cup \Gamma^3_и \neq \varnothing))$. *Если* $\Gamma^1 \cup \Gamma^3 = \varnothing (\Gamma^1_г \cup \Gamma^3_г = \varnothing (\Gamma^1_ж \cup \Gamma^3_ж = \varnothing, \Gamma^1_и \cup \Gamma^3_и = \varnothing))$, *то любые две решения класса* $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$ *задачи* 1 (2) *отличаются на константу.*

Дальше доказательство теорем 1 и 2 проводится таким же образом, как доказательство теорем 1—4 в работе [1].

3. В этом пункте укажем условия жесткости для некоторых из рассматриваемых классов поверхностей, в случае когда область G характеристическая.

3.1. Рассмотрим поверхность (1) класса $(1^0)-(5^0_1)$, $(б_2)$, когда $m<2l+2$. Для определенности предположим, что l — целое число, а $p_2/2$ — четное. Пусть $O=c_1 \cap c_2$, $B=c_2 \cap c_{1b}$, $B_1=c_2 \cap c_{1\bar{b}}$, где $c_{1b}: \psi(x, y)=b$, $c_{1\bar{b}}: \psi(x, y)=\bar{b}$, $0<\bar{b}<b$. Пусть AB, A_1B_1, AB', A_1B_1' — характеристики уравнения (12) [1], где $A=AB \cap c_1$, $A_1=A_1B_1 \cap c_1$, $B'=AB' \cap c_2$, $B_1'=A_1B_1' \cap c_2$, а BCB' — кусочно-гладкая линия, внутренние точки которой эллиптические, и такая, что вдоль нее $\eta(\psi_x x' + \psi_y y') \geqq 0$. Обозначая образы точек плоскости Oxy при отображении $\wedge$ теми же буквами, но с тильдой над ними (см. рис. 1), имеем:

$$\tilde{A}\tilde{B}: \frac{v^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}+\frac{(-u)^{\frac{2+2l-m}{2}}}{2+2l-m}=\frac{b^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}, \quad \tilde{A}\tilde{B}': \frac{v^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}-\frac{(-u)^{\frac{2+2l-m}{2}}}{2+2l-m}=-\frac{b^{\frac{n+2}{2}}}{n+2},$$

а уравнения $\tilde{A}_1\tilde{B}_1$ и $\tilde{A}_1\tilde{B}_1'$ соответственно такие, как у $\tilde{A}\tilde{B}$, $\tilde{A}\tilde{B}'$, только в правых частях вместо b стоит $\bar{b}$.

а) Пусть $\partial G=AB \cup AB' \cup BCB'$. Тогда $D=\Lambda(G)$ имеет границу $\partial D=\tilde{A}\tilde{B} \cup \tilde{A}\tilde{B}' \cup \tilde{B}\tilde{C}\tilde{B}'$ и так как $\tilde{A}\tilde{B} \cup \tilde{A}\tilde{B}'=\Gamma^4$, а $\tilde{B}\tilde{C}\tilde{B}'=\Gamma^1$, то рассматриваемая поверхность S будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(BCB')$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\mathrm{const}$, а граница $\Pi^{-1}(\tilde{A}\tilde{B} \cup \tilde{A}\tilde{B}')$ свободная.

б) Пусть $\partial G=AB \cup AB' \cup BCB' \cup A_1B_1 \cup A_1B_1' \cup B_1'B_1$ (см. рис. 1). Тогда поверхность S будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(BCB' \cup A_1B_1 \cup A_1B_1')$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\mathrm{const}$, а граница $\Pi^{-1}(AB \cup AB' \cup B_1B_1')$ свободная

в) Если $\partial G=AB \cup AB' \cup BB_1 \cup B_1A_1 \cup A_1B_1' \cup B_1'B'$ $(\partial G=BCB' \cup B'B)$, то поверхность S будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(BB_1 \cup B_1A_1 \cup A_1B_1' \cup B_1'B')$ $(\Pi^{-1}(BCB'))$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\mathrm{const}$, а граница $\Pi^{-1}(AB \cup AB')$ $(\Pi^{-1}(B'B))$ свободная.

г) Если $\partial G=AB \cup AC \cup CB$ $(\partial G=AB' \cup AC \cup CB')$, то поверхность S будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(AC \cup BC)$ $(\Pi^{-1}(AC \cup CB'))$ фиксирована или вдоль нее $\zeta=\mathrm{const}$, а граница $\Pi^{-1}(AB)$ $(\Pi^{-1}(AB'))$ свободная.

3.2. Рассмотрим поверхность (1) класса $(1^0)-(5^0_2)$, (г), для которой $m<2l+2$. Предположим для определенности, что l — целое число, а $p_2/2$, $(2lq_1-p_1)/2$ — четные числа. Пусть $P=c_1 \cap c_2$, $A=c_1 \cap c_{2a}$, $A_1=c_1 \cap c_{2\bar{a}}$, $c_{2a}: \varphi(x, y)=a$. $c_{2\bar{a}}: \varphi(x, y)=\bar{a}$, $0<\bar{a}<a$. Пусть AB, $A'B$, A_1B_1, $A_1'B_1$, AB', $A'B'$, A_1B_1', $A_1'B_1'$ характеристики уравнения (12), [1], где $B=AB \cap c_2$, $B_1=A_1B_1 \cap c_2$, $B'=AB' \cap c_2$, $B_1'=A_1B_1' \cap c_2$, $A', A_1' \geqslant c_1$. Тогда (см. рис. 2)

$$\tilde{A}\tilde{B}: \frac{v^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}+\frac{u^{\frac{2+2l-m}{2}}}{2+2l-m}=\frac{a^{\frac{2+2l-m}{2}}}{2+2l-m}; \quad \tilde{A}'\tilde{B}: \frac{v^{\frac{n+2}{2}}}{n+2}-\frac{u^{\frac{2+2l-m}{2}}}{2+2l-m}=\frac{a^{\frac{2+2l-m}{2}}}{2+2l-m};$$

$$\widetilde{A}\widetilde{B}' : \frac{v^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} - \frac{u^{\frac{2+2l-m}{2}}}{2+2l-m} = -\frac{a^{\frac{2+2l-m}{2}}}{2+2l-m}; \quad \widetilde{A}'\widetilde{B}' : \frac{v^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} + \frac{u^{\frac{2+2l-m}{2}}}{2+2l-m} = -\frac{a^{\frac{2+2l-m}{2}}}{2+2l-m},$$

а уравнения $\widetilde{A}_1\widetilde{B}_1$, $\widetilde{A}_1'\widetilde{B}_1$, $\widetilde{A}_1\widetilde{B}_1'$ и $\widetilde{A}_1'\widetilde{B}_1'$ соответственно такие, как у $\widetilde{A}\widetilde{B}$, $A'\widetilde{B}$ $\widetilde{A}\widetilde{B}'$ и $\widetilde{A}'\widetilde{B}'$, только в правых частях стоит $\bar{a}$ вместо a. Легко видно, что:

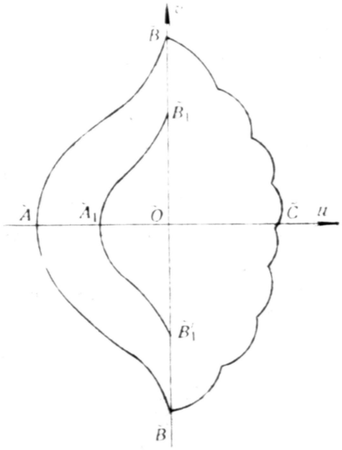

Рис. 1

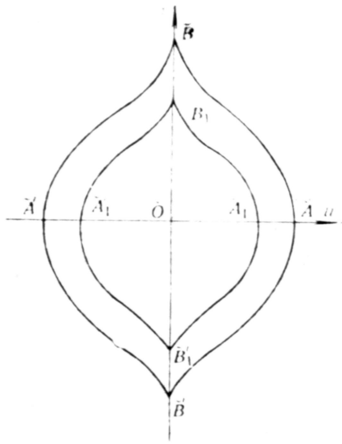

Рис. 2

а) Если $\partial G = AB \cup AB' \cup BA' \cup A'B'$, то рассматриваемая поверхность S будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(A'B \cup A'B')$ фиксирована или вдоль нее $\zeta = \text{const}$, а граница $\Pi^{-1}(AB \cup AB')$ свободная.

б) Если $\partial G = AB \cup AB' \cup BA' \cup A'B' \cup A_1B_1 \cup A_1B_1' \cup B_1A_1' \cup A_1'B_1'$, то поверхность S будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(A'B \cup A'B' \cup A_1B_1 \cup A_1B_1')$ фиксирована или вдоль нее $\zeta = \text{const}$, а граница $\Pi^{-1}(AB \cup AB' \cup A_1'B_1 \cup A_1'B_1')$ свободная.

в) Если $\partial G = AB \cup AB' \cup B'B_1' \cup B_1'A_1 \cup A_1B_1 \cup B_1B$ $(\partial G = A'B \cup A'B' \cup B'B_1' \cup B_1'A_1' \cup A_1'B_1 \cup B_1B)$, то поверхность S будет жесткой, если граница $\Pi^{-1}(B'B_1' \cup B_1'A_1 \cup A_1B_1 \cup B_1B)$ $(\Pi^{-1}(A'B \cup A'B')$ фиксирована или вдоль нее $\zeta = \text{const}$, а граница $\Pi^{-1}(AB \cup AB')$ $(\Pi^{-1}(B'B_1' \cup B_1'A_1' \cup A_1'B_1 \cup B_1B))$ свободная.

г) Если $\partial G = AB \cup AB' \cup B'B$ $(\partial G = A'B \cup A'B' \cup B'B)$, то поверхность S жесткая, если $\Pi^{-1}(BB')((\Pi^{-1}A'B \cup A'B'))$ фиксирована или вдоль нее $\zeta = \text{const}$, а граница $\Pi^{-1}(AB \cup BA')$ $(\Pi^{-}(BB'))$ свободная.

д) Если $\partial G = AB \cup BA' \cup AA'$ $(\partial G = AB' \cup B'A' \cup AA')$, то поверхность S жесткая, если граница $\Pi^{-1}(A'B \cup AA')$ $(\Pi^{-1}(A'B' \cup A'A))$ фиксирована или вдоль нее $\zeta = \text{const}$, а граница $\Pi^{-1}(AB)$ $(\Pi^{-1}(AB'))$ свободная.

4. В этом пункте дадим достаточные условия жесткости некоторых из рассматриваемых классов поверхностей, которые вытекают из известных результатов в теории уравнений смешанного типа.

В работах [3], [4], [5] для уравнения

$$(7') \qquad u\zeta_{uu} + \zeta_{vv} + \alpha\zeta_u = 0, \quad \alpha = \text{const},$$

рассмотрена при $\alpha \geqq 0$ краевая задача E [6] в области D, где уравнение (7′) имеет смешанный тип. Исследованы:

З а д а ч а E_0. *В области D, ограниченной двумя характеристиками разных семейств $\widetilde{A}\widetilde{C}$ и $\widetilde{B}\widetilde{C}$ и гладкой кривой $\widetilde{\Gamma}$, лежащей целиком в полуплоскости* $u>0$ (см. рис. 3), *найти функцию* $\zeta(u, v)$ *такую, что*: 1) $\zeta \in C(D \cup \overline{\widetilde{\Gamma}})$; 2) $\zeta \in C^2(D_+ \cup D_-)$ *и удовлетворяет там уравнению* (7′) *при* $\alpha=0$; 3) $\zeta_u \in C(D)$; 4) $\zeta_{\overline{\widetilde{\Gamma}}} = \widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\varphi} \in C(\overline{\widetilde{\Gamma}})$ $(\overline{\widetilde{\Gamma}} = \widetilde{\Gamma} \cup A \cup B)$.

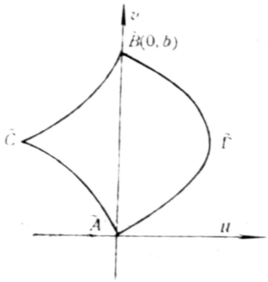

Рис. 3

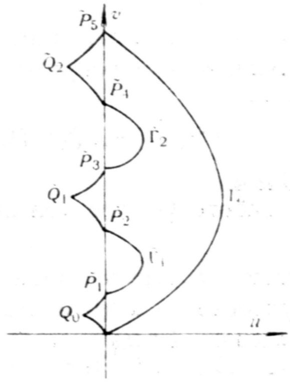

Рис. 4

Задача E_1. *В области D, ограниченной конечным числом гладких кривых* $\{\widetilde{\Gamma}_k\} = \widetilde{\Gamma}$, $k=0, 1, \ldots, n$, *лежащих целиком в полуплоскости* $u>0$ *с концами в точках* $\widetilde{P}_i(0, v_i)$, $i=0, 1, \ldots, 2n+1$, *и отрезками характеристик уравнения* (7′), *выходящих из точек* $\widetilde{P}_i$ (см. рис. 4, а в случае, когда $k=0$, см. рис. 3), *найти функцию* $\zeta(u, v)$, *такую, что*: 1) $\zeta \in C(\overline{D})$; 2) $\zeta \in C^2(D_+ \cup D_-)$ *и удовлетворяет там уравнению* (7′) *при* $\alpha>0$; 3) ζ_u *ограничена в окрестности точек* $L = Ov \cap D$; 4) $\zeta_{|\overline{\widetilde{\Gamma}}} = \widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\varphi} \in C(\overline{\widetilde{\Gamma}})$ $(\overline{\widetilde{\Gamma}} = \widetilde{\Gamma} \cup \{\widetilde{P}_i, i=0, 1, \ldots, 2n+1\})$.

З а д а ч а E_2. *В области D задачи E_1 найти функцию* $\zeta(u, v)$, *такую, что*: 1) $\zeta \in C(\overline{D})$ *кроме, может быть, точек* $\widetilde{P}_i, i=0, 1, \ldots 2n+1$, *но* $\zeta(u, v)$ *ограничена в* D; 2) $\zeta \in C^2(D_+ \cup D_-)$ *и удовлетворяет там уравнению* (7′) *при* $\alpha>0$; 3) $\zeta_{|\widetilde{\Gamma}} = \widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\varphi} \in C(\widetilde{\Gamma})$.

Отметим, что в $E_0(E_1, E_2)$ для $\widetilde{\Gamma}$ предполагается еще, что составляет с положительным направлением оси Ov угол, отличный от O в $A(P_{2k})$ и от Π в B (P_{2k+1}), а через D_+ (D_-) обозначена та часть области D, которая лежит в полуплоскости $u>0$ $(u<0)$. Обозначим через $\widetilde{C}_0$ класс функций, удовлетворяющих условиям 1), 2) и 3) задачи E_0, через $\widetilde{C}_1$ — класс функций, удовлетворяющих условиям 1), 2) и 3) задачи E_1, и через $\widetilde{C}_2$ — класс функций, удовлетворяющих условиям 1) и 2) задачи E_2. Из единственности задач E_0, E_1 и E_2 получаем:

У т в е р ж д е н и е 1. *Поверхность класса* (1), $(1^0)-(4^0)$, (5^{00}), $(б_2)$ *при* $l=n=0$, $m=1$, *когда*, $\partial G = AC \cup BC \cup \Gamma$ $(\partial D = \Lambda(\partial G) = \widetilde{A}\widetilde{C} \cup \widetilde{B}\widetilde{C} \cup \widetilde{\Gamma}$, см. рис. 3), *жестка в классе* $\widetilde{C}_0$ *б. м. изгибаний, если граница* $\pi^{-1}(\overline{\Gamma})$ ***фиксирована*** *или вдоль нее* $\zeta=\mathrm{const}$, *а граница* $\Pi^{-1}(AC\cup BC\cup C)$ *свободная.*

Утверждение 2 (3). *Поверхность класса* (1), (1^0)—(4^0), ($б_2$) *при* $l=n=0$, $m=1$, *для которой* $f_{xy}\psi_{yy}-2f_{xy}\psi_{xy}+f_{yy}\psi_{xx}=0$, $(f_{xx}\varphi_{yy}-2f_{xv}\psi_{xy}+f_{yy}\varphi_{xx})/\Delta\theta=\alpha=\mathrm{const}>0$

$$(f_{xx}\psi_{yy}-2f_{xv}\psi_{xy}+f_{yy}\psi_{xx}=0,\ (f_{xx}\varphi_{yy}-2f_{xv}\psi_{xy}+f_{yy}\varphi_{xx})/\Delta\theta=\alpha=\mathrm{const}\geqq 1),$$

$$\partial G=\Gamma\cup\bigcup_{k=0}^{n}(P_{2k}Q_k\cup P_{2k+1}Q_k)=\Lambda^{-1}(\partial D)=\Lambda^{-1}(\widetilde{\Gamma}\cup\bigcup_{k=0}^{n}(\widetilde{P}_{2k}\widetilde{Q}_k\cup\widetilde{P}_{2k+1}\widetilde{Q}_k))$$

(см. рис. 4, а в случае, когда $k=0$, см. рис. 3), *жестка в классе* $\widetilde{C}_1(\widetilde{C}_2)$ *б. м. изгибаний, если граница* $\Pi^{-1}(\overline{\Gamma})\,(\Pi^{-1}(\Gamma))$ *фиксирована или вдоль нее* $\zeta=\mathrm{const}$, *а граница*

$$\Pi^{-1}(\bigcup_{k=0}^{n}(P_{2k}Q_k\cup P_{2k+1}Q_k\cup Q_k))\ \ (\Pi^{-1}(\bigcup_{k=0}^{n}(\overline{P_{2k}Q_k}\cup\overline{P_{2k+1}Q_k})))$$

свободная.

В работе [7] для уравнения

$$\mathrm{sgn}\,u\,|u|^m\zeta_{uu}+\zeta_{vv}=0,\ 0<m<1, \tag{7''}$$

в области D, ограниченной кривой $\widetilde{\Gamma}$ из класса Ляпунова, расположенной в полуплоскости $u>0$, и характеристиками $\widetilde{A}\widetilde{C}$ и $\widetilde{B}\widetilde{C}$ (см. рис. 3) рассмотрена

Задача Трикоми (Т). *Найти функцию* $\zeta(u,v)$ *из класса* $C(\overline{D})\cap C^1(D)\cap C^2(D_+\cup D_-)$, *удовлетворяющую уравнению* ($7''$) *в областях* D_+ *и* D_- *и* $\zeta_{\overline{\Gamma\cup\widetilde{A}\widetilde{C}}}=\widetilde{\varphi}(s)$, *где* s — *длина дуги, отсчитывая от точки.* B.

Функция $\zeta(u,v)$ *называется регулярным решением задачи* T *из класса* R_T, *если она удовлетворяет условиям задачи* T, $\zeta\in C^1(\overline{D}\setminus\{A,B\})$ *и*

$$(u^{\frac{-m}{2}}\zeta_v)^2+\zeta_u^2=O(r_A^{\frac{-1}{2}+\varepsilon_1}),\quad (u^{\frac{-m}{2}}\zeta_v)^2+\zeta_u^2=O(r_B^{\frac{-1}{2}+\varepsilon_2}),$$
$$0<\varepsilon_1,\ \varepsilon_2<1/2,\ r_A^2=u^2+v^2,\ r_B^2=(b-v)^2+u^2.$$

Из единственности задачи Т следует

Утверждение 4. *Поверхность класса* (1), (1^0)—(4^0), (5^{00}), ($б_2$) *при* $l=n=0$, $0<m<1$, *когда* $\partial G=AC\cup BC\cup\Gamma$ (см. рис. 3), *жестка в классе* R_T *б. м. изгибаний, если граница* $\Pi^{-1}(\overline{\Gamma\cup AC})$ *фиксирована или вдоль нее* $\zeta=\mathrm{const}$, *а граница* $\Pi^{-1}(BC)$ *свободная.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ив. Иванова-Каратопраклиева. Условия жесткости некоторых классов поверхностей смешанного типа, I. Сердика, **10**, 1984, № 3.
2. Г. Д. Каратопраклиев. Об одном классе уравнений смешанного типа в многомерных областях. *ДАН СССР* **230**, 1976, 769—772.
3. И. Л. Кароль. К теории уравнений смешанного типа. *ДАН СССР*, **88**, 1953, 397—400.
4. И. Л. Кароль. Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. *ДАН СССР*, **101**, 1955, 753—796.
5. И. Л. Кароль. К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. *Матем. сб.*, **38**, 1956, 261—282.
6. М. В. Келдыш. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. *ДАН СССР*, **77**, 1951, 181—184.
7. К. Б. Сабитов. О единственности решения задачи Трикоми для одного уравнения смешанного типа второго рода. Диф. ур. с частными произв. *Тр. конф. по диф. ур. и выч. мат. АН СССР, Сиб. отд. ИМ, 1980, Новосибирск, 48—50.*

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 2.4. 1982