Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

АСИМПТОТИКА СЛЕДОВ ОПЕРАТОРОВ ТЕПЛИЦЕВОГО ТИПА

ГЕОРГИ Е. КАРАДЖОВ

Получена оценка остатка в асимптотике следов операторов теплицевого типа, порожденные псевдодифференциальными операторами на замкнутом многообразии.

1. Пусть M — гладкое n-мерное замкнутое многообразие и P — положительный самосопряженный в $L^2(M)$ эллиптический классический псевдодифференциальный оператор (п. д. о.) первого порядка с главным символом $p(x, \xi)>0$ при $\xi \neq 0$. Пусть E_λ есть спектральное разбиение единицы оператора P. Для ограниченного самосопряженного в $L^2(M)$ оператора Q положим $Q_\lambda = E_\lambda Q E_\lambda$. Таким образом имеем самосопряженный конечномерный оператор Q_λ теплицевого типа. Нашей целью является оценка остатка асимптотки следов:

$$R_{k,\lambda} = \operatorname{trace} Q_\lambda^k - a_k . \lambda^n, \tag{1}$$

где $a_k . \lambda^n$ есть главный член и k — натуральное число.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если Q — классический п.д.о. порядка ноль с главным символом $q(x, \xi)$, то*

$$\operatorname{trace} Q_\lambda^k = \lambda^n \iint_{p(x,\,\xi)<1} [q(x, \xi)]^k dx\, đ\xi + O(\lambda^{n-1}), \ \lambda>1, \tag{2}$$

где $đ\xi = (2\pi)^{-n} d\xi$.

Замечание 1. Главный член в (2) нашли В. Гийемин [1] и X. Уидом [2]. Оценка остатка точна.

В связи с приложениями к задачам математической статистики [3:4] возникает необходимость оценивать величину (1) при минимальных требованиях регулярности символа $q(x, \xi)$. Здесь мы рассмотрим случай, когда $q(x, \xi) = q(x)$ и $q(x)$ принадлежит пространству Соболева $H^{s/2}(M)$, $0<s\leq 1$, либо пространству Бесова $B^{s/2}_{2\infty}(M)$, $0<s<1$. Ясно, что Q есть просто оператор умножения на вещественную ограниченную функцию $q(x)$.

Теорема 2 (случай $n \geq 2$). *Если для каждого $x \in M$ гауссова кривизна многообразия $S^*_x M = \{x, \xi) \in T^*_x M \mid p(x, \xi) = 1\}$ строго положительна и $q \in H^{s/2}(M)$, $0<s\leq 1$, то*

$$\operatorname{trace} Q_\lambda^k = \lambda^n \iint_{p(x,\,\xi)<1} [q(x)]^k\, dx\, đ\xi + O(\lambda^{n-s}), \ \lambda>1. \tag{3}$$

Теорема 3 (случай $n=1$). *Если $q \in H^{s/2}(M)$, $0<s\leq 1$, то*

$$\operatorname{trace} Q_\lambda^k = \lambda \iint_{p(x,\,\xi)<1} [q(x)]^k\, dx\, đ\xi + O(\lambda^{1-s}), \ \lambda>1. \tag{4}$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 10, 1984, с. 367—375.

Теорема 4. *Если в условиях теорем 2 и 3 предположение* $q \in H^{s/2}(M)$ *заменить на предположение* $q \in B^{s/2}_{2\infty}(M)$, $0<s<1$, *то снова имеют место оценки* (3), (4).

Результаты теорем 2, 3 и 4 применимы к асимптотике теплицева определителя $\log\det Q_\lambda$. Эта задача тоже связана с приложениями в математической статистике [3; 4].

Следствие. *Если в условиях теорем 2, 3 и 4 имеем* $\operatorname{vraiinf} q(x) >0$, *то*

$$\operatorname{trace}\log Q_\lambda=\lambda^n \iint\limits_{p(x,\xi)<1} \log[q(x)]\,dx\,đ\xi+O(\lambda^{n-s}),\ \lambda>1. \tag{5}$$

Замечание 2. М. С. Гиновяном [4] получена асимптотика (5) в случае $M=S^1$ и $P^2=-\frac{d^2}{dx^2}$ при некоторых иных предположениях на символ $q(x)$.

2. Доказательство теоремы 1. Через $e(\lambda, x, y)$ будем обозначать спектральную функцию оператора P, т. е. ядро интегрального оператора E_λ. Хорошо известно [5], что функция $(x, y)\to e(\lambda, x, y)$ является гладкой на многообразии $M\times M$. Если $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots$ суть собственные числа оператора P и $\{\varphi_j(x)\}$ — соответствующие собственные функции, то

$$e(\lambda, x, y)=\sum_{\lambda_j\leq\lambda}\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}. \tag{6}$$

Оператор QE_λ является интегральным оператором с гладким ядром $(QE_\lambda)(x, y)$, которое, в локальных координатах, задается с помощью повторного абсолютно сходящегося интеграла

$$(QE_\lambda)(x, y)=\iint e^{i(x-z)\eta}\,\sigma(x,\eta)\,e(\lambda, z, y)\,dz\,đ\eta, \tag{7}$$

где $\sigma(x,\eta)$ есть полный символ оператора Q. Здесь и в дальнейшем символ $\int$ употребляется для интеграла Лебега, взятого по всему пространству.

Пусть $\rho(\lambda)$ — неотрицательная функция на прямой, чье преобразование Фурье $\widehat{\rho}(t)$ имеет достаточно маленький носитель и $\widehat{\rho}(0)=1$. Положим $E^\rho_\lambda = \int\rho(\lambda-\mu)E_\mu d\mu$. Если $\|\,.\,\|_1$ есть ядерная норма оператора, то

$$\|E^\rho_\lambda-E_\lambda\|_1\leq\int\rho(\mu)\,\|E_{\lambda-\mu}-E_\lambda\|_1\,d\mu. \tag{8}$$

Поскольку оператор $E_{\lambda-\mu}-E_\lambda$ является положительным при $\mu<0$ и отрицательным при $\mu>0$, то

$$\|E_{\lambda-\mu}-E_\lambda\|_1=|\operatorname{trace}(E_{\lambda-\mu}-E_\lambda)|. \tag{9}$$

С другой стороны, $\operatorname{trace}(E_{\lambda-\mu}-E_\lambda)=\int\limits_M[e(\lambda-\mu, x, x)-e(\lambda, x, x)]\,dx$, откуда по теореме Хермандера [5],

$$|\operatorname{trace}(E_{\lambda-\mu}-E_\lambda)|\leq C(1+|\mu|)^n\lambda^{n-1},\ \lambda>1. \tag{10}$$

Комбинируя (8)—(10), получаем

$$\|E^\rho_\lambda-E_\lambda\|_1=O(\lambda^{n-1}). \tag{11}$$

Далее, $\operatorname{trace} Q^k_\lambda=\sum_{\lambda_j\leq\lambda}((QE_\lambda)^k\varphi_j,\varphi_j)=\operatorname{trace}(QE_\lambda)^k$ и

$$|\operatorname{trace}[(QE_\lambda)^k-(QE^\rho_\lambda)^k]|\leq k\,\|Q\|^k\,\|E^\rho_\lambda-E_\lambda\|_1. \tag{12}$$

Пусть $K_\lambda(x, y)$ есть ядро оператора $(QE_\lambda^\rho)^k$. Тогда из (11) и (12) следует, что

$$\operatorname{trace} Q_\lambda^k \sim \int_M K_\lambda(x, x)\, dx, \tag{13}$$

где запись $a_\lambda \sim b_\lambda$ означает, что $a_\lambda - b_\lambda = O(\lambda^{n-1})$, $\lambda > 1$. Теперь вычислим функцию $K_\lambda(x, x)$ в локальных координатах. Для этого отметим, что

$$(QE_\lambda^\rho)(x, y) = \int e^{i(x-z)\eta} \sigma(x, \eta)\, e_\rho(\lambda, z, y)\, dz\, đ\eta, \tag{14}$$

где $e_\rho(\lambda, x, y) = \int \rho(\lambda-\mu)\, e(\mu, x, y)\, d\mu$. По теореме Хермандера [5],

$$e_\rho(\lambda, x, y) = \int_{p(y,\xi)<\lambda} e^{i\psi} I(x, y, \xi)\, đ\xi + \int_{p(y,\xi)<2\lambda} e^{i\psi} R(\lambda - p(y, \xi), x, y, \xi)\, đ\xi + O(\lambda^{-\infty}), \tag{15}$$

где $I(x, y, \xi)$ и $R(\lambda, x, y, \xi)$ суть классические символы порядка ноль сосредоточенные в окрестности диагонали $x = y$. При этом функция $\lambda \to R(\lambda, x, y, \xi)$ является быстро убывающей и

$$I(x, x, \xi) = 1 \text{ вне окрестности точки } \xi = 0. \tag{16}$$

Фазовая функция ψ имеет вид

$$\psi(x, y, \xi) = (x-y)\xi + \langle C(x, y, \xi)(x-y),\ x-y\rangle, \tag{17}$$

где матрица $C(x, y, \xi)$ есть однородная функция порядка 1 относительно переменной ξ.

Далее, замена переменных

$$\gamma : \xi \to \xi + C(x, y, \xi)(x-y) \tag{18}$$

является невырожденной при близких x и y и $\gamma = id$ при $x = y$. Пусть $\mu(x, y, \xi)$ есть обратное преобразование. Положим

$$D_\lambda = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid p(x, \xi) < \lambda\} \tag{19}$$

и обозначим через F_λ образ множества D_λ при отображении γ. С помощью замены переменных в правой части (15), учитывая (17)—(19), получаем

$$e_\rho(\lambda, x, y) = \lambda^n \int_{F_1} e^{i\lambda(x-y)\xi} I_1(x, y, \lambda\xi)\, đ\xi + \lambda^n \int_{F_2} e^{i\lambda(x-y)\xi} R_1(\lambda, x, y, \lambda\xi)\, đ\xi + O(\lambda^{-\infty}) \tag{20}$$

где

$$I_1(x, y, \xi) = I(x, y, \mu(x, y, \xi)) \left| \frac{d\mu}{d\xi} \right|, \tag{21}$$

$$R_1(\lambda, x, y, \xi) = R(\lambda - p(y, \mu(x, y, \xi)),\ x, y, \mu(x, y, \xi)) \left| \frac{d\mu}{d\xi} \right| . \tag{22}$$

Теперь из (14) и (20) находим следующую формулу в локальных координатах:

$$K_\lambda(x, x) \sim \int e^{i\lambda\Phi(x, \xi, \vec{x}, \vec{\xi})} a(\lambda, x, \xi, \vec{x}, \vec{\xi})\, đ\xi\, d\vec{x}\, đ\vec{\xi}, \tag{23}$$

где $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{2k-1})$, $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{2k-1})$ и

(24) $$\Phi(x, \xi, \vec{x}, \vec{\xi}) = \sum_{j=1}^{2k} (x_{j-1} - x_j)\xi_j, \quad x_0 = x_{2k} = x, \quad \xi_{2k} = \xi,$$

$a(\lambda, x, \xi, \vec{x}, \vec{\xi})$ есть сумма 2^k слагаемых, одно из которых имеет вид

(25) $$\prod_{j=1}^{k} \sigma(x_{2j-2}, \xi_{2j-1}) I_1(x_{2j-1}, x_{2j}, \xi_{2j}),$$

а остальные содержат множитель R_1 хотя бы в первой степени. Интегралы в (23) берутся по соответствующим множествам.

Для нахождения асимптотики интеграла (23) применим метод стационарной фазы по переменным $\vec{x}, \vec{\xi}$. Согласно этому методу [5], учитывая (16), (21), (22), (24), (25) и лемму 21.8 [5], получаем

(26) $$K_\lambda(x, x) \sim \int_{p(x, \xi)<\lambda} [\sigma(x, \xi)]^k \, đ\xi.$$

Теперь, поскольку разность $[\sigma(x, \xi)]^k - [q(x, \xi)]^k$ есть классический символ порядка -1, из (26) следует

(26′) $$K_\lambda(x, x) \sim \int_{(x, \xi)<\lambda} [q(x, \xi)^k \, đ\xi.$$

Далее, из (13) и (26′) получаем

(27) $$\operatorname{trace} Q_\lambda^k \sim \int_{p(x, \xi)<\lambda} [q(x, \xi)]^k \, đ\xi.$$

Наконец, ввиду однородности символов $p(x, \xi)$ и $q(x, \xi)$ из (27) вытекает (2). Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Сначала найдем оценку величины $e_\rho(\lambda, x, y)$ в локальных координатах.

Лемма. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — фиксированный компакт и пусть для каждого $y \in K$ гауссова кривизна $\varkappa, (y, \xi)$ гиперповерхности $S_y = \{\xi \mid p(y, \xi) = 1\}$ строго положительна. Положим $\delta = \min\{\varkappa(y, \xi) \mid y \in K, |\xi| = 1\}$. Тогда*

(28) $$e_\rho(\lambda, x, y) = O(\lambda^{(n-1)/2} |x-y|^{-(n+1)/2}), \quad \lambda|x-y| > 2,$$

равномерно относительно точек (x, y) таких, что $|x-y| \le \varepsilon$, $y \in K$, где $\varepsilon = C.\delta$ для некоторого $C > 0$.

Доказательство леммы. По теореме Хермандера [5],

(29) $$e_\rho(\lambda, x, y) \sim A_\lambda(x, y) + B_\lambda(x, y),$$

где

$$A_\lambda(x, y) = \int_{p(y, \xi)<\lambda} e^{i\psi(x, y, \xi)} I(x, y, \xi)\, đ\xi, \quad B_\lambda(x, y) = \int e^{i\psi(x, y, \xi)} R(\lambda - p(y, \xi), x, y, \xi) đ\xi,$$

$R(\lambda, x, y, \xi)$ и $I(x, y, \xi)$ суть классические символы порядка ноль, сосредоточенные в окрестности диагонали $x = y$, и функция $\lambda \to R(\lambda, x, y, \xi)$ быстро убывает. С помощью меры Гельфанда — Лере $\mu(d\xi)$ на поверхности S_y величина $A_\lambda(x, y)$ записывается в виде

$$A_\lambda(x, y) = \int_0^\lambda \sigma^{n-1} \Big[\int_{S_y} e^{i\sigma\psi(x, y, \xi)} I(x, y, \sigma\xi)\, \mu(d\xi)\Big] d\sigma.$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим

$$A_\lambda(x, y) = A_1(\lambda, x, y; I) + A_2(\lambda, x, y), \tag{30}$$

где
$$A_1(\lambda, x, y; I) = \lambda^{n-1} \int_{S_y} e^{i\lambda\psi(x, y, \xi)} I_1(x, y, \lambda\xi)\mu(d\xi),$$

$$A_2(\lambda, x, y) = \int_0^\lambda \sigma^{n-2} \left[\int_{S_y} e^{i\sigma\psi(x, y, \xi)} I_2(x, y, \sigma\xi)\mu(d\xi)\right] d\sigma,$$

$I_1(x, y, \lambda\xi)$ получается из символа $I(x, y, \lambda\xi)$ делением на фазу $i\psi(x, y, \xi)$ и $I_2(x, y, \sigma\xi)$ получается из символа $J(x, y, \sigma\xi) = -\sigma\xi d_\xi I(x, y, \sigma\xi) - (n-1) \times I(x, y, \sigma\xi)$ тем же способом.

Далее, фазу $\psi(x, y, \xi)$ можно преобразовать к виду $\psi(x, y, \xi) = |z|\psi_1(x, y, \xi)$, где $z = x - y = |z|\omega$ и $\psi_1(x, y, \xi) = \omega\xi + |z|\langle C(x, y, \xi)\omega, \omega\rangle$. Тогда

$$A_1(\lambda, x, y; I) = \lambda^{n-1}|z|^{-1} \int_{S_y} e^{i\lambda|z|\psi_1(x, y, \xi)} I_1(x, y, \lambda\xi)\,\mu(d\xi),$$

если в определении I_1 заменим ψ на ψ_1. К величине A_1 будем применять метод стационарной фазы. Хорошо известно [6], что критические точки ξ_0 для фазы $\psi_1(x, y, \xi)$ определяются условием: гиперповерхность $\{\xi \mid \psi_1(x, y, \xi) = \psi_1(x, y, \xi_0)\}$ касается гиперповерхности S_y в точке ξ_0. Покажем, что фаза $\psi_1(x, y, \xi)$ имеет конечное число невырожденных критических точек, если только $0 < |z| \leqq \varepsilon$ и число ε достаточно малое. Действительно, не умаляя общности, можно считать что $z = (0, \ldots, z_n)$, $z_n > 0$. В местной системе координат $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ с центром в точке ξ_0, гиперповерхность S_y задается уравнением

$$\eta_n = \frac{1}{2}\langle G\eta', \eta'\rangle + \cdots \tag{31}$$

при маленьких $|\eta'|$, где $\eta' = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$. В этих же координатах фаза ψ_1 имеет вид

$$\psi_1(x, y, \eta) = \omega\xi_0 + \eta_n + z_n g(x, y, \eta). \tag{32}$$

Из (31) и (32) получаем, что $d^2_{\eta'}\psi_1 = G + z_n d^2_{\eta'} g$, откуда следует равенство $\det d^2_{\eta'}\psi_1 = \det G + z_n F(z_n, G, d^2_{\eta'} g)$. Поэтому, если z_n достаточно мало, то критическая точка ξ_0 невырождена точно в том случае, когда $\det G \neq 0$. Последнее, ввиду (31), означает, что гауссова кривизна гиперповерхности S_y в точке ξ_0 положительна. Тогда из условия леммы следует, что все критические точки невырождены. Поскольку гиперповерхность S_y есть компакт, то число этих критических точек конечно. Теперь, по методу стационарной фазы, имеем

$$A_1(\lambda, x, y; I) = O^{(n-1)/2}|z|^{-(n+1)/2}), \quad \lambda|z| > 1, \tag{33}$$

равномерно при $|z| \leqq \varepsilon$.

Далее, $A_2(\lambda, x, y) = \int_{1/|z|}^{\lambda} A_1(\sigma, x, y; J)\frac{d\sigma}{\sigma} + O(|z|^{-n+1})$, поэтому из (33) получаем

$$A_2(\lambda, x, y) = O(\lambda^{(n-1)/2}|z|^{-(n+1)/2}), \quad \lambda|z| > 1, \tag{34}$$

равномерно при $|z| \leqq \varepsilon$.

Для оценки величины $B_\lambda(x, y)$ сначала заметим, что $B_\lambda(x, y) \sim \int\limits_{\lambda/2}^{\lambda} \sigma^{n-1} C_\lambda(\sigma, x, y) d\sigma$, где $C_\lambda(\sigma, x, y) = \int\limits_{S_y} e^{i\sigma\psi(x, y, \xi)} R(\lambda-\sigma, x, y, \sigma\xi)\mu(d\xi)$. Но, аналогично (33), имеем $C_\lambda(\sigma, x, y) = O_N((\sigma-|z|)^{-(n-1)/2}(1+|\lambda-\sigma|)^{-N}) + O((\sigma|z|)^{-(n+1)/2})$ равномерно при $|z| \leq \varepsilon$, где $\sigma|z|>1$ и N — любое число. Поэтому

$$B_\lambda(x, y) = O(\lambda^{(n-1)/2}|z|^{-(n+1)/2}), \ \lambda|z|>2, \tag{35}$$

равномерно при $|z| \leq \varepsilon$.

Теперь из (29), (30), (34) и (35) следует (28). Лемма доказана.

Приступая к доказательству теоремы 2, отметим сначала следующие соотношения. Имеем

$$Q_\lambda^k = E_\lambda Q^k E_\lambda + S_{k,\lambda}, \tag{36}$$

$$|\operatorname{trace} S_{k,\lambda}| \leq (2^{k-1}-1)\|Q\|^{k-2}\|S_\lambda\|_2^2, \ k \geq 2, \tag{37}$$

где $\|\cdot\|_2$ есть норма Гильберта — Шмидта и

$$S_\lambda = (id - E_\lambda) Q E_\lambda. \tag{38}$$

С другой стороны, $\operatorname{trace} E_\lambda Q^k E_\lambda = \int\limits_M [q(x)]^k e(\lambda, x, x) dx$. По теореме Хермандера [5], $e(\lambda, x, x) \sim \lambda^n \int\limits_{p(x,\xi)<1} d\!\!{}^-\xi$. Поэтому

$$\operatorname{trace} E_\lambda Q^k E_\lambda \sim \lambda^n \iint\limits_{p(x,\xi)<1} [q(x)]^k dx\, d\!\!{}^-\xi. \tag{39}$$

Далее, так как $\|S_\lambda\|_2^2 = \operatorname{trace} S_\lambda S_\lambda^*$, то из (38) следует, что $\|S_\lambda\|_2^2 = \operatorname{trace} QE_\lambda Q - \operatorname{trace} E_\lambda Q E_\lambda Q$. Отсюда вытекает (см. [7])

$$\|S_\lambda\|_2^2 = \frac{1}{2} \iint\limits_{MM} [(q(x)-q(y)]^2 |e(\lambda, x, y)|^2 dx\, dy. \tag{40}$$

Положим $\alpha(\lambda, x, y) = e(\lambda, x, y) - e_\rho(\lambda, x, y)$. Тогда, учитывая оценку (10), получаем

$$\|[q(x)-q(y)]\alpha(\lambda, x, y)\|^2 \leq C\|q\|_2^2 . \lambda^{n-1}, \tag{41}$$

где $\|\cdot\|$ означает L^2-норму на множестве $M \times M$ и $\|\cdot\|_2 = L^2$ — норму на множестве M.

С другой строны, из (28) следует, что при $0<s\leq 1$ имеем

$$\iint\limits_{1/\lambda<|x-y|<\varepsilon} |q(x)-q(y)|^2 |e_\rho(\lambda, x, y)|^2 dx dy \leq C.\lambda^{n-s} \iint |q(x)-q(y)|^2 |x-y|^{-n-s} dx\, dy.$$

Отсюда и из (41) вытекает

$$\iint\limits_{1/\lambda<|x-y|<\varepsilon} |q(x)-q(y)|^2 |e(\lambda, x, y)|^2 dx\, dy \leq C . \|q\|^2_{H^{s/2}(M)} . \lambda^{n-s}. \tag{42}$$

Далее,

$$\iint\limits_{1/\lambda>|x-y|} |q(x)-q(y)|^2 |e(\lambda, x, y)|^2 dx\, dy \leq C . \|q\|^2_{H^{s/2}(M)} \lambda^{n-s}. \tag{43}$$

Так как $e_\rho(\lambda, x, y) = O(\lambda^{-\infty})$ при $|x-y|>\varepsilon$, то, учитывая (41), получаем

(44) $$\iint\limits_{|x-y|<\varepsilon} |q(x)-q(y)|^2 |e(\lambda, x, y)|^2\, dx\, dy \leqq C\,.\, \|q\|_2^2\,.\,\lambda^{n-1}.$$

Теперь, из (40), (42)—(44) находим

(45) $$\|S_\lambda\|_2^2 \leqq C\,.\,\|q\|^2_{H^{s/2}(M)}\,.\,\lambda^{n-s}.$$

Наконец, из (36), (37), (39) и (45) следует

(46) $$\begin{cases} \operatorname{trace} Q_\lambda^k = \lambda^n \iint\limits_{p(x,\xi)<1} [q(x)]^k\, dx\, đ\xi + R_{k,\lambda}, \\ |R_{1,\lambda}| \leqq C\,\|q\|_1\,.\,\lambda^{n-1}, \quad |R_{k,\lambda}| \leqq C\,.\,2^k\,\|q\|_\infty^{k-2}\,\|q\|^2_{H^{s/2}(M)}\,.\,\lambda^{n-s}\ (k\geqq 2), \end{cases}$$

где $\|q\|_1 = \int\limits_M |q(x)|\,dx$, $\|q\|_\infty = \sup\limits_M |q(x)|$. Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теорем 3 и 4. По теореме Хермандера [5],

(47) $$e(\lambda, x, y) = \int\limits_{p(y,\xi)<\lambda} e^{i\psi(x,y,\xi)}\, đ\xi + O(1), \quad \lambda>1,$$

равномерно при $|x-y|\leqq\varepsilon$. Фазовая функция ψ имеет вид $\psi(x, y, \xi) = (x-y)\xi + b(x, y, \xi)(x-y)^2$. Поэтому $d_\xi\psi = (x-y)\,c(x, y, \xi)$, $c(x, y, \xi)\geqq\delta>0$, $c(x, x, \xi) = 1$, $d_\xi^2\psi = (x-y)^2 d_\xi^2 b$. Так как $p(y, \xi) = |\xi|\,p(y, \operatorname{sign}\xi)$, то $\int\limits_{p(y,\xi)<\lambda} e^{i\psi}\, đ\xi = \int\limits_\alpha^\beta e^{i\psi}\, đ\xi$, $\alpha = -\dfrac{\lambda}{p(y,-1)}$, $\beta = \dfrac{\lambda}{p(y,1)}$. С помощью интегрирования по частям получаем $\int\limits_\alpha^\beta e^{i\psi}\, đ\xi = O(|x-y|^{-1})$ равномерно при $0<|x-y|\leqq\varepsilon$. Отсюда и из (47) следует

(48) $$e(\lambda, x, y) = O(|x-y|^{-1}) \text{ равномерно при } 0<|x-y|\leqq\varepsilon.$$

Теперь из (48) вытекает (42) при $n=1$. Из (47) следует (43) при $n=1$. Так как $e(\lambda, x\ y) = O(1)$ при $|x-y|>\varepsilon$, то имеет место (44) при $n=1$. Дальше рассуждаем как при доказательстве теоремы 2. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теорем 2 и 3. Нужно только заметить, что оценку (45) при $0<s<1$ можно усилить следующим образом:

(49) $$\|S_\lambda\|_2^2 \leqq C\,.\,\|q\|^2_{B^{s/2}_{2\infty}(M)}\,.\,\lambda^{n-s}, \quad 0<s<1.$$

Действительно, линейное отображение $q\to S_\lambda$, согласно оценке (45), является непрерывным отображением из пространства Соболева $H^{s/2}(M)$ в пространство операторов Гильберта — Шмидта для каждого $s\in(0, 1)$. Поэтому можно интерполировать. С помощью метода „средних" [8] получаем оценку (49). Теорема 4 доказана.

5. Доказательство следствия. Пусть H_λ есть то подпространство в $L_2(M)$, на которое проектирует оператор E_λ. Его размерность совпадает с количеством собственных чисел оператора P, не превосходящих λ. По теореме Хермендера [5],

(50) $$\dim H_\lambda \sim \lambda^n \iint\limits_{p(x,\xi)<1} dx\, đ\xi.$$

При вычислении функции $\log Q_\lambda$ оператор $Q_\lambda = E_\lambda Q E_\lambda$ будем рассматривать только на подпространстве H_λ. Имеет место оценка

$$a \| u \|_2^2 \leqq (Qu, u) \leqq b \| u \|_2^2, \quad u \in L^2(M), \tag{51}$$

где $a = \operatorname{vraiinf} q(x)$, $b = \operatorname{vraisup} q(x)$. Положим $P(\alpha) = Q + \alpha$, $0 \leqq \alpha \leqq 2b$ и $P_\lambda(\alpha) = Q_\lambda + \alpha E_\lambda$. Так как оператор $P_\lambda(\alpha)$ — положительно определенный и $\frac{d}{d\alpha} P_\lambda(\alpha) = E_\lambda$, то

$$\frac{d}{d\alpha} \log P_\lambda(\alpha) = [P_\lambda(\alpha)]^{-1} E_\lambda. \tag{52}$$

С другой стороны, $E_\lambda P(\alpha) E_\lambda [P(\alpha)]^{-1} E_\lambda = E_\lambda + E_\lambda P(\alpha)(-id + E_\lambda)[P(\alpha)]^{-1} E_\lambda$, откуда $[P_\lambda(\alpha)]^{-1} E_\lambda = E_\lambda [P(\alpha)]^{-1} E_\lambda + [P_\lambda(\alpha)]^{-1} E_\lambda P(\alpha)(id - E_\lambda)[P(\alpha)]^{-1} E_\lambda$. Учитывая еще оценку (45), получаем

$$\operatorname{trace} [P_\lambda(\alpha)]^{-1} . E_\lambda = \operatorname{trace} E_\lambda [P(\alpha)]^{-1} E_\lambda + O(\lambda^{n-s}), \tag{53}$$

равномерно относительно $\alpha \in [0, 2b]$.
Из (52) и (53) следует, что

$$\frac{d}{d\alpha} \operatorname{trace} \log P_\lambda(\alpha) = \operatorname{trace} E_\lambda [P(\alpha)]^{-1} E_\lambda + O(\lambda^{n-s}) \tag{54}$$

равномерно относительно $\alpha \in [0, 2b]$.

Далее, так как $q \in H^{s/2}(M)$, то функция $1/(q(x) + \alpha)$ также принадлежит этому пространству, и ее норма оценивается равномерно по $\alpha \in [0, 2b]$. Поэтому можно применить теоремы 2, 3, 4 к правой части (54). После интегрирования по α получаем

$$\operatorname{trace} \log P_\lambda(2b) - \operatorname{trace} \log Q_\lambda = \lambda^n \int\limits_{p(x,\xi)<1} [\log(q(x) + 2b) - \log q(x)] dx\, đ\xi + O(\lambda^{n-s}). \tag{55}$$

Остается найти асимптотику величины $\operatorname{trace} \log P_\lambda(2b)$. Для этого положим $id + A = cP(2b)$, где c — произвольное число, лежащее в интервале $(2/3(a+2b), 4/9b)$. Тогда оператор A есть оператор умножения на функцию $a(x) = c(q(x) + 2b) - 1$ и имеет норму $\| A \| \leqq 1/3$. Поэтому $\log P_\lambda(2b) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} . A_\lambda^k - I_\lambda . \log c$, где I_λ есть идентитет в H_λ. Теперь можно применить теоремы 2, 3, 4. Учитывая еще оценки (46) и (50), получаем

$$\operatorname{trace} \log P_\lambda(2b) = \lambda^n \int\limits_{p(x,\xi)<1} \log(q(x) + 2b) dx\, đ\xi + O(\lambda^{n-s}).$$

Отсюда и из (55) вытекает (5). Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Guillemin. Some classical theorems in spectral theory revisited. *Ann. Math. Stud.*, **91**, 1979, 219—259.
2. H. Widom. Eigenvalue Distribution Theorems for Certain Homogeneous Spaces. *J. of Funct. Analysis*, **32**, 1979, 139—147.

3. У. Гренандер, Г. Сеге. Теплицевы формы и их приложения. Москва, 1961.
4. М. С. Гиновян. Асимптотическое поведение теплицева определителя. *Записки науч. семин. ЛОМИ*, **97**, 1980, 22—31.
5. М. А. Шубин. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. Москва, 1978.
6. М. В. Федорюк. Метод перевала. Москва, 1977.
7. Г. Е. Караджов. Асимптотика следов операторов теплицевого типа. Одномерный случай. *Математика и математическо образование*, **11**. София, 1982, 182—188.
8. Х. Трибель. Теория интерполяции—функциональные пространства—дифференциальные операторы. Москва, 1980.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 7. 6. 1982