Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ТЕОРЕМА ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ В ПРОСТОМ ПРЕСЛЕДОВАНИИ-УБЕГАНИИ И ОПТИМАЛЬНОСТЬ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

РАДОСТИН П. ИВАНОВ

Настоящая работа посвящена современной области теории дифференциальных игр многих лиц. Задачи, которые рассматриваются, не требуют динамического превосходства одних игроков над другими, и поэтому здесь неприложимы методы Понтрягина, что приводит к исследованию некоторого многозначного соответствия, отличающегося от альтернированного интеграла. Доказана общая теорема об альтернативе в простом преследовании — убегании с выпуклыми фазовыми ограничениями и в одном случае найдены оптимальные по быстродействию стратегии преследующих и оптимальное время для игры на полупространстве.

Рассматривается задача преследования-убегания одного объекта несколькими объектами с простым движением на некотором множестве. Задача исследуется в постановке с дискриминацией в смысле Понтрягина, аналогично как в работах [1]—[3]. В случае, когда все игроки имеют одинаковые динамические возможности, дана полная теорема об альтернативе для игры с выпуклыми ограничениями. С точки зрения теоремы об альтернативе единным методом охвачен как случай l-преследования-убеганиия, так и случай нормальной, геометрической поимки. Условия о возможности окончания игры за конечное время и условия убегания даны в достаточно простой формс и сформулированы на языке ограниченности некоторого множества, которое описывается начальными и линейными либо квадратичными функциями.

Для задачи преследования на полупространстве найдены оптимальные стратегии и оптимальное время преследования для достаточно широкого класса стратегий. Рассмотренный случай является критическим в том смысле, что количество преследующих равно размерности пространства, и что в случае меньшего количества преследующих всегда возможно убегание.

Работа является продолжением ряда исследований, из которых упомянем [1]—[9].

Опишем игру. Пусть движение $(k+1)$ точек $x_i \in R^n, 0 \leq i \leq k$ задано дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = u_i, \ x_i = x_i(t), \ u_i = u_i(t) \in R^n, \ x_i(0) = x_i^0, \ t \geq 0, \quad 0 \leq i \leq k, \tag{1}$$

где R^n—n-мерное евклидово пространство, u_i, $0 \leq i \leq k$ — измеримые по t функции, удовлетворяющие почти всюду при $t \geq 0$ следующим ограничениям: $\|u_i\| \leq 1$, $0 \leq i \leq k$, $\|\cdot\|$ — обычная норма в R^n. Хорошо известно, см., например [14], что для любого набора измеримых функций $u_i(t)$, $0 \leq i \leq k$ существует единственное решение системы (1), которое абсолютно непрерывно при всех $t \geq 0$.

Пусть в R^n задано выпуклое множество N, $\operatorname{int} N \neq \emptyset$, в частности полупространство

$$N = \{x \mid x \in R^n, \ (x, l_0) \leq 0\}, \quad l_0 \in R^n, \tag{2}$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 10, 1984, с. 397—411.

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение, причем $x_i^0 \in N$, $0 \leq i \leq k$. На множестве N рассмотрим дифференциальную игру преследования-убегания одного игрока x_0 многими игроками x_i, $1 \leq i \leq k$, в постановке [1]—[7].

Игра считается законченной в момент времени T, если для некоторого i, $1 \leq i \leq k$, выполнено $\| x_i(T) - x_0(T) \| \leq l_i$, где $l_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Задача преследования состоит в отыскании таких стратегий $u_i = u_i(x_0(t), x_1(t), \ldots, x_k(t), u_0(t))$, $1 \leq i \leq k$ для преследующих, которые являлись бы измеримыми по t функциями для любых абсолютно непрерывных функций $x_0(t), x_1(t), \ldots, x_k(t)$ и для любой измеримой функции $u_0(t)$, чтобы игру можно было бы закончить за конечное время.

Задача убегания состоит в отыскании такой стратегии $u_0 = u_0(x_0(t), x_1(t), \ldots, x_k(t), u_1(t), \ldots, u_k(t))$ для убегающего, которая являлась бы измеримой по t функцией для любых абсолютно непрерывных функций $x_0(t), x_1(t), \ldots, x_k(t)$ и для любых измеримых функций $u_1(t), \ldots, u_k(t)$, чтобы убегающий мог бы избежать встречи с преследующими для всех $t \geq 0$.

Важную роль в дальнейшем изложении будет играть следующее множество :

$$\Delta(t) = \{x \mid x \in N,\ f_i(x) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq k\}, \tag{3}$$

$$\text{где } f_i(x) = \| x - x_0(t) \| - \| x - x_i(t) \| + l_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Нетрудно увидеть, что неравенство $f_i(x) < 0$ задает внутренность связанной части некоторого гиперболоида. В случае, когда $l_i = 0$, это множество есть внутренность полупространства. Итак, множество $\Delta(t)$ есть пересечение множества N с гиперболоидами (полупространствами), т. е. оно является выпуклым множеством. Заметим что множество $\Delta(t) \neq \varnothing$ всегда, когда $\| x_0(t) - x_i(t) \| > l_i$, где $x_0(t) \in N$ и $x_i(t) \in N$.

Теорема 1. *Пусть на множестве N задана игра с одним убегающим и k преследующими, движение которых описывается системой* (1). *Пусть $\| x_i^0 - x_0^0 \| > l_i$ для всех $1 \leq i \leq k$ и множество $\Delta(0)$ неограничено. Тогда у убегающего x_0 существует постоянное управление $u_0(t) = u_0(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_k^0)$, зависящее только от начальной позиции игроков, и обеспечивающее его уклонение от встречи с преследующими при всех $t \geq 0$.*

Доказательство. Так как начальная позиция игроков такова, что $\| x_i^0 - x_0^0 \| > l_i$, то точка x_0^0 принадлежит внутренности множества $\{x \mid f_i(x) \leq 0, 1 \leq i \leq k\}$ и, следовательно, любой луч из рецессивного [13] конуса этого множества с вершиной в точке x_0^0 принадлежит его внутренности. Так как $\Delta(0)$— неограниченное множество, то существует непустой рецессивный конус для $\Delta(0)$. Пусть $\bar{u}_0$ — любое направление из этого рецессивного конуса, тогда положим $u_0(t) \equiv \bar{u}_0$. Для удобства будем считать, что $\| \bar{u}_0 \| = 1$. Покажем, что для любых $u_i(t)$, $\| u_i \| \leq 1$, $1 \leq i \leq k$ при всех $t \geq 0$ выполнено $l_i - \| x_i(t) - x_0(t) \| < 0$. Согласно выбора u_0, имеем $0 > l_i + \| x_0(t) - x_0^0 \| - \| x_0(t) - x_i^0 \| = \| \int_0^t \bar{u}^0 d\tau \| - \| x_0(t) - x_i^0 \| + l_i$, $1 \leq i \leq k$. Нижеследующая цепочка неравенств завершает доказательство

$$l_i - \| x_i(t) - x_0(t) \| = l_i - \| x_0(t) - x_i^0 - \int_0^t u_i(\tau) d\tau \|$$

$$\leq \| \int_0^t u_i(\tau) d\tau \| - \| x_0(t) - x_i^0 \| + l_i \leq t - \| x_0(t) - x_i^0 \| + l_i$$

$$=\| \int_0^t \bar{u}_0 d\tau \| - \| x_0(t) - x_i^0 \| + l_i < 0, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Прежде чем перейти к формулировке и к доказательству основных теорем, введем некоторые обозначения и докажем вспомогательные утверждения.

Сначала рассмотрим случай, когда количество преследующих равно размерности пространства, т. е. $k=n$, а множество N является полупространством. Далее, будем предполагать, что все $l_i=0$, $1\leq i\leq n$, а $\Delta(t)$ — ограниченное множество. Так как $\Delta(t)$ является пересечением $(n+1)$ полупространств, то оно будет n-симплексом. Вершины этого симплекса обозначим y_i, $0\leq i\leq n$, причем $y_0 \notin \operatorname{int} N$, т. е. y_0 — вершина$_i$ симплекса, которая содержится внутри полупространства N. Аналогично, y — вершина симплекса, которая содержится внутри полупространства, которое задано i-ым неравенством в (3). Формально каждая из вершин симплекса задается одной из следующих линейных систем уравнений:

$$(4) \qquad (y_i,\ l_j)=a_j, \quad j\neq i, \quad 0\leq j\leq n, \quad i=0,\ 1, \dots, n,$$

где l_0 определено в (2), $a_0=0$, $l_j=x_j-x_0$ и $a_j=(e_j,\ \frac{x_j+x_0}{2})$, $0\leq j\leq n$. Далее, обозначим

$$(5) \qquad \bar{x}=x/\|x\|,\ \|x\|\neq 0;\ y_i-x_j=l_{ij},\ y_i-y_j=r_{ij}, \quad i,\ j=0,\ 1, \dots, n.$$

Лемма 1. *Пусть $x_i(t)$, $0\leq i\leq n$, являются решением системы* (1) *для некоторых заданных ограниченных и измеримых функций $u_i(t)$, $0\leq i\leq n$, причем, согласно сделанным замечаниям, множество $\Delta(t)$ является ограниченным симплексом при всех $t\geq 0$. Тогда вершины этого симплекса $y_i(t)$, $0\leq i\leq n$, являются абсолютно непрерывными функциями на любом конечном подынтервале $[t',\ t'']\subset[0,\ \infty)$.*

Доказательство. Поскольку $\Delta(t)$—ограниченное множество, то для любого $t\geq 0$ существуют решения для всех систем из (4), причем эти решения единственные. Так как коэффициенты систем (4) являются абсолютно непрерывными по t функциями, то и соответствующие определители этих систем будут абсолютно непрерывными функциями и в силу единственности решения они будут отличными от нуля на любом конечном интервале $[t',\ t'']$. Теперь из формул Крамера следует абсолютная непрерывность решения систем (4), т. е. вершины симплекса $\Delta(t)$, а именно $y_i(t)$, $0\leq i\leq n$, будут абсолютно непрерывными по t функциями на любом конечном интервале $[t,\ t'']$. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что почти всюду существуют производные $\dot{y}_i$, $0\leq i\leq n$, которые в силу систем (1) и (4) имеют следующий вид:

$$(6) \qquad \dot{y}_i(t)=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{(u_0,\ l_{i0})-(u_j,\ l_{ij})}{(r_{ij},\ l_j)}\, r_{ij}, \quad 0\leq i\leq n, \quad 1\leq j\leq n.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда функция*

$$(7) \qquad \Lambda(t)=\| l_{00}\| + \max_{1\leq i\leq n} \| r_{i0}\|$$

является абсолютно непрерывной на любом конечном интервале $[t',\ t'']$, и ее производная в силу системы (1) *задается следующим выражением:*

$$\dot{\Lambda}(t)=\lambda(t)=(\dot{e}_{00},\ \overline{e_{00}})+\max_{j\in J_t}(\dot{r}_{j0},\ \overline{r_{j0}})$$

$$(8)\qquad =\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{(u_0,\ l_{00})-(u_i,\ l_{0i})}{(r_{i0},\ l_i)}r_{i0}-u_0,\ \overline{e_{00}}\Big)$$

$$+\max_{j\in J_t}\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{(u_0,\ l_{i0})-(u_i,\ l_{ji})}{(r_{ij},\ l_i)}r_{ij}$$

$$-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{(u_0,\ l_{00})-(u_i,\ l_{0i})}{(r_{i0},\ l_i)}r_{i0},\ \overline{r_{j0}}\Big),$$

где J_t — множество индексов j, $1\leq j\leq n$, для которых $\|r_{j0}\|=\max\limits_{1\leq i\leq n}\|r_{i0}\|$.

Доказательство. Утверждения леммы следуют из леммы 1, с учетом (5) и (6) и из [10, гл. II, § 3].

Нам понадобится оценка сверху для производной (8) в зависимости от значений $u_i(t)$, $0\leq i\leq n$. В дальнейшем будем использовать такие стратегии для преследующих, которые „сужают" множество $\Delta(t)$. Такое условие естественно сузит возможные реализации стратегий для преследующих. Опишем множество таких реализаций u_i, $1\leq i\leq n$, в зависимости от u_0:

$$(9)\qquad U(u_0)=\{u=(u_1,\ldots,u_n)\mid \|u_i\|\leq 1,\ (u_0,\ l_{k0})-(u_i,\ l_{ki})\leq 0,$$

$$k\neq i,\ 0\leq k\leq n,\ 1\leq i\leq n\}.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 1 и пусть $t\geq 0$—произвольный фиксированный момент времени. Тогда существует окрестность $(t,\ t+\delta)$, где $\delta\geq\min\limits_{x\in\Delta(t)}\|x-x_0(t)\|$, что какова бы ни была измеримая функция $u_0(\tau)$, существуют такие $u_i(\tau)$, $1\leq i\leq n$, $(u_1(\tau),\ldots,u_n(\tau))\in U(u_0(\tau))$, что для почти всех $\tau\in(t,\ t+\delta)$ будет иметь место следующее неравенство:*

$$(10)\qquad \lambda(\tau)\leq -1.$$

Доказательство. Рассмотрим $\lambda(\tau)$ из (8) как функцию переменных u_i, $0\leq i\leq n$. Обозначим $A_\tau=\{\alpha=\{\alpha_j\}\mid j\in J_\tau,\ \alpha_j\geq 0,\ \Sigma_{j\in J_\tau}\alpha_j=1\}$. Теперь положим

$$\mu(u_0,\ u,\ \alpha)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(u_0,\ l_{00})-(u_i,\ l_{0i})}{(r_{i0},\ l_i)}(r_{i0},\ \overline{e_{00}})-(u_0,\ \overline{l_{00}})$$

$$(11)\qquad +\sum_{i\in J_\tau}\alpha_j\Big[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{(u_0,\ l_{j0})-(u_i,\ l_{ji})}{(r_{i0},\ l_i)}(r_{ij},\ \overline{r_{j0}})$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{(u_0,\ l_{00})-(u_i,\ l_{0i})}{(r_{i0},\ l_i)}(r_{i0},\ \overline{r_{j0}})\Big].$$

Сравнивая (8) и (11), непосредственно видно, что $\lambda(\tau)=\max_{\alpha\in A_\tau}\mu(u_0,\ u,\ \alpha)$. По теореме о минимаксе, например, [11], имеем

$$\max_{\|u_0\|\leq 1}\ \min_{u\in U(u_0)}\ \max_{\alpha\in A_\tau}\mu(u_0,\ u,\ \alpha)=\max_{\alpha\in A_\tau}\ \max_{\|u_0\|\leq 1}\ \min_{u\in U(u_0)}\mu(u_0,\ u,\ \alpha).$$

Нетрудно убедиться, что функция $\min_{u\in U(u_0)}\mu(u_0, u, \alpha)$ является вогнутой функцией по переменной u_0. Покажем, что для любого $\alpha\in A_\tau$ $\max_{\|u_0\|\le 1}\min_{u\in U(u_0)}\mu(u_0, u, \alpha)$ достигается при $u_0=\overline{l_{00}}$. Заметим, что если $u_0=\overline{l_{00}}$, то из (9) необходимо следует, что $u_i=\overline{l_{0i}}$ для всех $1\le i\le n$. Подставляя $u_0=\overline{l_{00}}$ и $u_i=\overline{l_{0i}}$, $1\le i\le n$ в (11), получаем $\mu(\cdot, \cdot, \alpha)=-1$, так как все суммы в (11) равны нулю.

Зафиксируем произвольным образом $\alpha\in A_\tau$ и покажем, что

$$
\min_{u\in U(\overline{l_{00}}+tu_0)}\mu(\overline{l_{00}}+tu_0, u, \alpha)-\min_{u\in U(\overline{l_{00}})}\mu(\overline{l_{00}}, u, \alpha) \tag{12}
$$

$$
=\min_{u\in U(\overline{l_{00}}+tu_0)}\mu(tu_0, \{u_i-\overline{l_{0i}}\}, \alpha)\le 0
$$

для всех достаточно малых $t\le 0$ и u_0, для которых $(u_0, l_{00})<0$. Поскольку $\min_{u\in U(\cdot)}\mu(\cdot, u, \alpha)$ является вогнутой функцией на некотором выпуклом множестве $\{(u_0, u)\,|\,u\in U(u_0), \|u_0\|\le 1\}$, то условие (12) является необходимым и достаточным для ее максимума (см., например, [10; 12]).

Теперь зафиксируем u_0 произвольным образом, лишь бы $(u_0, l_{00})<l$ и пусть $u_0=-\gamma\overline{l_{00}}+v$, где $(v, l_{00})=0$, $\gamma>0$.

Обозначим $\pi_i v$ проекцию вектора v на выпуклый конус с вершиной в нуле и образующими l_i' и r_{k0}', $1\le k\le n$, $k\ne i$ для всех $1\le i\le n$, где $l_i'=l_i+a_il_{00}$, $r_{k0}'=r_{k0}+b_kl_{00}$, $(l_i', l_{00})=(r_{k0}', l_{00})$, $1\le i, k\le n$. Таким образом имеем

$$
\pi_i v=\beta_{ii}l_i'+\sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n}\beta_{ki}r_{k0}'=\beta_{0i}l_{00}+\beta_{ii}l_i+\sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n}\beta_{ki}r_{k0},\ (\pi_i v, l_{00})=0, \tag{13}
$$

где $\beta_{ki}\ge 0$ $(1\le k\le n)$, а $\beta_{0i}=a_i\beta_{ii}+\sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n}b_k\beta_{ki}$. Положим

$$
w_i=\beta_{0i}l_{0i}-\beta_{ii}l_i+\sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n}\beta_{ki}r_{k0},\ v_i=v-\pi_i v, \tag{14}
$$

где $(v_i, l_{00})=0$. Покажем, что $\|\overline{l_{0i}}+tu_i\|=\|\overline{l_{0i}}-\frac{1}{2}t\gamma\overline{l_{0i}}-\frac{1}{2}t\gamma\overline{e_{00}}+tw_i\|\le 1$ для всех достаточно малых $t\ge 0$. Возведем в квадрат $\|l_{0i}+tu_i\|$ и выделим линейную по t часть:

$$
\|\overline{l_{0i}}+tu_i\|^2=1+t^2\|u_i\|^2+2t(\overline{l_{0i}}, u_i)
$$

$$
=1+t^2\|u_i\|^2+2t\left[-\frac{1}{2}\gamma(\overline{l_{0i}}, \overline{l_{0i}})-\frac{1}{2}\gamma(\overline{l_{0i}}, l_{00})+(\overline{l_{0i}}, w_i)\right]
$$

$$
=1+t^2\|u_i\|^2-t[\gamma(1+(\overline{l_{0i}}, \overline{l_{00}}))-2(\overline{l_{0i}}, w_i)]. \tag{15}
$$

Проверим, что линейния по t часть в выражении (15) отрицательна. Действительно, из (13) и (14) следует, что

$$
\lambda[1+(\overline{l_{0i}}, \overline{l_{00}})]-2(\overline{l_{0i}}, w_i)=\gamma[1+(\overline{l_{0i}}, \overline{l_{00}})]
$$

$$-2\beta_{0i}(\overline{l_{0i}},\ l_{0i})+2\beta_{ii}(\overline{l_{0i}},\ l_i)-2\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\beta_{ki}(\overline{l_{0i}},\ r_{k0})$$

$$=\gamma[1+(\overline{l_{0i}},\ \overline{l_{00}})]-2\beta_{0i}(\overline{l_{00}})-2\beta_{ii}(\overline{l_{00}},\ l_i)-2\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\beta_{ki}(\overline{l_{00}},\ r_{k0})$$

$$=\gamma[1+(\overline{l_{00}},\overline{l_{00}})]-2(\overline{l_{00}},\ \pi_i\, v)=\gamma\,[1+(\overline{l_{0i}},\ \overline{l_{00}})]>0.$$

Итак, мы показали, что линейная по t часть в (15) строго отрицательна и, следовательно, для всех достаточно малых $t\geqq 0$ будет иметь место $\|\overline{l_{0i}}+tu_i\|\leqq 1$. Нам будет необходимо показать, что для всех достаточно малых $t\geqq 0$ выполнено включение $\{l_{0i}+tu_i\}\in U(\overline{l_{00}}+tu_0)$, т. е., что удовлетворяются соответствующие неравенства из (9). Из соотношений (4) и (5) для всех $k\neq i$, $1\leqq k,\ i\leqq n$, получаем

$$(\overline{l_{00}}+tu_0,\ l_{00})-(\overline{l_{0i}}+tu_i,\ l_{0i})=\|l_{00}\|+t(u_0,\ l_{00})-\|l_{0i}\|-t(u_i,\ l_{0i})$$

$$=-t\gamma(\overline{l_{00}},\ l_{00})+t(\pi_i v,\ l_{00})+t(v_i,\ l_{00})+\frac{1}{2}t\gamma(\overline{l_{0i}},\ l_{0i})+\frac{1}{2}t\gamma(\overline{l_{00}},\ l_{0i})-t(W_i,\ l_{0i})$$

$$=-\frac{1}{2}t\gamma[\|l_{00}\|-(\overline{l_{00}},\ l_{0i})]\leqq 0$$

и

$$(\overline{l_{00}}+tu_0,\ l_{k0})-(\overline{l_{0i}}+tu_i,\ l_{ki})\tag{16}$$

$$=(\overline{l_{00}}+tu_0,\ l_{00})-(\overline{l_{0i}}+tu_i,\ l_{0i})+(\overline{l_{00}}+tu_0-\overline{l_{0i}}-tu_i,\ r_{k0})$$

$$\leqq t(u_0-u_i,\ r_{k0})=t(\pi_i v-w_i,\ r_{k0})+t(v_i,\ r_{k0})-\frac{1}{2}t\gamma(\overline{l_{00}}-\overline{l_{0i}},r_{k0})$$

$$=2t\,\beta_{ii}(l_i,\ r_{k0})+t(v_i,\ r'_{k0})-t(v_i,\ b_k l_{00})-\frac{1}{2}t\gamma(2(\overline{l_{00}},\ \overline{l_i})\,\overline{l_i},\ r_{k0})\leqq 0.$$

Наконец, покажем, что $\mu(u_0,\ \{u_i\},\ \alpha)\leqq 0$. Поскольку функция $\mu(\cdot,\ \cdot,\ \alpha)$ линейная, то из (11) получаем

$$\mu(u_0,\ \{u_i\},\ \alpha)=\mu(-\frac{1}{2}\gamma\,\overline{l_{00}},\ \{-\frac{1}{2}\gamma\overline{l_{0i}}\},\ \alpha)+\mu(-\frac{1}{2}\gamma\overline{l_{00}},\ \{-\frac{1}{2}\gamma\overline{l_{00}}\},\ \alpha)+\mu(v,\ \{w_i\},\ \alpha).\tag{17}$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в (17). Непосредственно из (11) видно что

$$\mu(-\frac{1}{2}\gamma\overline{l_{00}},\ \{-\frac{1}{2}\gamma\overline{l_{0i}}\},\ \alpha)=\frac{1}{2}\gamma(\overline{l_{00}},\ \overline{l_{00}})=\frac{1}{2}\gamma.\tag{18}$$

Далее представим $\overline{l_{00}}$ в виде $\overline{l_{00}}=-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\overline{r_{i0}}$, где $\lambda_i\geqq 0$, $1\leqq i\leqq n$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\geqq 1$. Из (11) получаем

$$\mu(-\frac{1}{2}\overline{l_{00}},\ \{-\frac{1}{2}\gamma\,\overline{l_{00}}\},\ \alpha)=-\frac{1}{2}\gamma\mu(\overline{l_{00}},\ \{\overline{l_{00}}\},\ \alpha)$$

$$=-\frac{1}{2}\gamma\Big\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(\overline{l_{00}}, l_{00})-(\overline{l_{00}}, l_{0i})}{(r_{i0}, l_i)}(r_{i0}, \overline{l_{00}})-(\overline{l_{00}}, \overline{l_{00}})$$

$$+\sum_{j\in J_\tau}\alpha_j\Big[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{(\overline{l_{00}}, l_{j0})-(\overline{l_{00}}, l_{ji})}{(r_{i0}, l_i)}(r_{ij}, \overline{r_{j0}}) \tag{19}$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\overline{l_{00}}, l_{00})-(\overline{l_{00}}, l_{0i})}{(r_{i0}, l_i)}(r_{i0}, \overline{r_{j0}})\Big]\Big\}-\frac{1}{2}\gamma\Big\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(\overline{l_{00i}})\gamma}{(r_{i0}, l_i)}(r_{i0}, \overline{l_{00}})-(\overline{l_{00}}, \overline{l_{00}})$$

$$+\sum_{j\in J_\tau}\alpha_j\Big[\sum_{\substack{i=1\\ j\neq j}}^{n}\frac{(\overline{l_{00}}, l_i)}{(r_{i0}-l_i)}(r_{i0}-r_{j0}, \overline{r_{j0}})-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\overline{l_{00}}, l_i)}{(r_{i0}, l_i)}(r_{i0}, \overline{r_{j0}})\Big]\Big\}$$

$$=-\frac{1}{2}\gamma\Big\{(\overline{l_{00}}, \overline{l_{00}})-(\overline{l_{00}}, \overline{l_{00}})+\sum_{j\in J_\tau}\alpha_j\Big[\sum_{i=1}^{n}\frac{(\overline{l_{00}}, l_i)}{(r_{i0}, l_i)}(r_{i0}, \overline{r_{j0}})-\frac{(\overline{l_{00}}, l_j)}{(r_{j0}, l_j)}\|r_{j0}\|$$

$$-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{(\overline{l_{00}}, l_i)}{(r_{i0}, l_i)}\|r_{j0}\|-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\overline{l_{00}}, l_i)}{(r_{i0}, l_i)}(r_{i0}, \overline{r_{j0}})\Big]\Big\}=\frac{1}{2}\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{(\overline{l_{00}}, l_i)}{(r_{i0}, l_i)}\|r_{j0}\|$$

$$=\frac{1}{2}\gamma\sum_{i=1}^{n}\frac{(-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\overline{r_{k0}}, l_i)}{(r_{i0}, l_i)}\|r_{j0}\|=-\frac{1}{2}\gamma\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\|r_{j0}\|}{\|r_{i0}\|}$$

$$=-\frac{1}{2}\gamma\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\max_{1\le i\le n}\|r_{i0}\|}{\|r_{i0}\|}\leq-\frac{1}{2}\gamma.$$

Остается рассмотреть последнее слагаемое из (17). Из (11) получаем

$$\mu(v\{w_i\}, \alpha)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(v, l_{00})-(w_i, l_{0i})}{(r_{i0}, l_i)}-(v, \overline{l_{00}})+\sum_{j\in J_\tau}\alpha_j\Big[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{(v, l_{j0})-(w_i, l_{ji})}{(r_{i0}, l_i)} \tag{20}$$

$$\times(r_{ij}, \overline{r_{j0}})-\sum_{i=1}^{n}\frac{(v, l_{00})-(w_i, l_{0i})}{(r_{i0}, l_i)}(r_{i0}, \overline{r_{j0}})=\sum_{j\in J_\tau}\alpha_j\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{(v_i, r_{j0})}{(r_{i0}, l_i)}(r_{ij}, \overline{r_{j0}})\leq 0,$$

так как $(v_i, r_{j0})\leq 0$ при $i\neq j$ по построению,

$$(r_{ij}, \overline{r_{j0}})=(r_{i0}-r_{i0}, \overline{r_{j0}})=(r_{i0}, \overline{r_{j0}})-\|r_{j0}\|\leq\|r_{i0}\|-\max_{1\le i\le n}\|r_{i0}\|\leq 0$$

и, наконец, для $1\leq i\leq n$ имеем

$$(l_i, \overline{r_{i0}})=-\frac{1}{\lambda_i}(\overline{l_{00}}+\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n}\lambda_k\overline{r_{k0}})=-\frac{1}{\lambda_i}(\overline{l_{00}}, l_i)<0,$$

т. е. неравенство (20) верно.

Из неравенств (18), (19) и (20) следует неравенство (12) для любого u_0, для которого $(u_0, l_{00})<0$ и для любых достаточно малых $t\geq 0$.

Теперь закончим доказательство леммы. Каждой измеримой функции $u_0(\tau)$, $\|u_0(\tau)\|\leq 1$, $t\leq\tau\leq t+\delta$ сопоставим измеримые функции $u_i(\tau)$, для которых

$$\lambda(\tau)=\max_{\alpha\in A_\tau}\min_{u\in U(u_0(\tau))}\mu(u_0(\tau),\ u,\ \alpha)=\max_{\alpha\in A_\tau}\mu(u_0(\tau),\ \{u_i(\tau)\},\ \alpha).$$

Такие функции существуют, поскольку $\mu(.,.,.)$—непрерывная функция по совокупности переменных и, согласно Кастена [14, стр. 175], многозначное соответствие

$$F(\tau)=\{u\in U(u_0(\tau))\max_{\alpha\in A_\tau}\mu(u_0(\tau),\ u,\ \alpha)=\max_{\alpha\in A_\tau}\min_{v\in U(u_0(\tau))}\mu(u_0(\tau),\ v,\ \alpha)\}$$

измеримо и, следовательно [14, стр. 176], оно имеет однозначную измеримую ветвь $u(\tau)$. Итак, для любой измеримой функции $u_0(\tau)$, $\|u_0(\tau)\|\leq 1$, $t\leq\tau\leq t+\delta$ существуют измеримые функции $\{u_i(\tau)\}\in U(u_0(\tau))$, $1\leq i\leq n$, для которых $\lambda(\tau)\leq -1$ при $t\leq\tau\leq t+\delta$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть на полупространстве N, определенном соотношением* (2), *задана дифференциальная игра с одним убегающим x_0 и n преследующими x_i, $1\leq i\leq n$, движения которых описываются системой* (1). *Пусть $\|x_i^0+x_0^0\|>0$ для всех $1\leq i\leq n$ и множество $\Delta(0)$ ограничено. Тогда у преследующих существуют такие стратегии $u_i(t)=u_i(x_0(t),\ x_1(t),\dots,x_n(t),\ u_0(t))$, которые являются измеримыми по t функциями для любых абсолютно непрерывных $x_i(t)$, $0\leq i\leq n$, любой измеримой функции $u_0(t)$ и, кроме того, выполняется включение $\Delta(t)\subset\Delta(t')$ при $t\geq t'$, и которые обеспечивают окончание игры не позже момента $T^*=\Lambda(0)=\|y_0-x_0^0\|+\max\limits_{1\leq i\leq n}\|y_i-y_0\|$, причем T^* — оптимальное время преследования.*

Доказательство. Стратегии для преследующих определим из условия $\lambda(t)\leq -1$. Согласно лемме 3, для любой измеримой функции $u_0(\tau)$ и для любого ограниченного множества $\Delta(t)$, для которого $\|x_i(t)-x_0(t)\|>0$ (т. е. $x_0(t)$ является внутренней точкой для множества $\Delta(t)$), существуют интервал длиной δ и измеримые функции $u_i(\tau)=u_i(x_0(\tau),\ x_1(\tau),\dots,x_n(\tau),\ u_0(\tau))$, $1\leq i\leq n$, для которых $\lambda(\tau)\leq -1$ для всех $t\leq\tau\leq t+\delta$. Поскольку $\Lambda(t)=\Lambda(0)+\int_0^t\lambda(\tau)d\tau\leq\Lambda(0)-t$, то для каждого $u_0(t)$, $t\geq 0$ наступит момент T, $0<T\leq T^*=\Lambda(0)$, что будет иметь место один из следующих случаев: либо $\Lambda(T)=0$, либо $\min\limits_{1\leq i\leq n}\|x_i(T)-x_0(T)\|=0$, либо $\Delta(T)$ станет неограниченным множеством. Так как выбранные стратегии таковы, что если $\min\limits_{1\leq i\leq n}\|x_i(\cdot)-x_0(\cdot)\|>0$, то $\Delta(t)\subset\Delta(t')$ при $t\geq t'$, то третий случай не может иметь место прежде первых двух случаев. Также первый случай не может иметь место прежде второго, так как, если $\min\limits_{1\leq i\leq n}\|x_i(t)-x_0(t)\|>0$, то $\Lambda(t)>0$. Итак, остается единственная возможность, что для некоторого i, $1\leq i\leq n$ выполнено $\|x_i(T)-x_0(T)\|=0$. Тем самым показали, что T^* является гарантированным временем преследования. Для оптимальности времени T^* необходимо показать, что убегающий может уклоняться от встречи с преследующими вплоть до момента $T^*-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — произвольно малое число. Согласно условиям (9), имеем, что при $u_0(t)=\overline{l_{00}}=(y_0(0)-x_0(0))/\|y_0(0)-x_0(0)\|$ при $0\leq t<\|l_{00}\|$ единственно возможные стратегии для преследующих суть $u_i(t)=\overline{l_{0i}}=(y_0(0)-x_i^0)/\|y_0(0)-x_i^0\|$, $1\leq i\leq n$. При этом, как нетрудно заметить,

$\Delta(t)=\Delta(0)$, $0\leq t<\|l_{00}\|$. Пусть $\varepsilon>0$—сколь угодно малое число. Пусть x принадлежит одновременно $\varepsilon/3$ окрестности точки $y_0(0)$ и $\operatorname{int}\Delta(0)$, y принадлежит одновременно $\varepsilon/3$ окрестности точки $y_j(0)$ и $\operatorname{int}\Delta(0)$, где индекс j выбран из условия $\|r_{j0}\|=\max\limits_{1\leq i\leq n}\|r_{i0}\|$. Заметим, что убегающий может попасть из точки $x_0(t)$ в точку $z\in\operatorname{int}\Delta(t)$ с помощью управления $u_0(\cdot)=(z-x_0(t))/\|z-x_0(t)\|$. Определим следующее управление для убегающего:

$$u_0(t)=\begin{cases}\overline{l_{00}}=(x-x_0^0)/\|x-x_0^0\|, & 0\leq t\leq\|x-x_0^0\|\\ (y-x)/\|y-x\|, & \|x-x_0^0\|<t\leq\|x-x_0^0\|+\|y-x\|.\end{cases}$$

С одной стороны, убегающий избежит встречи с преследующими вплоть до попадения в точку y и, с другой стороны, имеем

$$T^*-\varepsilon=\|l_{00}\|+\|r_{j0}\|-\varepsilon\leq\|x-x_0^0\|+\frac{\varepsilon}{3}+\|y-x\|+\frac{2\varepsilon}{3}-\varepsilon$$
$$=\|x-x_0^0\|+\|y-x\|=T.$$

Из этого неравенства, в силу произвольности $\varepsilon>0$, и из того, что гарантированное время преследования следует его оптимальность, теорема доказана.

Заметим, что стратегии, которые мы рассматривали для преследующих в теореме 2, обладают тем свойством, что не дают убегающему расширять множество его свободного передвижения. Это, видимо, является своеобразной регулярностью этих стратегий. С другой стороны, видимо, существуют такие начальные позиции игроков, что описанные нами стратегии будут оптимальными при отсутствии ограничения $\Delta(t)\subset\Delta(t')$ при $t\geq t'$.

Теорема 2 дает возможность сформулировать и доказать общую теорему об альтернативе в дифференциальной игре „простое преследование-убегание".

Т е о р е м а 3. (Теорема об альтернативе). *Пусть на замкнутом выпуклом множестве* $N\subset R^n$, $\operatorname{int}N\neq\varnothing$, *задана дифференциальная игра „простое преследование-убегание" с одним убегающим игроком* x_0 *и преследующими игроками* x_i, $1\leq i\leq k$, *движения которых описываются системой* (1). *Пусть начальная позиция игроков удовлетворяет условиям* $\|x_i^0-x_0^0\|>l_i$, $1\leq i\leq k$, *где* $l_i\geq 0$, *а множество* $\Delta(t)$ *задано соотношением* (3) *Тогда*:

1. Если множество $\Delta(0)$ *неограничено, то возможно убегание, точнее, у убегающего существует такое константное управление* $u_0(t)=u_0(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_k^0)$, *зависящее только от начальной позиции игроков, которое обеспечивает его уклонение от встречи с преследующими при всех* $t\geq 0$.

2. Если множество $\Delta(0)$ *ограничено, но* $l_i=0$, $1\leq i\leq k$ *и* $k>n$, *то возможно убегание, точнее у убегающего* x_0 *существует кусочно-постоянная позиционная стратегия* $u_0(t)=u_0(x_0(t_i), \ldots, x_k(t_i))$, $t_i\leq t<t_{i+1}$ *(здесь моменты* t_i *заранее нефиксированы, а каждый последующий момент определяется на основе позиции игроков в предыдущем моменте) и которая обеспечивает уклонение убегающего от встречи с преследующими при всех* $t\geq 0$.

3. Во всех остальных случаях возможно окончить игру за конечное время. Точнее, если множество $\Delta(0)$ *ограничено, но либо* $\sum_{i=1}^k l_i>0$

и k любое, $k \geq 1$, либо $l_i = 0$, $1 \leq i \leq k$, но $k \geq n$, то у преследующих существуют стратегии $u_i(t) = u_i(x_0(t), \ldots, x_k(t), u_0(t))$, которые являются измеримыми по t функциями для любых абсолютно непрерывных функций $x_i(t)$, $0 \leq i \leq k$, и любой измеримой функции $u_0(t)$ и которые обеспечивают окончание игры за конечное время, причем гарантированное время T окончания игры удовлетворяет неравенству

$$T \geq \max_{x \in \Delta(0)} \| x - x_0^0 \|. \tag{21}$$

Доказательство. Утверждение пункта 1 совпадает полностью с утверждением теоремы 1, где мы уже провели соответствующее доказательство. Пункт 2 доказан в работе [8] при боле слабых условиях, точнее множество $N \subset R^n$ может быть любое, лишь бы $\operatorname{int} N \neq \varnothing$ и начальная позиция убегающего x_0^0 принадлежала бы замыканию $\operatorname{int} N$. Итак, займемся доказательством пункта 3. Заметим, что поскольку $\Delta(0)$—ограниченное множество, то из (3) и из условия, что N— замкнутое и выпуклое множество, следует, что $\Delta(0)$—выпуклый компакт. Так как этот компакт зависит прежде всего от позиции игроков, то будет удобно ввести следующее обозначение $\Delta(0) = \Delta(x^0) = \Delta(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_k^0)$. Заметим также, что начальные позиции преследующих могут оказться „невыгодными“, что может вызвать необходимость в совершении некоторых маневров. Поэтому покажем, что для каждого x_i^0 существует окрестность X_i, $0 \leq i \leq k$, что $\Delta(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ будет компактом для всех $x_i \in X_i$, $0 \leq i \leq k$. Допустим, что это не так, т. е. существует последовательность точек $x^s = (x_0^s, x_1^s, \ldots, x_k^s)$, сходящаяся к точке $x^0 = (x_0^0, x_1^0, \ldots, x_k^0)$, для которой существуют точки $y_s \in \Delta(x^s)$, для которых $\lim_{s \to \infty} \| y_s \| = \infty$. Ввиду выпуклости $\Delta(x^s)$ точки $z_s = x_0^s + M(y_s - x_0^s)/\| y_s - x_0^s \| \in \Delta(x^s)$ для всех достаточно больших s, где M—достаточно большое число, например, в два раза больше диаметра множества $\Delta(0)$. Пусть z является предельной для последовательности $\{z_s\}$. Из (3), поскольку $f_i(\cdot)$— непрерывные функции по x_0, x_i, получаем, что $z \in \Delta(x^0)$, что невозможно ввиду выбора константы M. Это противоречие показывает, что необходимые нам окрестности X_i, $0 \leq i \leq k$ существуют. Мы показали, что многозначное соответствие $\Delta(x)$ полунепрерывно сверху в точках, где $\Delta(x)$—компакт. В действительности это соответствие локально липшицево, что можно доказать также, как доказан аналогичный факт для более частного случая в работе [9].

Если $x_i^0 \notin \operatorname{int} N$, $1 \leq i \leq k$, то на достаточно малом отрезке времени совершим маневр в сторону внутренности множества N, так что без ограничения общности будем считать, что $x_i^0 \in \operatorname{int} N$, $1 \leq i \leq k$.

Теперь мы остановимся на случае, когда $l_i = 0$, $1 \leq i \leq k$, $k \geq n$. Рассмотрим систему векторов $l_i(0) = x_i^0 - x_0^0$, $1 \leq i \leq k$. Пусть ранг линейной независимости этой системы векторов равен j и для определенности предположим, что $l_1, l_2, \ldots, l_j$ линейно независимые. Если $j > n$, то последовательно маневрами будем увеличивать вплоть до n ранг системы векторов l_i, $1 \leq i \leq k$. Обозначим Γ гиперплоскость, содержащую все l_i, $1 \leq i \leq k$, и пусть w—единичный вектор, ортогональный к этой гиперплоскости. На малом отрезке времени, чтобы преследующие игроки не выходили за пределы $\operatorname{int} N$ и окрестности X_i, $1 \leq i \leq k$, определим стратегии преследующих игроков x_i, $1 \leq i \leq k$, $i \neq j+1$, таким образом, чтобы направления l_i, $1 \leq i \leq k$, $i \neq j+1$ оставались постоянными. Такие стратегии описаны, например, в работах [6, 7] Стратегию для игрока x_{j+1} определим следующим образом:

$$u_{j+1}(t)=\begin{cases} -\operatorname{sign}[(u_0(t),\ w)]\cdot w, & (u_0(t),\ w)\neq 0 \\ w, & (u_0(t),\ w)=0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующее скалярное произведение как функцию от t:

$$(l_{j+1}(t),\ w)=(l_{j+1}(0),\ w)+\int_0^t (u_{j+1}(\tau)-u_0(\tau),\ w)d\tau$$

$$=\int_0^t (u_{j+1}(\tau)-u_0(\tau),\ w)d\tau.$$

Если допустим, что для всех достаточно малых $t>0$ имеем $\int_0^t (u_{j+1}(\tau)-u_0(\tau),\ w)d\tau=0$, то $(u_{j+1}(\tau)-u_0(\tau),\ w)=0$ почти всюду при $0\leq\tau\leq t$, что невозможно ввиду построения $u_{j+1}(\tau)$. Итак, существует достаточно малое $t>0$, что система векторов $l_i(t)$, $1\leq i\leq j+1$ будеть линейно независимой. Продолжая процесс, добьемся, чтобы ранг линейной независимости системы векторов l_i, $1\leq i\leq k$ был бы равен n. Чтобы не менять обозначения и не ограничивая общности доказательства, будем предполагать, что в начальный момент времени первые n векторов $l_i(0)$, $1\leq i\leq n$ образуют линейно независимую систему. Теперь система линейных уравнений

$$\left(y-\frac{x_i^0+x_0^0}{2},\quad x_i^0-x_0^0\right)=0,\quad 1\leq i\leq n$$

имеет единственное решение, которое обозначим y_0. Выпуклый конус с вершиной в точке y_0 и определяемым неравенствами

$$\left(x-\frac{x_i^0+x_0^0}{2},\quad x_i^0-x_0^0\right)\leq 0,\quad 1\leq i\leq n$$

содержит $\Delta(0)$. Пересечем этот конус с любым полупространством, лишь бы это пересечение являлось бы n-симплексом. Рассмотрим на этом полупространстве игру с фиктивными преследующими игроками x_i', $x_i'(0)=x_i^0$, $1\leq i\leq k$, движения которых описываются системой (1). Теперь для всех фиктивных преследующих, кроме первых n, определим следующие стратегии:

$$(u_i'(t)+u_0(t),\ l_i(t))=0,\ u_i'(t)=u_0(t)+\lambda l_i(t),\quad \lambda\in R^1. \tag{22}$$

Теперь из теоремы 2 следует, что первые n фиктивные игроки могут закончить игру за конечное время, если, конечно, не будет осуществлена встреча убегающего с каким-нибудь из остальных фиктивных игроков. Заметим, что в этом конечном пункте существенным образом воспользовались включением $\Delta(t)\subset\Delta(t')$ при $t\leq t'$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\Sigma_{i=1}^k l_i>0$. Пусть J—множество индексов, для которых $l_j>0$. Для каждого индекса $j\in J$ множество $\Delta(0)$ содержится в некотором гиперболоиде H_j (точнее „половина" гиперболоида), определенном неравенством $f_j(x)\leq 0$. Для каждого такого гиперболоида H_j определим полупространство $P_j=\{x\in R^n\,|\,(x,\ x_j^0-x_0^0)\geq a_j\}$, $j\in J$, содержащее множество $\Delta(0)$. Рассмотрим на этих полупространствах игру с фиктивными преследующими игроками x_i', $x_i'(0)=x_i^0$, $1\leq i\leq k$, движения которых описываются системой (1). Теперь стратегии для всех фиктивных игроков x'_i, $i \notin J$ определим с помощью соотношений (22), а для игроков x'_j, $j \in J$ определим стратегии, которые решают задачу 2 из работы [9]. Обозначим $\Gamma_j = \{x \in R^n \mid (x, x_j^0 - x_0^0) = a_j\}$, $j \in J$ и пусть K_j — конус с вершиной в точке x_j^0, натянутый на $\Gamma_j \cap H_j$. Из определения стратегий для всех фиктивных преследующих видно, что

$$\Delta(t) \subset \bigcap_{j \in J} [K_j \cap P_j] \cap \{x \in N \mid f_i(x) \leqq 0, \quad i \notin J, \quad 1 \leqq i \leqq k\}$$

при всех $t \geqq 0$. Согласно работе [9], стратегии для игроков x'_j, $j \in J \neq \varnothing$ таковы, что либо происходит l_j-сближение, либо $\operatorname{int} H_j(t) \subset R^n \setminus P_j$, то либо произойдет необходимое нам сближение между игроками x_j и x_0, либо $\operatorname{int} \Delta(t) = \varnothing$, что невозможно, пока не произошло сближение с каким-либо из фиктивных игроков. Итак, фиктивные преследующие закончат игру за конечное время в случае, когда выполнены условия пункта 3.

Теперь определим стратегии для преследующих с помощью стратегий фиктивных игроков, а именно u_i определим из условий, чтобы выполнялось следующее равенство: $x_i(t) = \pi_N(x'_i(t)) \in N$, где $\pi_N(x)$ — проекция точки x на множестве N, т. е. $\| \pi_N(x) - x \| = \min_{y \in N} \| y - x \|$. Учитывая, что оператор $\pi_N(x)$ является сжимающим из-за выпуклости множества N, т. е. $\| \pi_N(x) - \pi_N(y) \leqq \| x - y \|$ и что $\pi_N(x)$ единственно, то каждой абсолютно непрерывной функции $x'_i(t)$ оператор $\pi_N(\cdot)$ сопоставляет абсолютно непрерывную функцию $x_i(t) = \pi_N(x'_i(t))$, которая имеет почти всюду измеримую производную $u_i(t)$, естественно зависящую от позиции игроков и управления убегающего. Покажем, что $\| u_i \| \leqq 1$ с учетом, что стратегии фиктивных преследующих удовлетворяют аналогичному неравенству. Из системы (1) имеем

$$1 \geqq \frac{1}{\Delta t} \left\| \int_t^{t+\Delta t} u'_i(\tau) d\tau \right\| = \left\| \frac{x'_i(t+\Delta t) - x'_i(t)}{\Delta t} \right\|$$

$$\geqq \frac{1}{\Delta t} \| \pi_N(x'_i(t+\Delta t)) - \pi_N(x'_i(t)) \| = \frac{1}{\Delta t} \| x_i(t+\Delta t) - x_i(t) \|.$$

Поскольку почти всюду существует

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\pi_N(x'_i(t+\Delta t)) - \pi_N(x'_i(t))}{\Delta t} = u_i(t),$$

то почти всюду $\| u_i(t) \| \leqq 1$. Поскольку фиктивные преследующие могут закончить игру за конечное время, т. е. для некоторого i, $1 \leqq i \leqq k$ будет выполнено $\| x'_i(T) - x_0(T) \leqq l_i$, то с учетом, что $\pi_N(x_0(\cdot)) = x_0(\cdot)$, имеем $\| x_i(T) - x_0(T) \| = \| \pi_N(x'_i(T)) - \pi_N(x_0(T)) \| \leqq \| x'_i(T) - x_0(T) \| \leqq l_i$.

Наконец, неравенство (21) следует из факта, что убегающий игрок может попасть в любую внутреннюю точку z множества N с помощью управления $u_0(\cdot) = (z - x_0(t)) / \| z - x_0(t)) \|$, минуя встречу с преследующими. Теорема доказана.

Проиллюстрируем на примерах некоторые аспекты теоремы 2 и теоремы 3.

1. *l-преследование с двумя игроками.* Пысть движение двух точек на плоскости R^2 задано дифференциалными уравнениями

$$\dot{x}_0 = u_0, \quad x_0(0) = (0,\ 1), \quad \| u_0 \| \leqq 1,$$

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad x_1(0) = (0,\ 4), \quad \| u_1 \| \leqq 1, \quad t \geqq 0$$

и пусть $N = \{x \mid x \in R^2,\ (x,\ l_0) \leqq 0\}$, где $l_0 = (0,\ -1)$. Рассмотрим задачу преследования игрока x_0 игроком x_1 на полуплоскости N, причем положим $l_1 = 1$. На рис. 1 показано множество $\Delta(0)$, а в работе [9] найдено оптимальное время преследования, которое равно

$$T^* = \| y_1 - x_0(0) \| = \| y_2 - x_0(0) \| = \sqrt{7}.$$

Для некоторых управлений убегающего можно легко построить по стратегиями из [9] управление, которое преследующий игрок реализует, в частности, если $u_0(t) = (y_1 - x_0(0))/\| y_1 - x_0(0))$, то получаем следующее управление для преследующего $u_1(t) = (y_1 - x_1(0))/\| y_1 - x_1(0) \|$, а игра будет закончена за время T^*.

2. *Дифференциальная игра „Два льва и человек“.* Для хорошо известной игры „Лев и человек“, когда на круглой арене одна безинерционная точка преследуется другой безинерционной точкой, возможно убегание при условии, что обе точки имеют одинаковые динамические возможности. В этом примере рассмотрим случай, когда имеются два преследующих объекта. Пусть задана система из трех дифференциальных уравнений:

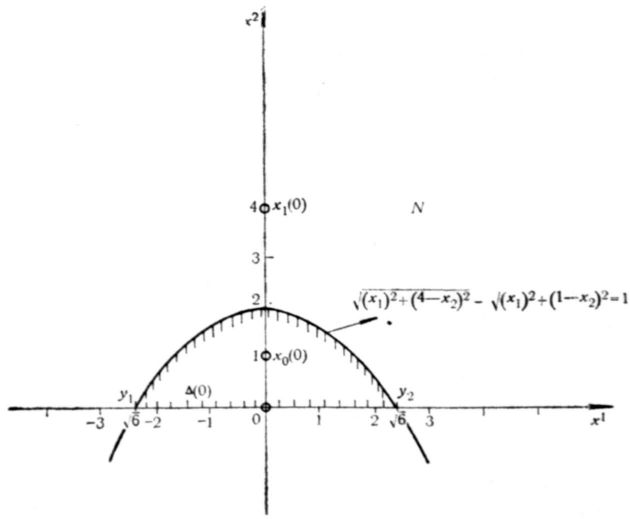

Рис. 1

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \| u_i \| \leqq 1, \quad i = 0,\ 1,\ 2,$$

$$x_0(0) = (1,\ 1),\ x_1(0) = (1,\ 0),\ x_2(0) = (0,\ 1), \quad t \geqq 0,$$

и пусть $N = \{x \mid \in R^2,\ \| x \| \leqq 2\}$. Рассмотрим задачу преследования игрока x_0 двумя игроками x_1 и x_2 на круглой арене N. Игра считается законченной в момент времени T, если либо $x_1(T) = x_0(T)$, либо $x_2(T) = x_0(T)$. На рис. 2

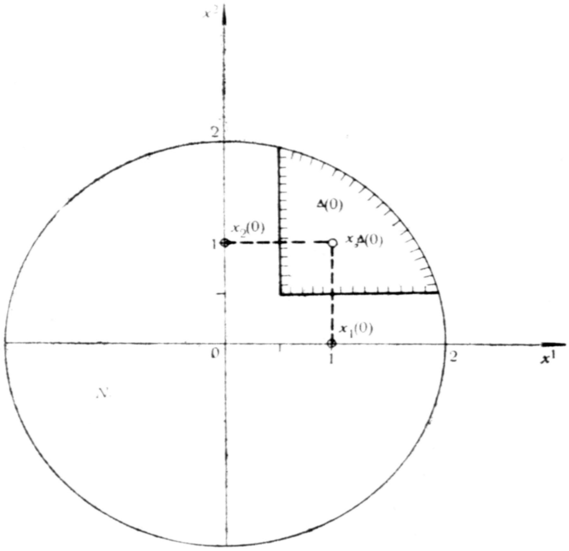

Рис. 2

показано множество $\Delta(0)$. Как доказано в теореме 3, согласно работе [8], игру можно закончить за конечное время. Если $u_i(t)=(u_i^1(t),\ u_i^2(t))$, $i=0,\ 1,\ 2$, то стратегии преследующих определим из следующих соотношений:

$$\| u_i(t) \| = 1, \quad i=1,\ 2, \quad u_1^1(t)=u_0^1(t), \quad u_1^2(t) \geqq 0,$$

$$u_2^1(t) \geqq 0, \quad u_2^2(t)=u_0^2(t).$$

Можно показать, что 4 является верхней гранью для гарантированного времени преследования.

3. *Простое преследование на полуплоскости.* Пусть задана система из трех дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \| u_i \| \leqq 1, \quad i=0,\ 1,\ 2,$$

$$x_0(0)=(0,\ 0),\ x_1(0)=(1,\ 1),\ x_2(0)=(-1,\ 1), \quad t \geqq 0$$

и пусть $N=\{x \mid x \in R^2,\ (x,\ l_0) \leqq 0\}$, где $l_0=(0,\ -1)$. Рассмотрим задачу преследования игрока x_0 двумя игроками x_1 и x_2 на полуплоскости N. Игра считается законченной в момент времени T, если либо $x_1(T)=x_0(T)$, либо $x_2(T)=x_0(T)$. На рис. 3 показано множество $\Delta(0)$. Согласно теореме 2, игру можно закончить за конечное время, причем оптимальное время преследования в классе стратегий, для которых $\Delta(t) \subset \Delta(t')$ при $t \geqq t'$ равно

$$T^* = \| y_0 - x_0(0) \| + \| y_1 - y_0 \| = \| y_0 - x_0(0) \| + \| y_2 - y_0 \| = 1 + \sqrt{2}.$$

Как и в примере 2, для некоторых конкретных управлений убегающего можно легко синтезировать по стратегиям соответствующие управления преследующих, в частности, если

$$u_0(t)=\begin{cases} \dfrac{y_0-x_0(0)}{\|y_0-x_0(0)\|} & \text{при} \quad 0\leqq t\leqq t'<\|y_0-x_0(0)\| \\[2ex] \dfrac{y_2-x_0(t')}{\|y_2-x_0(t')\|} & \text{при} \quad t'<t\leqq T=t'+\|y_2-x_0(t')\|, \end{cases}$$

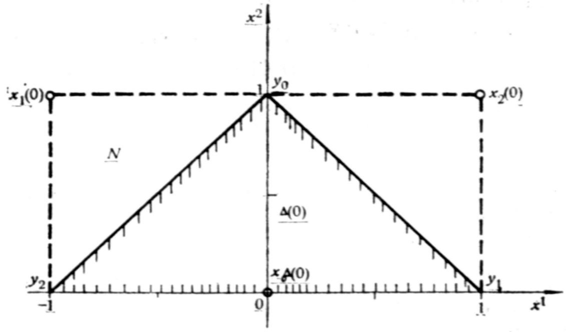

Рис. 3

то преследующий игрок имеет управление

$$u_1(t)=\begin{cases} \dfrac{y_0-x_1(0)}{\|y_0-x_1(0)\|} & \text{при} \ 0\leqq t\leqq t' \\[2ex] \dfrac{y_2-x_1(t')}{\|y_2-x_1(t')\|} & \text{при} \ t'<t\leqq T, \end{cases}$$

причем $x_1(T)=x_0(T)=y_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин. К теории дифференциальных игр. *УМН*, **21**, № 4, 1966.
2. Л. С. Понтрягин. О линейных дифференциальных играх, I. *Доклады АН СССР*, **174**, № 6, 1967.
3. Л. С. Понтрягин. О линейных дифференциальных играх, 2 *Доклады АН СССР*, **175**, № 4, 1967.
4. Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
5. Е. Ф. Мищенко, М. С. Никольский, Н. Сатимов. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц. *Труды МИАН СССР*, **143**, 1977.
6. Л. А. Петросян. Дифференциальные игры на выживание со многими участниками. *Доклады АН СССР*, **161**, № 2, 1965.
7. Б. Н. Пшеничный. Простое преследование несколькими объектами. *Кибернетика*, № 3, 1976.
8. П. Р. Иванов. Простое преследование-убегание на компакте. *Доклады АН СССР*, **254**, № 6, 1980.
9. Р. П. Иванов, Ю. С. Ледяев. Оптимальность временн преследования в дифференциальной игре многих объектов с простым движением. *Труды МИАН СССР*, **158**, 1981.
10. Б. Н. Пшеничный. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., 1980.
11. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе. Бесконечные антагонистические игры. Под ред. Н. Н. Воробьева, М., 1963.
12. Ф. П. Васильев. Численные методы решения экстремальных задач. М., 1980.
13. Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ. М., 1973.
14. Дж. Варга. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 28. 6. 1982