Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЭТЮДЫ О РАССТОЯННИИ МЕЖДУ СИММЕТРИЧНЫМИ ЕВКЛИДОВЫМИ ТЕНЗОРАМИ ВТОРОГА РАНГА

Я. РЫХЛЕВСКИЙ

Отличие физических ситуаций, описываемых симметричными тензорами второго ранга, можно характеризовать расстоянием между этими тензорами. Исследуется такая метрика, инвариантная относительно вращений. Показано, что расстояние от фиксированного тензора до жестко вращающегося тензора принимает шесть стационарных значений. Установлена формула для расстояния между орбитами группы вращений в пространстве симметричных тензоров второго ранга. Предложены инвариантные оценки регулярности и анизотропности тензора. Результаты перенесены на вещественные симметричные матрицы любого порядка.

1. Инерция системы частиц или твердого тела, распространение света в кристалле, напряженное состояние частицы сплошной среды, теплопроводность, локальный образ деформаций сплошной среды, натяжение электромагнитного поля — вот начало списка физических ситуаций, в которых в качестве определяющего математического объекта выступает симметричный евклидов тензор второго ранга. Отличие двух однотипных физических ситуаций этого рода удобно в то же время оценивать должным образом подобранными скалярными параметрами. Главным из них является расстояние между сооответствующими этим явлением тензорами. Заслуженной популярностью пользуется метрика

$$\rho(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta}) = ((\alpha_{ij}-\beta_{ij})(\alpha_{ij}-\beta_{ij}))^{1/2}, \tag{1.1}$$

инвариантная относительно вращений.

Целью этой работы является исследование и использование расстояния (1.1). На этой основе мы, в частности, предложим некоторые новые инварианты: дистанцию между тензорами, степень регулярности тензора, степень изменчивости тензора.

2. Уточним наши обозначения. Исходное трехмерное (все сказанное можно просто обобщить для любой размерности dim Э (см. § 9)) евклидово векторное пространство обозначим через Э. Векторы из Э обозначаем $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}, \ldots$, а их скалярное произведение через $\mathbf{ab}$. Пространство симметричных евклидовых тензоров второго ранга обозначим через $\mathbf{s} = \mathrm{sym}\, Э \oplus Э$, а сами тензоры через $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}, \ldots$. Билинейная операция $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\alpha} . \boldsymbol{\beta}$, определенная на разложимых тензорах по формуле $(\mathbf{a}\oplus\mathbf{b}).(\mathbf{x}\oplus\mathbf{y}) = (\mathbf{ax})(\mathbf{by})$ есть скалярное произведение в $\mathscr{C}$. Оно порождает норму и метрику $|\boldsymbol{\alpha}| = (\boldsymbol{\alpha} . \boldsymbol{\alpha})^{1/2}$, $\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$.

Группу вращений исходного пространства Э обозначим через $\mathscr{R}$. Будем отождествлять, как это принято, с ортогональными тензорами второго ранга $\mathbf{R}, \ldots$, с определителем, равным 1. Вращение $\mathbf{R}$ поворачивает любой вектор $\mathbf{a} \to \mathbf{Ra}$ и любой тензор $\boldsymbol{\alpha}$ по правилу $\boldsymbol{\alpha} \to \mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{R}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$.

Если $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ суть главные значения тензора α, а $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ соответствующие им собственные версоры, то $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_1\mathbf{a}_1\oplus\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2\oplus\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3\oplus\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = \delta_{ij}$.

 СЕРДИКА Българско математическо списание. Том, 10, 1984, с.433—441

Поскольку $\mathbf{R} = \widehat{\mathbf{a}_1} \oplus \mathbf{a}_1 + \widehat{\mathbf{a}_2} \oplus \mathbf{a}_2 + \widehat{\mathbf{a}_3} \oplus \mathbf{a}_3$, где $\widehat{\mathbf{a}_1} = \mathbf{R}\mathbf{a}$, $\widehat{\mathbf{a}_2} = \mathbf{R}\mathbf{a}_2$, $\widehat{\mathbf{a}_3} = \mathbf{R}\mathbf{a}_3$, то

$$\mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha} = \alpha_1 \widehat{\mathbf{a}_1} \oplus \widehat{\mathbf{a}_1} + \alpha_2 \widehat{\mathbf{a}_2} \oplus \widehat{\mathbf{a}_2} + \alpha_3 \widehat{\mathbf{a}_2} \oplus \widehat{\mathbf{a}}. \tag{2.1}$$

Геометрический смысл этих формул очевиден.

Скалярное произведение $\boldsymbol{\alpha} . \boldsymbol{\beta}$, норма $|\boldsymbol{\alpha}|$ и метрика $\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ инвариантны относительно вращений, т. е., например, $\rho(\mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R} * \boldsymbol{\beta}) = \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ для всех $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathscr{C}$, $\mathbf{R} \in \mathscr{R}$.

Стандартное разложение пространства $\mathscr{C}$, в прямую сумму подпространства шаровых тензоров $\mathscr{P}$ и подпространства девиаторов $\mathscr{D}$ будем записывать в виде $\mathscr{C} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{D}$, $\mathscr{P} \perp \mathscr{D}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{1} + \boldsymbol{\alpha}^*, \quad \alpha = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha}, \quad \operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha}^* = 0.$$

3. Мы будем работать с метрикой (1.1), однако подчеркнем, что это отнюдь не единственная метрика в $\mathscr{C}$, согласованная со структорой тензорного произведения, т. е. инвариантная относительно вращений. В качестве иллюстрации рассмотрим все метрики, порождаемые инвариантными скалярными произведениями.

Докажем следующую теорему, представляющую самостоятельный интерес: *любое скалярное произведение в* $\mathscr{C}$, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$, *инвариантное относительно вращений, имеет вид*

$$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = p(\alpha\beta) + q(\boldsymbol{\alpha}^* . \boldsymbol{\beta}^*), \tag{3.1}$$

где $p, q \geq 0$. В самом деле, с одной стороны, выписанный инвариант билинеен (т. е. линеен по каждому аргументу) и положителен ($\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\alpha} > 0$ для любго $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$), т. е. является корректно определенным скалярным произведением. С другой стороны, любой совместный инвариант должен выражаться через известный функционально полный набор

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha},\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\beta},\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha\beta},\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha}^2,\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\beta}^2,\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha}^3,\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\beta}^3,\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\beta},\ \operatorname{tr} \boldsymbol{\alpha\beta}^2. \tag{3.2}$$

Из билинейности и положительности следует сразу (3.1).
Скалярные произведения (3.1) порождают инвариантные метрики

$$\rho_{p,q}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = ((\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) \times (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}))^{1/2} = \left[\frac{1}{3} p(\rho(\alpha\mathbf{1}, \beta\mathbf{1}))^2 + q(\rho(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*))^2\right]^{1/2}. \tag{3.3}$$

Положительные расстояния p, q отражают, соответственно, вклад в метрику шаровых и девиаторных частей тензоров. Их можно выбирать в каждой конкретной физической ситуации отдельно. Отметим, что все метрики (3.3) топологически эквивалентны, т. е. определяют одну и ту же сходимость в $\mathscr{S}$.

Можно указать и другие примеры выражающихся через (3.2) инвариантов, удовлетворяющих всем аксиомам метрики.

Метрика, которой мы пользуемся, порождена инвариантным скалярным произведением, т. е. принадлежит классу (3.3), с $p = 3$, $q = 1$.

4. *Орбитой* тензора $\boldsymbol{\alpha}$ будем называть, как это принято в общей теории групп преобразований, множество всех тензоров, которые можно получить, вращая $\boldsymbol{\alpha}$, т. е. множество $\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R} = \{\mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{R} \in \mathscr{R}\}$.

Согласно (2.1), орбита состоит из всех тензоров, которые отличаются от $\boldsymbol{\alpha}$ лишь расположением главных осей. Геометрические свойства орбит евклидовых тензоров любого ранга описаны в [1].

Наша цель в этом параграфе будет состоять в описании поведения расстояния $\rho(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R}*\boldsymbol{\beta})$ — от фиксированного тензора $\boldsymbol{\alpha}$ до движущегося по орбите тензора $\mathbf{R}*\boldsymbol{\beta}$ — как функции от $\mathbf{R}\in\mathscr{R}$.

Это исследование можно провести, выражая $\mathbf{R}$ через углы Эйлера, но удобнее будет другое аналитическое оформление (путь, который мы выбираем, годится для любой размерности $\dim Э$).

Вместо исследуемого расстояния удобнее будет взять его квадрат $(\rho(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R}*\boldsymbol{\beta}))^2=\boldsymbol{\alpha}\,.\,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\,.\,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}\,.\,(\mathbf{R}*\boldsymbol{\beta})$.

Запишем движущуюся по орбите точку в виде $\mathbf{R}*\boldsymbol{\beta}=\beta_1\mathbf{x}_1\oplus\mathbf{x}_1+\beta_2\mathbf{x}_2\oplus\mathbf{x}_2+\beta_3\mathbf{x}_3\oplus\mathbf{x}_3$, где $\mathbf{R}$ переводит собственный базис $\mathbf{a}_i$ тензора $\boldsymbol{\alpha}$ в собственный базис $\mathbf{x}_i$ тензора $\mathbf{R}*\beta$, $\mathbf{R}=\mathbf{x}_1\oplus\mathbf{a}_1+\mathbf{x}_2\oplus\mathbf{a}_2+\mathbf{x}_3\oplus\mathbf{a}_3$.

При фиксированных $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ искомое расстояние можно представить как функцию ортонормированного базиса $\mathbf{x}_i$. Введем

$$f_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}_i)=(\rho(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R}*\boldsymbol{\beta}))^2=(\boldsymbol{\alpha}\,.\,\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\,.\,\boldsymbol{\beta})-2(\beta_1\mathbf{x}_1\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}_1+\beta_2\mathbf{x}_2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}_2+\beta_3\mathbf{x}_3\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}_3).$$

Нас интересуют экстремальные точки этой функции. Это приводит к следующей изящной задаче на условный экстремум $f_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}_i)=\text{extremum}$, $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j=\delta_{ij}$.

Введем симметричный набор множителей Лагранжа $\gamma_{ij}=\gamma_{ji}$ и функцию Лагранжа $F_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}_i)=\frac{1}{4}f_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}_i)-\gamma_{ij}(\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j-\delta_{ij})$.

Необходимые условия экстремума $f_{\alpha,\beta}$ имеют вид

$$\frac{\partial F_{\alpha,\beta}}{\partial\mathbf{x}_1}=\beta_1\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}_1-\gamma_{1i}\mathbf{x}_i=0,\quad \frac{\partial F_{\alpha,\beta}}{\partial\mathbf{x}_2}=\beta_2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}_2-\gamma_{2i}\mathbf{x}_i=0,\quad \frac{\partial F_{\alpha,\beta}}{\partial\mathbf{x}_3}=\beta_3\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}_3-\gamma_{3i}\mathbf{x}_i=0.$$

Умножая на $\mathbf{x}_i$, получаем в частности

$$\gamma_{12}=\beta_1\mathbf{x}_1\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}_2,\quad (\beta_1-\beta_2)\gamma_{12}=0;\quad \gamma_{23}=\beta_2\mathbf{x}_2\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}_3,\quad (\beta_2-\beta_3)\gamma_{23}=0;$$
$$\gamma_{13}=\beta_3\mathbf{x}_1\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}_3,\quad (\beta_1-\beta_3)\gamma_{13}=0.$$

Для $\beta_1\neq\beta_2\neq\beta_3\neq\beta_1$ отсюда следует, что версоры $\mathbf{x}_i$ обязаны быть собственными версорами тензора $\boldsymbol{\alpha}$! Это решение можно записать в виде

$$\mathbf{x}_i=\pm\mathbf{a}_{\sigma(i)},\quad i=1,\ 2,\ 3, \tag{4.1}$$

где σ есть перестановка чисел 1, 2, 3. Для $\beta_1=\beta_2\neq\beta_3$ $\mathbf{x}_3$ должен быть собственным версором тензора $\boldsymbol{\alpha}$, а $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ могут быть произвольными версорами, ортогональными $\mathbf{x}_3$, т. е. решение (4.1) остается в силе. Наконец, для $\beta_1=\beta_2=\beta_3$ функция $f_{\alpha,\beta}$ постоянна, и $\mathbf{x}_i$ могут быть любыми, т. е., в частности, данными фармулами (4,1).

Итак, мы доказали, что расстояние $\rho(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R}*\boldsymbol{\beta})$ экстремально на тензорах вида $\mathbf{R}*\boldsymbol{\beta}=\beta_{\sigma(1)}\mathbf{a}_1\oplus\mathbf{a}_1+\beta_{\sigma(2)}\mathbf{a}_2\oplus\mathbf{a}_2+\beta_{\sigma(3)}\mathbf{a}_3\oplus\mathbf{a}_3$, где $\mathbf{a}_i$ является собственным базисом тензора $\boldsymbol{\alpha}$. Экстремальные значения равны

$$\rho(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R}*\boldsymbol{\beta})=(h_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))^{1/2},$$

$$h_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})=(\alpha_1-\beta_{\sigma(1)})^2+(\alpha_2-\beta_{\sigma(2)})^2+(\alpha_3-\beta_{\sigma(3)})^2. \tag{4.2}$$

Здесь σ пробегает группу перестановок $\Sigma_3=\{(123), (213), (132), (312), (231), (321)\}$.

Исследуем взаимное расположение экстремальных значений. Введем упорядоченные собственные значения

$$\bar\alpha_1\geq\bar\alpha_2\geq\bar\alpha_3,\quad \bar\beta_1\geq\bar\beta_2\geq\bar\beta_3. \tag{4.3}$$

Запишем любое значение (4.2) в виде $h_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = h_{(123)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + 2F_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, где

$$F_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \equiv \frac{1}{2}[h_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) - h_{(123)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})] \tag{4.4}$$

$$= \bar\alpha_1(\bar\beta_1 - \bar\beta_{\sigma(1)}) + \bar\alpha_2(\bar\beta_2 - \bar\beta_{\sigma(2)}) + \bar\alpha_3(\bar\beta_3 - \beta_{\sigma(3)}).$$

Введем положительные величины $p \equiv \bar\alpha_1 - \bar\alpha_2$, $q \equiv \bar\alpha_2 - \bar\alpha_3$, $p + q = \bar\alpha_1 - \bar\alpha_3$, $u \equiv \bar\beta_1 - \bar\beta_2$, $v \equiv \bar\beta_2 - \bar\beta_3$, $u + v = \bar\beta_1 - \bar\beta_3$. Подсчитывая (4.4), получаем

$F_{(123)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, $F_{(213)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = pu \geqq 0$, $F_{(132)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = qv \geqq 0$, $F_{(312)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (p+q)v + pu \geqq 0$, $F_{(231)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (p+q)u + qv \geqq 0$, $F_{(321)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (p+q)(u+v) \geqq 0$.

Мы видим, что стационарные значения исследуемого расстояния расположены следующим образом: $0 \leqq H_{(123)} \leqq (H_{(213)}, H_{(132)}) \leqq (H_{(312)}, H_{(231)}) \leqq H_{(321)})$.

В частности, мы получаем следующие элегантные и интуитивно понятные формулы

$$l(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \equiv \max_{\mathbf{R} \in \mathscr{R}} \rho(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R} * \boldsymbol{\beta}) = [(\bar\alpha_1 - \bar\beta_3)^2 + (\bar\alpha_2 - \bar\beta_2)^2 + (\bar\alpha_3 - \bar\beta_1)^2]^{1/2}, \tag{4.5}$$

$$r(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \equiv \min_{\mathbf{R} \in \mathscr{R}} \rho(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{R} * \boldsymbol{\beta}) = [(\bar\alpha_1 - \bar\beta_1)^2 + (\bar\alpha_2 - \bar\beta_2)^2 + (\bar\alpha_3 - \bar\beta_3)^2]^{1/2}. \tag{4.6}$$

5. Все полученные функции двух тензорных переменных $h_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = h_\sigma(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})$, $\sigma \in \Sigma_3$ являются, разумеется, инвариантами двух тензорных переменных. Отметим, что они являются раздельными инвариантами в следующем смысле: $h_\sigma(\mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Q} * \boldsymbol{\beta} = h_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ для любых (необязательно равных!) $\mathbf{R}, \mathbf{Q} \in \mathscr{R}$ и любых $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$. Это следует сразу из явных выражений (4.2). Поэтому любое сечение $g(\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3(\boldsymbol{\xi}) \equiv h_\sigma(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\alpha})$, $\alpha_i = \mathrm{const}$, есть инвариант тензора $\boldsymbol{\xi}$.

Ясно, что для любого $h_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ существует функция шести действительных переменных k_σ, такая, что

$$h_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = k_\sigma(J_1(\boldsymbol{\alpha}), \quad J_2(\boldsymbol{\alpha}), \quad J_3(\boldsymbol{\alpha}), \quad J_1(\boldsymbol{\beta}), \quad J_2(\boldsymbol{\beta}), \quad J_3(\boldsymbol{\beta})), \tag{5.1}$$

где J_1, J_2, J_3 есть некоторый функционально полный набор инвариантов на $\mathscr{S}$. Если ввести девиаторы $\boldsymbol{\alpha}^*$, $\boldsymbol{\beta}^*$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{1} + \alpha^*, \quad \alpha \equiv \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\alpha}; \quad \boldsymbol{\beta} = \beta\mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}^*, \quad \beta \equiv \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\beta},$$

то $h_\sigma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 3(\alpha - \beta)^2 + h_\sigma(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*)$.

Подставляя сюда известные тригонометрические формулы для упорядоченных главных значений девиаторов, получим формулы типа (5.1).

6. Самым интересным среди (4.2) является инвариант $r(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \equiv h_{(123)}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Назовем его *дистанцией* между тензорами $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$. Выясним до конца геометрический смысл этой величины.

Интуиция подсказывает, что орбиты должны быть в определенном смысле „параллельны". Уточнение этой мысли таково. Введем для двух произвольных компактных подмножеств $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset \mathscr{S}$ *просвет* между ними:

$$t(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \equiv \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{A}, \boldsymbol{\eta} \in \mathscr{B}} \rho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \tag{6.1}$$

(см. [1; 2]). Будем писать $t(\boldsymbol{\xi}, \mathscr{D}) = t(\mathscr{D}, \boldsymbol{\xi})$, понимая под $\boldsymbol{\xi}$ одноэлементное множество.

Любые две орбиты $\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}$, $\boldsymbol{\beta}/\mathscr{R}$ *эквидистантны* в следующем смысле:

$$t(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\beta}/\mathscr{R})=t(\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\eta})=t(\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\beta}/\mathscr{R}) \tag{6.2}$$

для любого выбора точек наблюдения $\boldsymbol{\xi}\in\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}$, $\boldsymbol{\eta}\in\boldsymbol{\beta}/\mathscr{R}$. В самом деле, например'

$$t(\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\beta}/\mathscr{R})=\min_{\mathbf{R},\,\mathbf{Q}\in\mathscr{R}}\rho(\mathbf{R}*\boldsymbol{\xi},\ \mathbf{Q}*\boldsymbol{\eta})$$

$$=\min_{\mathbf{R},\,\mathbf{Q}\in\mathscr{R}}\rho(\boldsymbol{\xi},\ (\mathbf{R}^{T}\mathbf{Q})*\boldsymbol{\eta})=\min_{\mathbf{R}\in\mathscr{R}}\rho(\boldsymbol{\xi},\ \mathbf{R}*\boldsymbol{\beta})=t(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\beta}/\mathscr{R}).$$

Поэтому

$$r(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})=t(\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\beta}/\mathscr{R}). \tag{6.3}$$

Функция t обладает всеми свойствами метрики, т. е.

1. $t(\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\beta}/\mathscr{R})=t(\boldsymbol{\beta}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R})$;
2. $t(\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\beta}/\mathscr{R})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}=\boldsymbol{\beta}/\mathscr{R}$;
3. $t(\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\beta}/\mathscr{R}\leq t(\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\gamma}/\mathscr{R})+t(\boldsymbol{\gamma}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\beta}/\mathscr{R})$.

Эти свойства можно вывести без труда из эффективного выражения (4.6) (или непосредственно из определения (6.1) и (6.2), [2]). Итак, *функция t (суженная до орбит) есть метрика во множестве всех орбит симметричных тензоров второго ранга.* Формулу (6.3) мы можем теперь прочитать так: дистанция между тензорами — это расстояние между их орбитами. Выведем отсюда важное следствие: *дистанция $r(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$ непрерывна по обеим переменным.* Прежде всего вспомним (см., например, [3]), что метрика непрерывна по двум переменным в любом метрическом пространстве, т. е. $t(\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}$, $\boldsymbol{\beta}/\mathscr{R})$ непрерывна по $\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}$ и $\boldsymbol{\beta}/\mathscr{R}$. Отображение $\boldsymbol{\xi}\rightarrow\boldsymbol{\xi}/\mathscr{R}$ непрерывно, поскольку $t(\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R},\ \boldsymbol{\beta}/\mathscr{R})\leq\rho(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta})$. Отсюда следует, что r непрерывно как композиция непрерывных отображений.

7. В некоторых разделах механики сплошных сред, особенно в учебной литературе, широко используется следующая геометрическая конструкция. Тензор $\boldsymbol{\alpha}$ интерпретируется как точка $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ в пространстве R^3 числовых троек $(x_1,\ x_2,\ x_3)$, называемом, в зависимости от контекста, пространством главных напряжений или пространством главных деформаций. Идея полезна, но содержит неясность, состоящую в неточности слова „интерпретируется" (или любого другого эквивалентного словообразования). Уточнение приводит, к сожалению, к тому, что тензору $\boldsymbol{\alpha}$ мы обязаны совопоставлять на самом деле не одну, а шесть точек в R^3, а именно:

$$\alpha_{\sigma(1)},\quad \alpha_{\sigma(2)},\quad \alpha_{\sigma(3)},\quad \sigma\in\Sigma_3. \tag{7.1}$$

Легко видеть, что эта шестерка расположена в R^3 на плоскости, параллельной так называемой октаэдрической плоскости, и отстоящей от последней на расстоянии $(\sqrt{3}/3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$. Ясно, что двум тензорам, отличающимся только расположением главных осей, соответствует одна и та же шестерка точек (7.1). Итак, оперируя с „пространствами главных значений", мы имеем дело не с отображением тензоров в точки, а с корректно определенным взаимно однозначным отображением орбит тензоров на шестерки точек (7.1), $\boldsymbol{\alpha}/R\longleftrightarrow\{(\alpha_{\sigma(1)},\ \alpha_{\sigma(2)},\ \alpha_{\sigma(3)})\mid\sigma\in\Sigma_3\}$.

Дистанция $r(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ является просветом между шестерками (7.1).

Каждая шестерка (7.1) имеет единственного представителя $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3)$ в двугранном угле $x_1 \geqq x_2 \geqq x_3$. Как это следует из формулы (4.6), дистанция между тензорами, т. е. расстояние между их орбитами в $\mathscr{S}$, равно расстоянию между их представителями в смысле стандартной метрики пространства R^3. Интерпретацию формулы (4.5) в R^3 представляем читателю.

8. Во многих аналитических исследованиях, связанных с симметричными тензорами второго ранга, необходимо проявлять большую осмотрительность в ситуации, когда некоторые из главных значений совпадают между собой. Наиболее впечатляющий пример дан в [4].

Тензор $\boldsymbol{\alpha}$ назовем *регулярным*, если его главные значения попарно различны. Все множество регулярных тензоров обозначим через $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1\}$.

Тензоры, не принадлежащие $\mathscr{A}$, будем называть *вырожденными*, а их множество обозначать через $\mathscr{B}$, $\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \mathscr{S}$, $\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = 0$.

Дадим удобную аналитическую характеристику этого деления. Введем инвариант

$$\gamma(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \inf_{i,j} |\alpha_i - \alpha_j|. \tag{8.1}$$

Отметим прежде всего, что $\gamma(\boldsymbol{\alpha}) = \gamma(\boldsymbol{\alpha}^*)$. Покажем, что $\gamma(\boldsymbol{\alpha})$ имеет следующий наглядный геометрический смысл: $\gamma(\boldsymbol{\alpha})$ *равно расстоянию тензора* $\boldsymbol{\alpha}$ *от множества вырожденных тензоров,* $\gamma(\boldsymbol{\alpha}) = t(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{B})$.

В самом деле, возьмем произвольный $\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{B}$. Он имеет вид $\boldsymbol{\xi} = p\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + q(\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$, где числа p, q и версор $\mathbf{n}$ произвольны. Теперь

$$t(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{B}) \equiv \min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{B}} \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = \min_{p,q} \min_{\mathbf{n}} \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \tag{8.2}$$

$$= \min_{\sigma \in \Sigma_3} \min_{p,q} [(\alpha_{\sigma(1)} - p)^2 + (\alpha_{\sigma(2)} - p)^2 + \alpha_{\sigma(3)} - q)^2].$$

Необходимые условия экстремума по p, q имеют вид

$$\frac{\partial t}{\partial p} = 2(\alpha_{\sigma(1)} + \alpha_{\sigma(2)} - 2p) = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial q} = 2(_{\sigma(3)} - q) = 0.$$

Подставляя в (8.2), получим

$$t(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{B}) = \min_{\sigma \in \Sigma_3} \frac{|\alpha_{\sigma(1)} - \alpha_{\sigma(2)}|}{\sqrt{2}} = \gamma(\boldsymbol{\alpha}),$$

что и требовалось.

Запишем упорядоченные главные значения (4.3) в известном тригонометрическом виде:

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} |\boldsymbol{\alpha}^*| \cos \psi_{\boldsymbol{\alpha}} + \alpha,$$

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} |\boldsymbol{\alpha}^*| \cos\left(\psi_{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{4\pi}{3}\right) + \alpha, \tag{8.3}$$

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{\sqrt{6}}{3} |\boldsymbol{\alpha}^*| \cos\left(\psi_{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{2\pi}{3}\right) + \alpha,$$

где ψ_α, — это так называемый *угол вида* тензора $\boldsymbol{\alpha}$,

$$\cos 3\psi_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\sqrt{6}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\alpha}^*\boldsymbol{\alpha}^*}{2\,|\boldsymbol{\alpha}^*|^3}, \quad 0 \leq \psi_{\boldsymbol{\alpha}} \leq \frac{\pi}{3}.$$

Подставляя (8.3) в (8.1) и учитывая (4.3), получим

$$\gamma(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} |\boldsymbol{\alpha}^*|\sin\psi_{\boldsymbol{\alpha}} &, \quad 0 \leq \psi_{\boldsymbol{\alpha}} \leq \pi/6. \\ |\boldsymbol{\alpha}^*|\sin(\psi_{\boldsymbol{\alpha}} + 2\pi/3), & \pi/6 \leq \psi_{\boldsymbol{\alpha}} \leq \pi/3. \end{cases}$$

Заметим, что $|\boldsymbol{\alpha}^*|$ это расстояние тензора $\boldsymbol{\alpha}$ до множества шаровых тензоров.

Величину $\varkappa(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \gamma(\boldsymbol{\alpha})/|\boldsymbol{\alpha}^*| \leq 1/2$ назовем *степенью регулярности* тензора $\boldsymbol{\alpha}$. Степень регулярности максимальна для $\psi_\alpha = \pi/6$, т. е. для $\bar{\alpha}_1 - \alpha = -(\bar{\alpha}_3 - \alpha) = \sqrt{2}\,|\boldsymbol{\alpha}^*|/2$, $\bar{\alpha}_2 = \alpha$.

Иначе говоря: *наиболее регулярными девиаторами являются чистые сдвиги,* т. е. тензоры вида

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \tau(\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}), \tag{8.4}$$

где $\mathbf{mn} = 0$.

Отметим следующее важное обстоятельство: *инвариант* $\gamma(\boldsymbol{\alpha})$ *непрерывен.* В самом деле, для любых $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{B}$

$$t(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{B}) \leq \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \leq \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \rho(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}),$$

$$t(\boldsymbol{\beta}, \mathscr{B}) \leq \rho(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi}) \leq \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}),$$

откуда $|\gamma(\boldsymbol{\alpha}) - \gamma(\boldsymbol{\beta})| = |t(\boldsymbol{\alpha}, \mathscr{B}) - t(\boldsymbol{\beta}, \mathscr{B})| \leq |\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) - \rho(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\xi})| \leq \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ и при $\rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \to 0$ имеем $\gamma(\boldsymbol{\alpha}) \to \gamma(\boldsymbol{\beta})$.

Используем инвариант γ для доказательства следующей важной теоремы: *множество регулярных тензоров* $\mathscr{A}$ *плотно и окрыто в* $\mathscr{S}$. В самом деле, множество вырожденных тензоров $\mathscr{B}$ есть множество уровня, $\gamma(\boldsymbol{\alpha}) = 0$, непрерывной функции, и поэтому замкнуто. Следовательно, $\mathscr{A} = \mathscr{S} - \mathscr{B}$ открыто. Регулярный тензор найдется сколь угодно близко любого тензора, т. е. $\mathscr{A}$ плотно. Эта теорема позволяет доказывать свойства функций, непрерывных на $\mathscr{C}$ без, учета вырожденных тензоров [5].

В качестве приложения рассмотрим классическое общее представление изотропной функции $f: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$,

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \varphi_0(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{1} + \varphi_1(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha} + \varphi_2(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^2, \tag{8.5}$$

где φ_0, φ_1, φ_2 инвариантны. Поскольку тензоры $\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}^3$ линейно независимы для любого регулярного тензора $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}$, то φ_0, φ_1, φ_2 определены на $\mathscr{A} \subset \mathscr{S}$ однозначно. К сожалению это не так на $\mathscr{B} = \mathscr{S} - \mathscr{A}$. Однако справедлива теорема: *для изотропной функции f существует самое большое один набор непрерывных инвариантов* φ_0, φ_1, φ_2 *удовлетворяющих формуле* (8.5). В самом деле, если бы существовало два таких набора, то $\psi_i(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \varphi_i'(\boldsymbol{\alpha}) - \varphi_i(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ для $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{A}$, $i = 0, 1, 2$. Поскольку ψ_i непрерывно, то $\psi_i(\boldsymbol{\alpha}) = 0$ для всех $\boldsymbol{\alpha} \in \mathscr{S}$.

(Необходимо добавить, что если φ_0, φ_1, φ_2 непрерывны, то f непрерывна, но обратная импликация, вообще говоря, неверна. В [4] дан пример непрерывной и дифференцируемой функции f, для которой не существует непрерывных функций φ_0, φ_1, φ_2, удовлетворяющих (8.5)!).

9. Введем следующий важный инвариант тензора $d(\boldsymbol{\alpha}) = \max\limits_{\boldsymbol{\xi},\, \boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}} \rho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$.
Его геометрический смысл очевиден: $d(\boldsymbol{\alpha})$ является *диаметром* орбиты $\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}$.

Покажем, что *любая орбита изодиаметральна* в следующем смысле: для любого выбора точки наблюдения $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}$, $\max\limits_{\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}} \rho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = d(\boldsymbol{\alpha})$. В самом деле, для любого $\boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}$

$$d(\boldsymbol{\alpha}) = \max_{\mathbf{R},\, \mathbf{Q} \in \mathscr{R}} \rho(\mathbf{R} * \boldsymbol{\xi},\ \mathbf{Q} * \boldsymbol{\alpha})$$
$$= \max_{\mathbf{R},\, \mathbf{Q} \in \mathscr{R}} \rho(\boldsymbol{\xi},\ (\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}) * \boldsymbol{\alpha}) = \max_{\mathbf{R} \in \mathscr{R}} \rho(\boldsymbol{\xi},\ \mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha}) = \max_{\boldsymbol{\eta} \in \boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}} \rho(\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\eta}).$$

Это дает следующую формулу для диаметра $d(\boldsymbol{\alpha}) = \max\limits_{\mathbf{R} \in \mathscr{R}} \rho(\boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha})$, и мы можем применить результаты п. 4. Согласно (4.5), $d(\boldsymbol{\alpha}) = l(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha})$, что приводит к следующей элементарной формуле $d(\boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{2}\,(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_3)$.
Подставляя тригонометрические выражения (8.3), получим $d(\boldsymbol{\alpha}) = 2\,|\boldsymbol{\alpha}^*|\sin(\psi_\alpha + \pi/3)$. Инвариант

$$\vartheta(\boldsymbol{\alpha}) \equiv \frac{d(\boldsymbol{\alpha})}{2\,|\boldsymbol{\alpha}^*|} = \sin\left(\psi_\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \tag{9.1}$$

будем называть *степенью изменчивости* тензора $\boldsymbol{\alpha}$ под действием вращений.

Геометрический смысл степени изменчивости $\vartheta(\boldsymbol{\alpha})$ таков. Поскольку $\mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{1} + \mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha}^*$, то орбита $\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}$ расположена на сфере с центром в $\alpha\mathbf{1}$ и радиусом $|\boldsymbol{\alpha}^*|$. Степень изменчивости тензора есть отношение диаметра его орбиты к диаметру указанной сферы.

Из (9.1) следует, что *наиболее изменчивыми девиаторами являются чистые сдвиги* (8.4).

Инварианты $\lambda(\boldsymbol{\alpha}) \equiv |\boldsymbol{\alpha}^*|/|\boldsymbol{\alpha}|$, $\vartheta(\boldsymbol{\alpha})$, характеризуют *анизотропию* симметричного тензора второго ранга, [6], [7].

10. Почти все сказанное нетрудно перенести на *вещественные симметричные матрицы* $n \times n$.

Во-первых, можно получить, mutatis mutandis, почти все формулы для случая $\dim \mathcal{Э} = n$. Например, экстремальные значения расстояния $\rho(\boldsymbol{\alpha},\ \mathbf{R} * \boldsymbol{\beta})$ будут равны $[(\alpha_1 - \beta_{\sigma(1)})^2 + \ldots (\alpha_n - \beta_{\sigma(n)})^2]^{1/2}$, $\sigma \in \Sigma_n$.

Во-вторых, выбрав и зафиксировав ортонормальный базис $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ в Э, $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j = \delta_{ij}$, мы можем определить взаимно-однозначное соответствие

$$\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow \alpha_{ij} \equiv \mathbf{x}_i \boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}_j \tag{10.1}$$

между симметричными тензорами $\boldsymbol{\alpha}$ и симметричными матрицами α_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Вращению $\mathbf{R}$ соответствует ортогональная матрица R_{ij}, $R_{ij}R_{kj} = \delta_{ik}$. Теперь $\mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow R_{ik}\alpha_{ke}R_{je}$, т. е. матрицы $(\boldsymbol{\alpha})_{ij}$ и $(\mathbf{R} * \boldsymbol{\alpha})_{ij}$ ортогонально-подобны [8]. Итак, при соответствии (10.1) орбите $\boldsymbol{\alpha}/\mathscr{R}$ тензора $\boldsymbol{\alpha}$ соответствует клас всех матриц, ортогонально-подобных матрице α_{ij}.

Формула (1.1) определяет метрику во множестве вещественных симметричных матриц $n \times n$. Метрика на множестве классов ортоганально-подобных матриц дается формулой $\min\limits_{\sigma \in \Sigma_n} [(\alpha_1 - \beta_{\sigma(1)})^2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_{\sigma(n)})^2]^{1/2}$, а диаметр класса ортогонально-подобных матриц формулой $\max\limits_{\sigma \in \Sigma_n} [(\alpha_1 - \beta_{\sigma(1)})^2 +$

$\ldots + (\alpha_n - \beta_{\sigma(n)})^2]^{1/2}$. Здесь $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — это собственные значения матриц α_{ij}, β_{ij}.

Приложение. Приведем список сопоставлений, позволяющий немедленно переписать любую формулу этой работы в стандартной декартовой индексной записи:

$$\mathbf{a},\ \boldsymbol{\omega},\ \mathbf{R},\ \mathbf{1} \leftrightarrow a_i,\ \omega_{ij},\ R_{ij},\ \delta_{ij};$$

$$\mathbf{ab},\ \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \leftrightarrow a_i b_i,\quad a_i b_j;$$

$$\boldsymbol{\alpha} \,.\, \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{\alpha\beta} \leftrightarrow \alpha_{ij}\beta_{ij},\quad \alpha_{ik}\beta_{kj};$$

$$\mathbf{Ra},\ \mathbf{R} * \boldsymbol{\omega} \leftrightarrow R_{ij} a_j,\quad R_{ik} R_{je} \omega_{ke};$$

$$|\boldsymbol{\alpha}|,\ \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\alpha} \leftrightarrow (\alpha_{ij}\alpha_{ij})^{1/2},\ \alpha_{ii};$$

$$\boldsymbol{\alpha}^2,\ \boldsymbol{\alpha}^3 \leftrightarrow \alpha_{ik}\alpha_{kj},\quad \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ke};$$

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x},\ \mathbf{x}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{y} \leftrightarrow \alpha_{ij} x_j,\quad \alpha_{ij} x_i x_j.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Рыхлевский. Об орбитах в пространствах евклидовых тензоров. *Alkalmazott Matem. Lapok*, 1984 (in print).
2. Я. Рыхлевский. Орбиты изометрических преобразований и инвариантные оценки анизотропии. В сб.: *Динамика сплошной среды*. Новосибирск, 1984 (в печати).
3. Б. З. Вулих. Введение в функциональный анализ. Москва, 1967.
4. J. Serrin. The derivation of stress-deformation relations for a Stokesian fluid. *J. Math. Mech.*. 8, 1959, 459-469.
5. J. Rychlewski. On quasiisotropic second order tensor functions. *Arch. Mech.* (*AMS*), 1984 (in print).
6. J. Rychlewski. On an evalution of anisotropy of properties described by simmetric tensors of second order. *Czech. J. Phys.* 1984 (in print).
7. J. Rychlewski J. Zur Abschätzung der Anisotropie. *ZAMM*, 1984 (in print).
8. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Москва. 1966.

Институт основных проблем техники
00-049 Варшава, Польша

Поступила 20. 9. 1983