Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ С УБЫВАЮЩЕЙ ИММИГРАЦИЕЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССА

КОСТО В. МИТОВ, НИКОЛАЙ М. ЯНЕВ

Рассматриваются марковские ветвящиеся процессы, допускающие неоднородную во времени иммиграцию частиц, если только процесс выродился. В критическом случае, когда интенсивность иммиграции стремится к нулю, получены разного типа предельные теоремы в зависимости от скорости этой сходимости.

1. Введение. Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работы [5], в том смысле, что теперь полученные там результаты переносятся на случай непрерывного времени.

Впервые Фостер [3] и Пейкс [6] исследовали процессы Гальтона—Ватсона, допускающие иммиграцию частиц в данном поколении, если в предыдущем поколении процесс выродился. При этом числа иммигрантов в разные моменты времени являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами. Потом Ямазато [9] исследовал эту модель в случае непрерывного времени.

В работе [5] модель Фостера — Пейкса обобщается на случай, когда числа иммигрантов составляют последовательность неодинаково распределенных случайных величин, т. е. получается марковский процесс, неоднородный во времени. Точнее, предполагается, что среднее число непосредственных потомков из одной частицы равняется единице (т. е. критический случай), а математическое ожидание и дисперсия числа иммигрантов стремятся к нулю, когда номер поколения стремится к бесконечности. В зависимости от скорости этой сходимости исследуется асимптотика вероятности продолжения и асимптотика первых двух факториальных моментов. Получены также предельные теоремы. Эти результаты показывают, что асимптотическое поведение таких процессов существенно отличается от обычно наблюдаемого в теории ветвящихся процессов.

В настоящей работе показано, что аналогичные результаты имеют место и для процессов с непрерывным временем. Они анонсированы в работе [10] вместе с дискретным случаем.

2. Описание модели. Основные результаты. Рассматриваемую нами модель ветвящегося процесса можно описать следующим образом. Пусть имеются частицы одного типа, где каждая существующая в данный момент частица независимо от других частиц, а также от своего возраста и происхождения, с вероятностью $\delta_{1j}+p_jh+o(h)$ превращается за время $h\to 0$ в j частиц. Если в момент $t\geqq 0$ процесс выродился, т. е. число частиц равняется нулю, то с вероятностью $\delta_{0k}+q_k(t)h+o(h)$ за время $h\to 0$ иммигрируют k частиц того же типа. В дальнейшем возникшие таким образом частицы эволюционируют по описанной выше схеме. (Здесь и далее δ_{ij} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{ij}=1$, $i=j$, $\delta_{ij}=0$, $i\neq j$.)

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 11, 1985, с. 25—41.

Строго говоря, мы будем исследовать неоднородный во времени марковский процесс $Z(t)$, $t \geq 0$, в фазовом пространстве $\mathsf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Для переходных вероятностей $P_{ij}(t_1, t_2) = \mathsf{P}\{Z(t_2) = j \mid Z(t_1) = i\}$, $t_1 \leq t_2$, будем предполагать, что существуют плотности вероятности перехода, т. е. при $h \downarrow 0$, имеют место следующие асимптотические формулы:

$$(1) \qquad P_{ij}(t, t+h) = P_{ij}(t-h, t) = \begin{cases} \delta_{0j} + q_j(t)h + o(h), & i = 0,\ j \geq 0; \\ \delta_{ij} + iP_{j+1-i}h + o(h), & \\ \qquad 1 \leq i \leq j+1; & \\ o(h), \quad i > j+1, \quad j \geq 0, & \end{cases}$$

причем

$$(2) \qquad q_0(t) < 0,\ q_j(t) \geq 0,\ j \geq 1,\ \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$p_1 < 0,\ p_j \geq 0,\ j \neq 1,\ \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 0.$$

Заметим, что процесс Ямазато [9] получается из рассматриваемой нами модели при $q_k(t) = q_k$, $t \geq 0$, $k \geq 0$.

В дальнейшем будем также предполагать, что для любого целого $k \geq 0$ функции $q_k(t)$, $t \geq 0$ имеют непрерывные производные.

Введем производящие функции

$$(3) \qquad f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad g(t; s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) s^k, \quad |s| \leq 1.$$

Основные результаты работы получены при выполнении следующих условий:

$$(4) \qquad f'(1) = 0, \quad 0 < f''(1) = 2b < \infty,$$

$$0 < m(t) = \left.\frac{\partial g(t; s)}{\partial s}\right|_{s=1} \downarrow 0,\ C(t) = \left.\frac{\partial^2 g(t; s)}{\partial s^2}\right|_{s=1} \downarrow 0, \quad t \to \infty.$$

Без ограничения общности будем предполагать $Z(0) = 0$ п. н. Тогда

$$(5) \qquad \Phi(t; s) = \mathsf{E}\{s^{Z(t)} \mid Z(0) = 0\} = \sum_{h=0}^{\infty} P_n(t) s^n, \quad |s| \leq 1,$$

где

$$(6) \qquad P_n(t) = \mathsf{P}\{Z(t) = n \mid Z(0) = 0\} = P_{0n}(0; t),$$

а

$$(7) \qquad R(t) = 1 - P_0(t) = \mathsf{P}\{Z(t) > 0 \mid Z(0) = 0\} \text{ —}$$

вероятность невырождения процесса.

Введем также следующие обозначения для факториальных моментов:

$$A(t) = \mathsf{E}\{Z(t) \mid Z(0) = 0\} = \left.\frac{\partial \Phi(t; s)}{\partial s}\right|_{s=1},$$

$$B(t) = \mathsf{E}\{Z(t)(Z(t) - 1) \mid Z(0) = 0\} = \left.\frac{\partial^2 \Phi(t; s)}{\partial s^2}\right|_{s=1}$$

Основным результатом нашей работы являются следующие утверждения:

Теорема 1. *В условиях* (4) *пусть* $m(t) \backsim t^{-\rho}L(t), C(t)=o(m(t)\log t)$, *где* $0 \leq \rho \leq 1$, *а* $L(t)$ — *медленно меняющаяся на бесконечности функция* (м. м. ф.). *Тогда*

а) *если* $\rho=0$, $L(t) \backsim K/\log t$, $0<K/b<1$, *то* $\lim_{t\to\infty} R(t)=K/(K+b)$, $A(t) \backsim Kt/(K+b)\log t$, $B(t) \backsim Kbt^2/(K+b)\log t$;

б) *если* $\rho=0$, $L(t) \backsim l(t)/\log t$, *где* $l(t) \to 0$, *то* $R(t) \backsim l(t)/b$, $A(t) \backsim tl(t)/\log t$, $B(t) \backsim bt^2 l(t)/\log t$;

в) *если* $0<\rho<1$, *то* $R(t) \backsim L(t)\log t/bt^\rho$, $A(t) \backsim t^{1-\rho}L(t)/(1-\rho)$, $B(t) \backsim 2bt^{2-\rho}L(t)/(1-\rho)(2-\rho)$;

Во всех этих случаях (а), б), в)) *при* $0<x<1$ *имеем*

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{\log Z(t)/\log t \leq x \mid Z(t)>0\}=x; \tag{8}$$

г) *если* $\rho=1$, $L(t) \backsim K(\log t)^r$, $K>0$, $r>-1$, *то* $R(t) \backsim K(r+2)(\log t)^{r+1}/(r+1)bt$, $A(t) \backsim K(\log t)^{r+1}/(r+1)$, $B(t) \backsim 2Kbt(\log t)^{r+1}(r+1)$, *а при всех* $x \geq 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{Z(t)/bt \leq x \mid Z(t)>0\}=\frac{r+1}{r+2}+\frac{1-e^{-x}}{r+2}, \tag{9}$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\left\{\frac{\log Z(t)}{\log t} \leq x \mid Z(t)>0\right\}=\frac{r+1}{r+2}x, \quad 0<x<1; \tag{10}$$

д) *если* $\rho=1$, $L(t) \backsim K/\log t$, *то* $R(t) \backsim (K\log\log t)/bt$, $A(t) \backsim K\log\log t$, $B(t) \backsim 2Kbt\log\log t$, а при $x \geq 0$: $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{Z(t)/bt \leq x \mid Z(t)>0\}=1-e^{-x}$.

Теорема 2. *В условиях* (4) *пусть* $\int_0^\infty m(t)dt<\infty$ *и* $C(t)=o(t^{-1})$. *Тогда если существует функция* $\psi(t)\uparrow$, $\psi(t)/t \to \infty$ *и* $m(t)=o(1/(\psi(t)\log\psi(t)))$, *то* $R(t) \backsim K/t$, $\lim_{t\to\infty} A(t)=K$, $B(t) \backsim 2Kbt$, *где* $K=\int_0^\infty m(t)P_0(t)dt<\infty$ *и для всех* $x \geq 0$: $\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{Z(t)/bt \leq x \mid Z(t)>0\}=1-e^{-x}$.

Замечание. Условия Теоремы 2 очевидно выполняются в следующих интересных случаях.

1. Если $m(t) \backsim mt\,(\log t)^\varepsilon$, $\varepsilon>1$, то $\int_0^\infty m(t)\,dt<\infty$ и, например, $\psi(t)=t\log\log t$;

2. Если $m(t) \backsim L(t)t^{-\rho}$, $\rho>1$, $L(t)$ — м. м. ф., то $\int_0^\infty m(t)dt<\infty$, и можно выбрать $\psi(t)=t^\varkappa$, $1<\varkappa<\rho$.

Интересно отметить, что в случае б) Теоремы 1 и в случае 4° Теоремы А [1] вероятность продолжения $R(t)$ может иметь одно и то же асимптотическое поведение. Тогда получаются и одинаковые предельные теоремы (см. (8) и Теорему Д [1]).

3. Вспомогательные результаты. Пусть $X(t)$, $t \geq 0$ — обычный ветвящийся процесс с непрерывным временем и с инфинитезимальной производящей функцией $f(s)$, определяемой в (3) и (2). Будем предполагать, что $X(0)=1$ п. н. Тогда для всех $t \geq 0$

$$P_{ij}(t)=\mathsf{P}\{X(t+\tau)=j \mid X(\tau)=i\}=P_{1j}^{*i}(t) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_i=j\\ k_l\geq 0}} P_{1k_1}(t)\ldots P_{1k_i}(t),\quad P_{0j}(t)=\delta_{0j}, \tag{11}$$

а при $h\downarrow 0$

$$P_{ij}(h)=P_{ij}(t;\,t+h)=P_{ij}(t-h,\,t)=\begin{cases}\delta_{ij}+iP_{j+1-i}\,h+o(h), & 1\leq i\leq j+\\ o(h), & i\geq j+1,\quad j\geq 0.\end{cases} \tag{12}$$

Хорошо известно (см. [7], гл. I, § 4), что производящие функции $F(t; s) = \mathsf{E}\{s^{X(t)} | X(0)=1\}$ при $|s| \leqq 1$ удовлетворяют соотношениям

$$E(h; s) = s + hf(s) + o(h), \quad h \downarrow 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial F(t; s)}{\partial t} = f(F(t; s)), \tag{14}$$

$$\frac{\partial F(t; s)}{\partial t} = f(s) \frac{\partial F(t; s)}{\partial s}, \tag{15}$$

$$F(0; s) = s. \tag{16}$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 3. *Производящая функция* $\Phi(t; s)$, *определенная* в (5), *при* $|s| \leqq 1$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial \Phi(t; s)}{\partial t} = f(s) \frac{\partial \Phi(t; s)}{\partial s} + g(t; s) P_0(t) \tag{17}$$

с начальным условием

$$\Phi(0; s) = 1. \tag{18}$$

Доказательство. Для всех $t \geqq 0$, $h > 0$ имеем

$$\Phi(t+h; s) = \mathsf{E}\{\mathsf{E}\{s^{Z(t+h)} | Z(t)\}\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) \mathsf{E}\{s^{Z(t+h)} | Z(t)=n\} + P_0(t) \mathsf{E}\{s^{Z(t+h)} | Z(t)=0\}.$$

Из (1), (11) и (12) при $h \downarrow 0$ следует, что

$$\mathsf{E}\{s^{Z(t+h)} | Z(t)=n\} = F^n(h; s) + o(h), \quad n \geqq 1,$$

$$\mathsf{E}\{s^{Z(t+h)} | Z(t)=0\} = \sum_{k=0}^{\infty} (\delta_{0k} + q_k(t)h + 0(h)) s^k = 1 + g(t; s)h + \frac{o(h)}{1-s}.$$

Следовательно, при $h \downarrow 0$

$$\Phi(t+h; s) = \Phi(t; F(h; s)) + P_0(t) g(t; s) h + o(h). \tag{19}$$

Имея в виду (13), получаем $\Phi(t+h; s) = \Phi(t; s) + hf(s) \dfrac{\partial \Phi(t; s)}{\partial s} + o(h)$. Таким образом из (19) находим

$$\frac{\Phi(t+h; s) - \Phi(t; s)}{h} = f(s) \frac{\partial \Phi(t; s)}{\partial s} + P_0(t) g(t; s) + \frac{o(h)}{h}. \tag{20}$$

Вполне аналогично получаем

$$\Phi(t; s) = \mathsf{E}\{\mathsf{E}\{s^{Z(t)} | Z(t-h)\}\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t-h) \mathsf{E}\{s^{Z(t)} | Z(t-h)=n\} + P_0(t-h) \mathsf{E}\{s^{Z(t)} | Z(t-h)-0\},$$

$$\mathsf{E}\{s^{Z(t)} | Z(t-h)=n\} = F^n(h; s) + o(h),$$

$$\mathsf{E}\{s^{Z(t)} \mid Z(t-h)=0\} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{0k}(t-h,\ t)s^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\delta_{0k} + q_k(t)h + 0(h))s^k = 1 + g(t\,;\ s)h + \frac{o(h)}{1-s} \cdot$$

Таким образом при $h \downarrow 0$

$$\Phi(t\,;\ s) = \Phi(t-h\,;\ F(h\,;\ s)) - P_0(t-h) + P_0(t-h)[1 + g(t\,;\ s)h + o(h)],$$

откуда, в виду (13), получаем

$$\frac{\Phi(t\,;\ s) - \Phi(t-h\,;\ s)}{h} = f(s)\ \frac{\partial\Phi(t-h\,;\ s)}{\partial s} + P_0(t-h)g(t\,;\ s) + \frac{o(h)}{h} \cdot \tag{21}$$

Заметим, что из (1) и марковости процесса вытекает, что $P_n(t)$ — непрерывно-дифференцируемые функции по $t \geq 0$ для всех $n=0, 1, 2, \ldots$. Теперь из (20) и (21) следует (17).

Теорема 4. *Уравнение* (17) *с начальным условием* (18) *имеет единственное решение в классе непрерывно-дифференцируемых функций, которое можно представить следующим образом:*

$$\Phi(t\,;\ s) = 1 + \int_0^t P_0(x)g(x\,;\ F(t-x\,;\ s))dx, \tag{22}$$

где $P_0(t)$, $t \geq 0$ — *единственное непрерывно-дифференцируемое решение интегрального уравнения*

$$P_0(t) = 1 + \int_0^t P_0(x)g(x\,;\ F(t-x\,;\ 0))dx. \tag{23}$$

Доказательство. Сначала будем считать, что $P_0(t)$ — известная функция. Теперь (17) является нелинейным уравнением с частными производными первого порядка. Тогда первое утверждение теоремы сразу вытекает из общей теории таких уравнений (см., напр. [8], гл. VIII, § 3). С другой стороны,

$$\Phi_t'(t\,;\ s) = g(t\,;\ s)P_0(t) + \int_0^t P_0(x)g_3'(x\,;\ F(t-x\,;\ s))F_t'(t-x\,;\ s)dx,$$

$$\Phi_s'(t\,;\ s) = \int_0^t P_0(x)g_s'(x\,;\ F(t-x\,;\ s))\,F_s'(t-x\,;\ s)\,dx$$

являются непрерывными функциями и в виду (15) следует, что (22) является единственным решением (в классе непрерывно-дифференцируемых функций) (17) с начальным условием (18).

Теперь из (22) при $s=0$ получаем (23), которое является неоднородным уравнением Волтерра второго рода и имеет единственное непрерывное решение (см., напр. [4], гл. II, § 9, Теорема 1), которое в любом конечном интервале $[0,\ T]$ выражается абсолютно и равномерно сходящимся рядом $P_0(t) = 1 + \Sigma_{n=1}^{\infty} V_n(t)$, где

$$V_1(t) = \int_0^t g(u\,;\ F(t-u\,;\ 0))du, \quad V_{n+1}(t) = \int_0^t V_n(u)g(u\,;\ F(t-u\,;\ 0))du$$

$n=1,\ 2,\ \ldots.$

Далее нам будут необходимы следующие асимптотические результаты.

Лемма 1. *Пусть* $t\to\infty$. *Тогда:*

1^0 *Если* $u(t)\backsim t^pL(t)$, $p>-1$, $L(t)$ — м. м. ф., *то* $\int_0^t u(x)dx\backsim t^{p+1}L(t)/(p+1)$;

2^0 $\int\limits_1^{t-2}\frac{dx}{x\log(t-x)}\to 1$;

3^0 *Если* $r>-1$, *то* $\int\limits_2^{t-1}\frac{(\log x)^r}{x(t-x)}dx\backsim\frac{r+2}{r+1}\cdot\frac{(\log t)^{r+1}}{t}$;

4_0 $\int\limits_2^{t-1}\frac{dx}{x(t-x)\log x}\backsim\frac{\log\log t}{t}$;

5^0 *Если* $r>-1$ *и* $\lambda>0$, *то* $\int\limits_0^{t-2}\frac{(\log(t-x))^r}{(t-x)(t+\lambda x)}dx\backsim\frac{(\log t)^{r+1}}{(r+1)(1+\lambda)t}$;

6^0 $\int\limits_0^{t-2}\frac{dx}{(t+\lambda x)(t-x)\log(t-x)}\backsim\frac{\log\log t}{(1+\lambda)t}$, $\lambda>0$.

Доказательство. Утверждение 1^0 вытекает сразу из Теоремы 1 ([2], гл. VIII, § 9).

Заметим, что из 1^0 имеем $\int\limits_2^t\frac{dx}{\log x}\backsim\frac{t}{\log t}$, $t\to\infty$. С другой стороны,

$$I(t)=\int\limits_1^{t-2}\frac{dx}{x\log(t-x)}=\int\limits_1^{t/2}+\int\limits_{t/2}^{t-2}=I_1(t)+I_2(t),$$

где

$$\frac{-1}{\log(t-1)}\int\limits_1^{t/2}\frac{dx}{x}\leqq I_1(t)\leqq\frac{1}{\log t/2}\int\limits_1^{t/2}\frac{dx}{x},$$

$$0\leqq I_2(t)\leqq\frac{2}{t}\int\limits_{t/2}^{t-2}\frac{dx}{\log(t-x)}\leqq\frac{2}{t}\int\limits_2^t\frac{dx}{\log x}\to 0,$$

Следовательно, $\lim_{t\to\infty}I(t)=\lim_{t\to\infty}I_1(t)=1$. Этим доказано 2^0.

Для доказательства 3^0 представим

$$I(t)=\int\limits_2^{t-1}\frac{(\log x)^r}{x(t-x)}dx=\frac{1}{t}\Big(\int\limits_2^{t-1}\frac{(\log x)^r}{x}dx+\int\limits_2^{t-1}\frac{(\log x)^r}{t-x}dx\Big)\tag{24}$$

$$=\frac{1}{t}(I_1(t)+I_2(t)).$$

Очевидно, что

$$I_1(t)=\int\limits_2^{t-1}\frac{(\log x)^r}{x}dx=\frac{(\log x)^{r+1}}{r+1}\Big|_2^{t-1}\backsim\frac{(\log t)^{r+1}}{r+1}.\tag{25}$$

С другой стороны, если $r>0$, то $I_2(t)=I_{21}(t)+I_{22}(t)$, где (см. 1^0)

$$0\leqq I_{21}(t)=\int\limits_2^{t/(\log t)^r}\leqq\frac{1}{t-t(\log t)^{-r}}\int\limits_2^t(\log x)^rdx\backsim(\log t)^r,$$

$$I_{22}(t)=\int\limits_{t/(\log t)^r}^{t-1} \leqq (\log(t-1))^r \int\limits_1^{t-t(\log t)^{-r}} \frac{dx}{x} \backsim (\log t)^{r+1},$$

$$I_{22}(t) \geqq (\log(t(\log t)^{-r} \int\limits_1^{t-t(\log t)^{-r}} \frac{dx}{x} \backsim (\log t)^{r+1}.$$

Следовательно,

$$I_2(t) \backsim (\log t)^{r+1}. \tag{26}$$

Если $r=0$, то $I_2=\int\limits_2^{t-1}\frac{dx}{t-x}=\int\limits_1^{t-2}\frac{dx}{x}\backsim \log t$, т. е. (26) выполняется.

Наконец, если $-1<r<0$, то $I_2(t)=I_{21}(t)+I_{22}(t)$, где (см. 1^0)

$$0 \leqq I_{21}(t)=\int\limits_2^{t-t(\log t)^r} \leqq \frac{1}{t(\log t)^r}\int\limits_2^t (\log x)^r dx \to 1,$$

$$I_{22}(t)=\int\limits_{t-t(\log t)^r}^{t-1} \leqq (\log(t-t(\log t)^r))^r \int\limits_1^{t(\log t)^r} \frac{dx}{x} \backsim (\log t)^{r+1},$$

$$I_{22}(t) \geqq (\log(t-1))^r \int\limits_1^{t(\log t)^r} \frac{dx}{x} \backsim (\log t)^{r+1}.$$

Следовательно, и в этом случае выполняется (26). Теперь из (24)—(26) следует 3^0.

Соотношение 4^0 вытекает сразу из представления

$$\int\limits_2^{t-1}\frac{dx}{(t-x)x\log x}=\frac{1}{t}\Big(\int\limits_2^{t-1}\frac{dx}{x\log x}+\int\limits_2^{t-1}\frac{dx}{(t-x)\log x}\Big),$$

имея в виду 2^0 и то, что

$$\int\limits_2^{t-1}\frac{dx}{x\log x}\backsim \log\log t. \tag{27}$$

Утверждение 5^0 вытекает из представления

$$\int\limits_0^{t-2}\frac{(\log(t-x))^r}{(t-x)(t+\lambda x)}\,dx=\frac{1}{(1+\lambda)t}\Big(\int\limits_2^t\frac{(\log x)^r}{x}dx+\lambda\int\limits_0^{t-2}\frac{(\log(t-x))^r}{t+\lambda x}\,dx\Big),$$

имея в виду (25) и то, что (см. 1^0)

$$\int\limits_0^{t-2}\frac{(\log(t-x))^r}{t+\lambda x}\,dx \leqq \frac{1}{t}\int\limits_0^t(\log x)^r dx \backsim (\log t)^r.$$

Из представления

$$\int\limits_0^{t-2}\frac{dx}{(t+\lambda x)(t-x)\log(t-x)}=\frac{1}{(1+\lambda)t}\Big(\int\limits_2^t\frac{dx}{x\log x}+\lambda\int\limits_0^{t-2}\frac{dx}{(t+\lambda x)\log(t-x)}\Big),$$

имея в виду (27) и то, что (см. 1^0)

$$\int\limits_0^{t-2}\frac{dx}{(t+x\lambda)\log(t-x)} \leqq \frac{1}{t}\int\limits_2^t\frac{dx}{\log x}\backsim\frac{1}{\log t},$$

получаем утверждение 6^0. Лемма доказана.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующими хорошо известными результатами (см., напр., [7]):

(28) $$Q(t)=1-F(t;\ 0)\backsim(bt)^{-1},\quad t\to\infty,$$

(29) $$1-F(t;\ s)=\frac{1-s}{1+bt(1-s)}\,(1+\varepsilon(t;\ s)),$$

где $\varepsilon(t;\ s)\to 0$ при $t\to\infty$ равномерно по $|s|\leq 1$;

(30) $$0<F(t;\ 0)\leq F(t;\ s)\leq 1,\quad F(t;\ s)\uparrow 1,\quad t\to\infty,$$

равномерно по $0\leq s\leq 1$;

(31) $$g(t;\ s)=m(t)(s-1)+\frac{\bar{C}(t;\ s)}{2}(s-1)^2,$$

где $0\leq\bar{C}(t;\ s)\leq C(t)$, $\bar{C}(t;\ s)\to C(t)$, $0\leq s\uparrow 1$;

(32) $$m(t)(1-s)-\frac{C(t)}{2}(1-s)^2\leq -g(t;\ s)\leq m(t)(1-s),\quad 0\leq s\leq 1.$$

Лемма 2. *Пусть выполняются соотношения* (4) *и, кроме того,* $m(t)=0(1/\log t)$. *Тогда* $R(t)=1-P_0(t)\to 0$, $t\to\infty$.

Доказательство. Из уравнения (23), ввиду (32) и (28), получаем

(33) $$0\leq R(t)=-\int_0^t P_0(u)g(u;\ F(t-u;\ 0))du\leq\int_0^t m(u)Q(t-u)du$$

$$\leq Q(t/2)\int_0^{t/2} m(u)\,du+m\,(t/2)\int_0^{t/2} Q(u)du=o(1).$$

Лемма 3. *Пусть* $C(t)\downarrow 0$ *и* $C(t)=o(L(t)t^{-\rho}\log t)$, *где* L — м. м. ф. *Тогда:* а) *если* $0\leq\rho<1$ *и* $h(t)\downarrow 0$, $\int_0^\infty h(t)dt<\infty$, *то*

$$S(t)=\int_0^t C(x)h(t-x)dx=o(L(t)t^{-\rho}\log t),\quad t\to\infty;$$

б) *если* $\rho=1$ *и* $L(t)\backsim(\log t)^r$, $t\to\infty$, $r\geq -1$, *то*

$$S(t)=\int_1^{t-1}\frac{C(x)}{(t-x)^2}dx=o\,((\log t)^{r+1}/t),\quad t\to\infty.$$

Доказательство. Из представления

$$0\leq S(t)=\int_0^{t/2}+\int_{t/2}^{t}\leq h(t/2)\int_0^{t/2}C\,(x)\,dx+C(t/2)\int_0^{t/2}h(x)\,dx,$$

сразу вытекает утверждение а), ввиду того, что $h(t)=o(t^{-1})$, а по Лемме 1.1° $\int_0^{t/2}C(x)dx=o(L(t)t^{1-\rho}\log t)$, $t\to\infty$.

Утверждение б) следует из представления

$$0\leq S(t)=\int_1^{t/2}+\int_{t/2}^{t-1}\leq 4t^{-2}\int_1^{t/2}C(x)\,dx+C\,(t/2)\int_1^{t/2}x^{-2}dx,$$

ввиду того, что $\int_1^\infty x^{-2}dx<\infty$, а по (25) $\int_1^{t/2}C(x)dx=o((\log t)^{r+2})$.

Лемма 4. *Пусть* $0 \leqq v(t) \backsim L(t)t^\rho$, *где* L — *м. м. ф. Тогда при* $t \to \infty$:
а) *если* $\rho > -1$, *то* $w(t) = \int_0^t v(x)(t-x)dx \backsim t^{\rho+2}L(t)/(1+p)(2+\rho)$;

б) *если* $\rho = -1$, $L(t) \backsim K(\log t)^r$, $r > -1$, *то*

$$w(t) \backsim Kt(\log t)^{r+1}/(r+1);$$

в) *если* $\rho = -1$, $L(t) \backsim K/\log t$, *то* $w(t) \backsim Kt \log\log t$.

Доказательство. Представим $w(t) = t\int_0^t v(x)dx - \int_0^t xv(x)dx$. Теперь утверждение а) следует из того, что по Лемме 1.1^0

$$t\int_0^t v(x)dx \backsim \frac{t^{\rho+2}L(t)}{p+1}, \quad \int_0^t xv(x)\,dx \backsim \frac{t^{\rho+2}L(t)}{p+2}.$$

Для доказательства б) имеем из (25), что $t\int_0^t v(x)dx \backsim Kt(\log t)^{r+1}/(r+1)$ и из Леммы 1.1^0 $\int_0^t xv(x)dx \backsim Kt(\log t)^r$.

Аналогичным образом для в) имеем $t\int_0^t v(x)dx \backsim Kt \log\log t$ (см. (27)) и $\int_0^t xv(x)dx \backsim Kt/\log t$ (см. Лемма 1.1^0).

4. Доказательство Теоремы 1. Напомним, что в этом случае $m(t) \backsim K/\log t$, $C(t) = o(1)$. Обозначим $\theta = K/b$, где $0 < \theta < 1$.

Из уравнения (23), имея в виду (32) и (28), получаем

$$P_0(t) = 1 + \int_0^t P_0(t-u)g(t-u;\ 1-Q(u))\,du \tag{34}$$

$$\geqq 1 - \int_0^t P_0(t-u)m(t-u)Q(u)du$$

$$\geqq 1 - \sup_{x \geqq t/2} P_0(x)I_1(t) - I_2(t),$$

где

$$0 \leqq I_2(t) = \int_{t/2}^t m(t-u)Q(u)du \leqq Q(t/2)\int_0^{t/2} m(u)du \backsim \frac{\theta}{\log t},$$

$$I_1(t) = \int_0^{t/2} m(t-u)Q(u)du \leqq m(t/2)\int_0^{t/2} Q(u)du \to \theta,$$

$$I_1(t) \geqq m(t)\int_0^{t/2} Q(u)du \to \theta.$$

Таким образом из (34) вытекает

$$\underline{\lim}\, P_0(t) \geqq 1 - \theta\, \overline{\lim}\, P_0(t). \tag{35}$$

Вполне аналогично, из (34) и (32) имеем

$$P_0(t) \leqq 1 - \int_0^t P_0(t-u)m(t-u)\,Q(u)du + \frac{1}{2}\int_0^t P_0(t-u)c(t-u)Q^2(u)du \tag{36}$$

$$\leqq 1 - \inf_{x \geqq t/2} P_0(x)I_1(t) + \int_0^t c(t-u)Q^2(u)du.$$

Так как по Лемме 3 а) $\int_0^t c(t-u)Q^2(u)du=o(1)$, то из (36) следует, что

(37) $$\overline{\lim}\, P_0(t)\leq 1-\theta\underline{\lim}\, P_0(t).$$

Теперь из (35) и (37) находим, что $(1-\theta)\overline{\lim}\, P_0(t)\leq(1-\theta)\underline{\lim}\, P_0(t)$, откуда, ввиду того, что $0<\theta<1$, окончательно получаем $\lim_{t\to\infty} P_0(t)=1/(1+\theta)$.

Замечание. Последнее соотношение получается непосредственно из уравнения (23) для любого $\theta>0$, используя (31), если только допустим, что существует $\lim P_0(t)$. К сожалению, доказать это предположение для $\theta\geq 1$ нам пока не удалось.

После дифференцирования в (22) по s и перехода к пределу при $s\uparrow 1$ получаем следующие уравнения для моментов:

(38) $$A(t)=\int_0^t P_0(x)m(x)\,dx,$$

(39) $$B(t)=\int_0^t P_0(x)c(x)dx+2b\int_0^t P_0(x)m(x)(t-x)dx.$$

Ввиду того, что $P_0(t)m(t)\backsim K/(1+\theta)\log t$, из Леммы 1.1° и (38) сразу находим $A(t)\backsim Kt/(1+\theta)\log t$. С другой стороны, по Лемме 1.1° из $P_0(t)c(t)=o(1)$ вытекает $\int_0^t P_0(x)c(x)dx=o(t)$, а по Лемме 4: а) $2b\int_0^t P_0(x)m(x)(t-x)dx\backsim bKt^2/(1+\theta)\log t$. Отсюда и из (39) получаем $B(t)\backsim bKt^2/(1+\theta)\log t$, $t\to\infty$;

б) в этом случае $m(t)\backsim l(t)/\log t$, $c(t)=o(l(t))$, $t\to\infty$, где $\overline{l(t)}\to 0$ и $l(t)$ — м. м. ф. Тогда в силу Леммы 2 $\lim_{t\to\infty} P_0(t)=1$.

Из уравнения (23), имея в виду (31), получаем

(40) $$R(t)=\int_0^t P_0(x)m(x)Q(t-x)dx-\frac{1}{2}\int_0^t P_0(x)\bar{c}(x;\ F(t-x;0))Q^2(t-x)dx,$$

где (см. (31))

(41) $$\int_0^t P_0(x)\bar{c}(x;\ F(t-x;\ 0))Q^2(t-x)dx\leq S(t)=\int_0^t c(x)Q^2(t-x)dx.$$

Теперь по Лемме 3 а), имея в виду (28), получаем, что

(42) $$S(t)=o(l(t)),\quad t\to\infty.$$

Далее, используя Лемму 1.1° и (28), находим

$$0\leq\int_0^{t/2} P_0(x)m(x)Q(t-x)dx\leq Q(t/2)\int_0^{t/2} m(x)dx\backsim\frac{l(t)}{b\log t},$$

(43) $$W(t)=\int_{t/2}^t P_0(x)m(x)Q(t-x)dx\leq m(t/2)\int_0^{t/2} Q(x)dx\backsim l(t)/b,$$

$$W(t)\geq m(t)\inf_{y\geq t/2} P_0(y)\int_0^{t/2} Q(x)dx\backsim l(t)/b.$$

Теперь из (40)—(43) вытекает, что $R(t)\backsim W(t)\backsim l(t)/b$.

Поскольку $P_0(t)m(t)\backsim l(t)/\log t$, из (28) и Леммы 1.1^0 немедленно следует, что $A(t)\backsim tl(t)/\log t$, $t\to\infty$. Далее, ввиду того, что $P_0(t)c(t)=o(l(t))$, из Леммы 1.1^0 вытекает, что $\int_0^t c(x)P_0(x)dx=o(tl(t))$. С другой стороны, по Лемме 4 а) получаем, что $2b\int_0^t P_0(x)m(x)(t-x)dx\backsim bt^2l(t)/\log t$. Отсюда, ввиду (39), сразу находим $B(t)\backsim bt^2l(t)/\log t$, $t\to\infty$;

в) в этом случае $m(t)\backsim t^{-\rho}L(t)$, где $0<\rho<1$, $L(t)$ — м. м. ф., а $c(t)=o(t^{-\rho}L(t)\log t)$ и по Лемме 2 $\lim_{t\to\infty} P_0(t)=1$.

Воспользуемся соотношениями (40) и (41). По Лемме 3 а), имея в виду (28), получаем

$$S(t)=o(t^{-\rho}L(t)\log t),\quad t\to\infty. \tag{44}$$

По Лемме 1.1^0, в силу (28), имеем последовательно

$$0\leqq\int_0^{t-t(\log t)^{-\rho}} P_0(x)m(x)Q(t-x)dx\leqq Q(t(\log t)^{-\rho})\int_0^t m(x)dx$$

$$\backsim\frac{(\log t)^\rho}{bt}\cdot\frac{L(t)t^{1-\rho}}{1-\rho}\backsim\frac{L(t)t^{-\rho}(\log t)^\rho}{b(1-\rho)}=o(t^{-\rho}L(t)\log t).$$

$$W(t)=\int_{t-t(\log t)^{-\rho}}^{t} P_0(x)m(x)Q(t-x)dx \tag{45}$$

$$\leqq m(t-t(\log t)^{-\rho})\int_0^{t(\log t)^{-\rho}} Q(x)dx\backsim\frac{t^{-\rho}L(t)\log t}{b},$$

$$W(t)\geqq m(t)\inf_{y\geqq t(\log t)^{-\rho}} P_0(y)\int_0^{t(\log t)^{-\rho}} Q(x)\,dx)\backsim\frac{t^{-\rho}L(t)\log t}{b}.$$

Из (40), (41), (44) и (45) следует, что

$$R(t)\backsim W(t)\backsim b^{-1}t^{-\rho}L(t)\log t,\quad t\to\infty.$$

Так как $v(t)=P_0(t)m(t)\backsim t^{-\rho}L(t)$, то по Лемме 1.1^0, имея в виду (38), получаем $A(t)\backsim\int_0^t v(x)dx\backsim L(t)t^{1-\rho}/(1-\rho)$. С другой стороны, по Лемме 4 а) имеем $2b\int_0^t v(x)(t-x)\backsim 2bt^{2-\rho}L(t)/(1-\rho)(2-\rho)$. Кроме того, из $c(t)P_0(t)=o(t^{-\rho}L(t)\log t)$ по Лемме 1.1^0 следует, что $\int_0^t c(x)P_0(x)dx=o(t^{1-\rho}L(t)\log t)$. Отсюда, ввиду (39), вытекает, что $B(t)\backsim 2bt^{2-\rho}L(t)/(1-p)(2-\rho)$.

Докажем теперь предельное соотношение (8). Пусть $\lambda>0$ и $0<x<1$. Из (22) и (31) получаем

$$Q_t(\lambda;\ x)=\mathsf{E}\{\exp(-\lambda Z(t)t^{-x})/Z(t)>0\}=1-\{R(t)\}^{-1}(1-\Phi(t;\ e^{-\lambda t^{-x}})) \tag{46}$$

$$=1-\{R(t)\}^{-1}\{\int_0^t P_0(t-u)m(t-u)(1-F(u;\ e^{-\lambda t^{-x}}))du$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t P_0(t-u)\bar{c}(t-u;\ F(u;\ e^{-\lambda t^{-x}}))(1-F(u;\ e^{-\lambda t^{-x}}))^2du\}$$

$$=1-S_1(t)+\frac{1}{2}S_2(t).$$

Из (30) и (31) находим $0 \leqq S_2(t) = \{R(t)\}^{-1} \int_0^t c(t-u) Q^2(u) du$, а это неравенство и (36), (42), (44), соответственно для случаев а), б) и в), дают нам оценку $\{R(t)\}^{-1} \int_0^t c(t-u) Q(u)^2 du = o(1)$. Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} S_2(t) = 0, \quad \lambda > 0, \quad 0 < x < 1. \tag{47}$$

Представим $S_1(t)$ следующим образом:

$$S_1(t) = \{R(t)\}^{-1} \int_0^{\tau(t)} + \{R(t)\}^{-1} \int_{\tau(t)}^{t} = S_{11}(t) + S_{12}(t), \tag{48}$$

где $\tau(t) = t/2$ для случаев а) и б) и $\tau(t) = t(\log t)^{-\rho}$ для случая в).

Теперь из (31) получаем $0 \leqq S_{12}(t) \leqq R(t)^{-1} \int_{\tau(t)}^t m(t-u) Q(u) du$. Отсюда, ввиду (34), (43) и (45), соответственно для случаев а), б) и в), следует, что

$$\lim_{t\to\infty} S_{12}(t) = 0, \quad \lambda > 0, \quad 0 < x < 1. \tag{49}$$

В силу монотонности $m(t)$, для $S_{11}(t)$ имеют место неравенства

$$S_{11}(t) \leqq \{R(t)\}^{-1} m(t-\tau(t)) \sup_{y \geqq t-\tau(t)} P_0(y) \int_0^{\tau(t)} (1 - F(u;\ e^{-\lambda t^{-x}})) du, \tag{50}$$

$$S_{11}(t) \geqq \{R(t)\}^{-1} m(t) \inf_{y \geqq t-\tau(t)} P_0(y) \int_0^{\tau(t)} (1 - F(u;\ e^{-\lambda\tau^{-x}})) du.$$

При доказательстве п. п. а), б) и в) нетрудно заметить, что

$$\{R(t)\}^{-1} m(t-\tau(t)) \sup_{y \geqq t-\tau(t)} P_0(y) \backsim b/\log t, \tag{51}$$

$$\{R(t)\}^{-1} m(t) \inf_{y \geqq t-\tau(t)} P_0(y) \backsim b/\log t.$$

Имея в виду (29), получаем

$$\int_0^{\tau(t)} (1 - F(u;\ e^{-\lambda t^{-x}})) du = \int_0^{\tau(t)} \frac{1 - e^{-\lambda t^{-x}}}{1 + bu(1 - e^{-\lambda t^{-x}})} du \tag{52}$$

$$+ \int_0^{\tau(t)} \frac{1 - e^{-\lambda t^{-x}}}{1 + bu(1 - e^{-\lambda t^{-x}})} \varepsilon(u;\ e^{-\lambda t^{-x}}) du = I(t) + J(t).$$

Нетрудно вычислить, что

$$I(t) = \frac{1}{b} \log(1 + b\tau(t)(1 - e^{-\lambda t^{-x}})) \backsim \frac{1-x}{b} \log t, \quad t \to \infty, \tag{53}$$

для каждого из случаев а), б) и в), а

$$|J(t)| \leqq \int_0^{\lambda(t)} \frac{\varepsilon^*(u)}{(1 - e^{-\lambda t^{-x}})^{-1} + bu} du \tag{54}$$

$$\leqq \int_0^{\tau(t)} \frac{\varepsilon^*(u)}{1 + bu} du = o(\log t), \quad t \to \infty,$$

где $\varepsilon^*(u) = \sup_{0 \leqq s \leqq 1} |\varepsilon(u;\ s)| \to 0$, $t \to \infty$.

Теперь из (50)—(54) получаем, что $\lim_{t\to\infty} S_{11}(t)=1-x$, $\lambda>0$, $0<x<1$

Из этого соотношения и (46)—(49) вытекает, что $\lim_{t\to\infty} Q_t(\lambda\,;\,x)=x$ $\lambda>0$, $0<x<1$.

Применяя к этому соотношению теорему непрерывности для преобразования Лапласа — Стильтеса (см. [2] стр. 408), окончательно получаем

$$\lim \mathsf{P}\{Z(t)t^{-x}\leq y \mid Z(t)>0\}=x, \quad y>0, \quad 0<x<1.$$

Отсюда очевидным образом вытекает (8);

г) в этом случае $m(t)\backsim K(\log t)^r/t$, $r>-1$, $C(t)=0((\log t)^{r+1}/t)$ и по Лемме 2 $\lim_{t\to\infty} P_0(t)=1$. Как и в случаях б) и в), будем пользоваться соотношениями (40) и (41).

Заметим сначала, что в силу Леммы 3 б) и (28) имеет место оценка

$$S(t)=o((\log t)^{r+1}/t, \quad t\to\infty, \tag{55}$$

где $S(t)$ определяется в (41).

Поскольку $m(t)P_0(t)=K(\log t)^r t^{-1}(1+\delta_t)$, $Q(t)=\frac{1+\varepsilon_t}{bt}$, где δ_t, $\varepsilon_t\to 0$, $t\to\infty$, то

$$D(t)=\int_0^t P_0(x)m(x)Q(t-x)dx=\int_0^2+\int_2^{t-1}+\int_{t-1}^t$$

$$=\frac{k}{b}\int_2^{t-1}\frac{(\log x)^r}{x(t-x)}\,dx+\frac{k}{b}\int_2^{t-1}\frac{(\log x)^r}{x(t-x)}\,\delta_x\,dx+\frac{k}{b}\int_2^{t-1}\frac{(\log x)^r}{x(t-x)}\,\delta_x(1-\varepsilon_{t-x})\,dx$$

$$+\int_0^2 P_0(x)m(x)Q(t-x)\,dx+\int_{t-1}^t P_0(x)m(x)Q(t-x)dx$$

$$D_1(t)+D_2(t)+D_3(t)+D_4(t)+D_5(t).$$

По Лемме 1.3° немедленно следует, что

$$=D_1(t)\backsim\frac{K}{b}\;\frac{r+2}{r+1}\;\frac{(\log t)^{r+1}}{t}, \quad t\to\infty.$$

Нетрудно показать, что для $i=2,\ 3,\ 4,\ 5$

$$D_i(t)-o(D_1(t)), \quad t\to\infty. \tag{56}$$

Тогда очевидно $D(t)\backsim D_1(t)\backsim K(r+2)/\log t)^{r+1}/b(r+1)t$. Теперь, из этого соотношения, ввиду (40), (41) и (52), получаем $R(t)\backsim D(t)\backsim K(r+2)(\log t)^{r+1}/b(r+1)t$, $t\to\infty$.

Докажем, например (56), для $i=2$.

$$=|D_2(t)|\leq\frac{K}{b}\int_2^{t/2}\frac{(\log x)^r|\,\delta_x\,|}{x(t-x)}\,dx+\frac{K}{b}\int_{t/2}^{t-1}\frac{(\log x)^r\,|\,\delta_x\,|}{x(t-x)}\,dx$$

$$\leq\frac{2K}{bt}\int_2^t\frac{(\log x)^r}{x}\,|\,\delta_x\,|\,dx+\sup_{x\geqq t/2}|\,\delta_x\,|\,D_1(t)=o((\log t)^{r+1}/t)$$

в силу (25) и того, что $\sup_{x\geqq t/2}|\,\delta_x\,|\to 0$, $t\to\infty$.

Поскольку $v(t)=m(t)P_0(t)\backsim K(\log t)^r/t$, из (25) и уравнения (38) сразу вытекает, что $A(t)\backsim K(\log t)^{r+1}/(r+1)$, $t\to\infty$. С другой стороны, по Лемме 4 б) получаем $\int\limits_0^t v(x)\,(t-x)\,dx\backsim\frac{t(\log t)^{r+1}}{r+1}\cdot$ Отсюда и из уравнения (39) следует, что $B(t)\backsim 2bt(\log t)^{r+1}/(r+1)$, потому что $P_0(t)c(t)=o((\log t)^{r+1}/t)$, и, в силу (25),

$$\int\limits_0^t P_0(x)c(x)dx=o((\log t)^{r+2}),\quad t\to\infty.$$

Докажем теперь предельное соотношение (9). Пусть $\lambda>0$. Из (22) и (31) получаем, что

$$\begin{aligned}(57)\qquad Q_t(\lambda)&=\mathsf{E}\{\exp(-\lambda Z(t)/bt)/Z(t)>0\}\\&=1-\{R(t)^{-1}(1-\Phi(t;\ e^{-\lambda/bt}))\\&=1-\{R(t)\}^{-1}\{\int\limits_0^t P_0(t-x)m(t-x)(1-F(x;\ e^{-\lambda/bt}))\,dx\\&-\frac{1}{2}\int\limits_0^t P_0(t-x)\bar{c}\,(t-x;\ F(x;\ e^{-\lambda/bt}))(1-F(x;e^{-\lambda/bt}))^2\,dx\}\\&=1-\{R(t)\}^{-1}\{S_1(t)-\frac{1}{2}S_2(t)\}.\end{aligned}$$

Из (30), (31) и (55) легко вытекает, что

$$(58)\qquad \lim R^{-1}(t)S_2(t)=0.$$

Используя (29) и то, что $P_0(t)m(t)=K(\log t)^r(1+\delta_t)/t$, где $\delta_t\to 0$, $t\to\infty$, представим $S_1(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}(59)\qquad S_1(t)&=\int\limits_0^t P_0(t-x)\,m\,(t-x)(1-F(x;\ e^{-\lambda/bt}))\,dx=\int\limits_0^{t-2}+\int\limits_{t-2}^t\\&=K\int\limits_0^{t-2}\frac{(\log(t-x))^r}{t-x}\cdot\frac{1-e^{-\lambda/bt}}{1+bx(1-e^{-\lambda/bt})}\,dx+K\int\limits_0^{t-2}\frac{(\log(t-x))^r}{t-x}\cdot\frac{(1-e^{-\lambda/bt})\delta_{t-x}}{1+bx(1-e^{-\lambda/bt})}\,dx\\&+K\int\limits_0^{t-2}\frac{(\log(t-x))^r}{t-x}\cdot\frac{(1-e^{-\lambda/bt}(1+\delta_{t-x})}{1+bx(1-e^{-\lambda/bt})}\,\varepsilon(x;\ e^{-\lambda/bt})\,dx+\int\limits_{t-2}^t\\&=U_1(t)+U_2(t)+U_3(t)+U_4(t).\end{aligned}$$

Пусть $\xi>0$. Для всех достаточно больших t имеют место неравенства $(1-\xi)\lambda/bt\le 1-e^{-\lambda/bt}\le(1+\xi)\lambda/bt$. Отсюда получаем

$$\{R(t)\}^{-1}U_1(t)\le\{R(t)\}^{-1}\frac{K(1+\xi)\lambda}{b}\int\limits_0^{t-2}\frac{(\log(t-x))^r}{t-x}\cdot\frac{1}{t+x\lambda(1-\xi)}\,dx,$$

$$\{R(t)\}^{-1}U_1(t)\ge\{R(t)\}^{-1}\frac{K(1-\xi)\lambda}{b}\int\limits_0^{t-2}\frac{(\log(t-x))^r}{t-x}\cdot\frac{1}{t+x\lambda(1+\xi)}\,dx.$$

Теперь, ввиду того, что $R(t)\backsim Kb^{-1}(r+2)(\log t)^{r+1}/(r+1)t$, по Лемме 1.5° получаем

$$\overline{\lim}\,\{R(t)\}^{-1}U_1(t)\leq\lambda(1+\xi)/(1+\lambda(1-\xi)(2+r)),\quad \lambda>0,$$
$$\underline{\lim}\,\{R(t)\}^{-1}U_1(t)\geq\lambda(1-\xi)/(1+\lambda(1+\xi)(2+r)),\quad \lambda>0.$$

Отсюда, поскольку $\xi>0$ произвольное, находим, что для всех $\lambda>0$

$$\lim_{t\to\infty}\{R(t)\}^{-1}U_1(t)=\lambda/(1+\lambda(r+2)). \tag{60}$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{t\to\infty}\{R(t)\}^{-1}U_i(t)=0,\quad \lambda>0,\quad i=2,\ 3,\ 4. \tag{61}$$

Тогда из (57)—(61) сразу вытекает, что при $\lambda>0$

$$\lim_{t\to\infty}Q_t(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1+\lambda(2+r)}=\frac{r+1}{r+2}+\frac{1}{r+2}\,\frac{1}{1+\lambda}\cdot$$

Применяя к этому соотношению теорему непрерывности для преобразования Лапласа — Стильтеса (см. [2], стр. 408), получаем (9).

Предельное соотношение (10) доказывается вполне аналогично соотношениям (8) и (9). Действительно, из (46) по Лемме 3 нетрудно получить, что для всех $\lambda>0$, $0<x<1$, $\lim S_2(t)=0$ (аналог (47) и (58)). С другой стороны, непосредственно проверяется, что

$$\lim S_1(t)=\lim_{t\to\infty}R^{-1}(t)\int_0^{t-1}\frac{m\lambda\log^r(t-y)dy}{(t-y)(t^x+\lambda by)}=1-\frac{(r+1)x}{r+2},\quad 0<x<1,\quad \lambda>0,$$

где $S_1(t)$ определяется из (46) и (48) с $\tau(t)=t/\log^r t$ при $r\geq 0$ и $\tau(t)=t(1-\log^r t)$ при $-1<r<0$. Следовательно, $\lim Q_t(\lambda,\ x)=(r+1)x/(r+2)$, $0<x<1$, откуда по теореме о непрерывности сразу вытекает (10);

д) в этом случае $m(t)\backsim K/t\log t$, $C(t)=o(t^{-1})$ и в силу леммы 2, $\lim_{t\to\infty}P_0(t)=1$. Доказательство этого случая проводится вполне аналогично доказательству случая г), только вместо леммы 1.3°, леммы 1.5° (25) используются лемма 1.4°, лемма 1.5° и (27). Теорема 1 доказана.

5. Доказательство Теоремы 2. Отметим сначала, что в условиях теоремы, в силу леммы 2, $\lim_{t\to\infty}P_0(t)=1$. Кроме того, из условий теоремы следует, что для $\psi(t)$ существует обратная функция $N(t)=\psi^{-1}(t)$, такая, что $N(t)=o(t)$, $N(t)\to\infty$ и $m(N(t))=o(1/t\log t)$ при $t\to\infty$.

Пользуясь (23) и (31), получаем

$$R(t)=\int_0^t P_0(t-x)m(t-x)Q(x)dx \tag{62}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t P_0(t-x)\bar{c}\,(t-x\,;\ F(x\,;\ o))Q^2(x)dx=S_1(t)-\frac{1}{2}S_2(t).$$

Далее последовательно находим (см. также (28))

$$S_1(t)=\int_0^{t-N(t)}+\int_{t-N(t)}^{t}=S_{11}(t)+S_{12}(t),$$

$$0\leq S_{11}(t)\leq m(N(t))\int_0^{t-N(t)}Q(x)dx=o(t^{-1}),\quad t\to\infty,$$

$$S_{12}+(t)\leq Q(t-N(t))\int_0^{N(t)} m(x)P_0(x)dx \backsim K/bt, \quad t\to\infty,$$

$$S_{12}(t)\geq Q(t)\int_0^{N(t)} m(x)P_0(x)dx \backsim K/bt, \quad t\to\infty.$$

Следовательно,

$$S_1(t)\backsim K/bt, \quad t\to\infty, \tag{63}$$

где $0<K=\int_0^\infty m(x)\,P_0(x)dx<\infty$.

Поскольку $P_0(t)c(t)=o(t^{-1})$, то из (31) и (28), в силу Леммы 3 б), получаем

$$0\leq S_2(t)\leq\int_0^t c(t-x)Q(x)^2dx=o(t^{-1}), \quad t\to\infty. \tag{64}$$

Теперь из (62)—(64) вытекает, что $R(t)\backsim K/bt$, $t\to\infty$.

Из (38) немедленно следует, что $\lim_{t\to\infty}A(t)=K$. Для $B(t)$ получаем из (39)

$$B(t)=\int_0^t P_0(x)c(x)dx+2bt\int_0^t P_0(x)m(x)dx-2b\int_0^t xP_0(x)m(x)dx.$$

Поскольку $P_0(x)c(x)=o(x^{-1})$, то $\int_0^t P_0(x)c(x)dx=o\,(\log t)$, $t\to\infty$, а из $xP_0(x)c(x)=o(1)$ вытекает, что $\int_0^t xP_0(x)c(x)dx=o(t)$, $t\to\infty$. Таким образом находим, что $B(t)\backsim 2bt\int_0^t P_0(x)m(x)dx\backsim 2bKt$.

Рассмотрим теперь $Q_t(\lambda)=\mathsf{E}\{\exp(-\lambda Z(t)/bt)\,|\,Z(t)>0\}$. Из уравнения (22), ввиду (31), получаем

$$\begin{aligned} Q_t(\lambda)&=1-\{R(t)\}^{-1}\{1-\Phi(t;\ e^{-\lambda/bt})\} \\ &=1-\{R(t)^{-1}\{\int_0^t P_0(t-x)m(t-x)(1-F(x;\ e^{-\lambda/bt}))dx \\ &\quad-\frac{1}{2}\int_0^t P_0(t-x)\bar{c}\,(t-x;\ F(x;\ e^{-\lambda/bt}))(1-F(x;\ e^{-\lambda/bt}))^2dx\} \\ &=1-\{R(t)\}^{-1}\{S_1(t)-\frac{1}{2}S_2(t)\}. \end{aligned} \tag{65}$$

Сначала из (30), (31) и (64) для $S_2(t)$ находим, что

$$0\leq\{R(t)\}^{-1}S_2(t)\leq\{R(t)\}^{-1}\int_0^t c(t-x)Q(x)^2dx=o(1), \quad t\to\infty. \tag{66}$$

Далее имеем

$$S_1(t)=\int_0^{t-N(t)}+\int_{t-N(t)}^t=U_1(t)+U_2(t). \tag{67}$$

Для $U_1(t)$, в силу (30) и (28), находим, что

$$0\leq U_1(t)\leq\int_0^{t-N(t)} m(t-x)Q(x)dx\leq m(N(t))\int_0^t Q(x)dx=o(1/t),$$

т. е.

(68) $$\lim_{t\to\infty}\{R(t)\}^{-1}U_1(t)=0, \quad \lambda>0.$$

С другой стороны (см. (29) и (30)),

$$U_2(t)\leq(1-F(t-N(t);\ e^{-\lambda/bt}))\int_0^{N(t)}P_0(x)m(x)dx\backsim\frac{K\lambda}{(1+\lambda)bt},$$

$$U_2(t)\geq(1-F(t;\ e^{-\lambda/bt}))\int_0^{N(t)}P_0(x)m(x)dx\backsim\frac{K\lambda}{(1+\lambda)bt}.$$

Из последних двух соотношений и из того, что $R(t)\backsim K/bt$, немедленно следует, что

(69) $$\lim_{t\to\infty}\{R(t)\}^{-1}U_2(t)=\frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad \lambda>0.$$

Теперь из (65)—(69) вытекает, что $\lim Q_t(\lambda)=(1+\lambda)^{-1}$, $\lambda>0$, которое, в силу теоремы непрерывности для преобразований Лапласа — Стильтеса (см. [2], стр. 408), эквивалентно последнему утверждению теоремы. Таким образом теорема 2 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Бадалбаев, И. Рахимов. Критические ветвящиеся процессы с иммиграцией убывающей интенсивности. *Теория вероятн. и ее примен.*, **23**, 1978, 275—283.
2. W. Feller. An Introduction to Probability Theory and its Applications, 2. New York, 1966.
3. J. H. Foster. A Limit Theorem for a Branching Process with State-Dependent Immigration. *Ann. Math. Statist.*, **42**, 1971, 1773—1776.
4. W. V. Lovitt. Linear Integral Equation. New York, 1924.
5. K. V. Mitov, N. M. Yanev. Critical Galton — Watson Processes with Decreasing State-Dependent Immigration. *J. Appl. Probab.*, **21**, 1984, 22—39.
6. A. G. Pakes. A Branching Process with a State-Dependent Immigration Component. *Adv. Appl. Probab.*, **3**, 1971, 301—314.
7. Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. М., 1971.
8. В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М., 1950.
9. M. Yamazato. Some Results on Continuous Time Branching Processes with State-Dependent Immigration. *J. Math. Soc. Japan*, **27**, 1975, 479—496.
10. K. V. Mitov, N. M. Yanev. Critical Branching Processes with Decreasing State-Dependent Immigration. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **36**, 1983, 193—196.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 22. 12. 1982