Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ КЛАССАМ БЕСОВА ТИПА $B(p, \theta, \alpha)$

МУХАРЕМ БЕРИША

Даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы четная функция с монотонными коэффициентами Фурье принадлежала классу Бесова.

Введение. В работе [I] в терминах коэффициентов Фурье выясняются необходимые и достаточные условия для принадлежности четных функций с монотонными коэффициентами Фурье классам типа Никольского и Бесова.

В этой работе также выясняются необходимые и достаточные условия, при которых функция $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, где $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \cdots \geqq a_k \geqq a_{k+1} \geqq \cdots \geqq 0$, т. е. $a_k \downarrow 0$, будет принадлежать классу типа Бесова — $B(p, \theta, \alpha)$. Но в данном случае функция $\alpha(t)$ удовлетворяет условию $\int_0^\delta \alpha(t)\, t^\sigma dt \leqq A\delta^\sigma \int_\delta^{2\delta} \alpha(t) dt$ для всех $\delta \in (0, \delta_0)$.

Отметим, что в этой работе доказательства этих теорем различаются от доказательства теорем в [1], потому что в работе [1] доказательство проводится с помощью модуля гладкости, а в этой работе — с помощью наилучших приближений функций $f(x)$ в метрике L_p посредством тригонометрических полиномов.

1. Будем считать, что $f(x) \in L_p$, если $f(x)$ есть 2π-периодическая функция, которая:

1) при $1 \leqq p < \infty$ измерима и

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty;$$

2) при $p = \infty$ непрерывна и $\|f\|_\infty = \|f\|_C = \max_x |f(x)|$.

Будем говорить, что некоторая функция $\alpha(t)$ есть функция типа σ, если она измерима на $[0, 1]$, суммируема на $[\delta, 1]$ для любого $\delta \in (0, 1)$ и если существуют действительные числа $\alpha, \delta > 0$ и число $\delta_0 \in (0, 1)$, такие, что:

1) $\alpha(t) \geqq C$ для всех $t \in [0, 1]$;

2) $\int_0^\delta \alpha(t)\, t^s dt < \infty$ для всех $s > \sigma$ и $\delta \in (0, \delta_0)$:

3) $\int_0^\delta \alpha(t)\, t^s dt = \infty$ для всех $s < \sigma$ и $\delta \in (0, \delta_0)$, и $\int_0^\delta \alpha(t)\, t^\sigma dt \leqq A\delta^\sigma \int_\delta^{2\delta} \alpha(t)\, dt$.

Будем говорить, что $f(x) \in B(p, \theta, \alpha)$, если:

1) $f(x) \in L_p$ для некоторого p из промежутка $1 \leqq p \leqq \infty$;

2) θ — некоторое число из промежутка $0 < \theta < \infty$;

3) $\alpha(t)$ — функция типа σ;

4) $\int_0^1 \alpha(t)\, \omega_k^\theta(f, t)_p < \infty$,

где k — некоторое натуральное число, удовлетворяющее условию $k > \sigma/\theta$. Условие $k > \sigma/\theta$ гарантирует, что класс $B(p, \theta, \alpha)$ состоит не только из констант (см. [2]).

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 11, 1985, с. 79—85.

Через $E_n(f)_p$ обозначим наилучшее приближение функций $f(x)$ в метрике L_p при помощи тригонометрических полиномов порядка не выше, чем $n-1$, т. е. $E_n(f)_p = \inf \|f(x) - T_{n-1}(x)\|_p$, где $T_{n-1}(x) = \Sigma_{k=0}^{n-1}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$, α_k и β_k — действительные числа.

Ряд Фурье функций $f(x)$ обычно будем записывать в форме

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x,$$

где a_k — монотонные коэффициенты, т. е. $a_k \downarrow 0$.

Частную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ будем обозначать $S_n(x, f)$, т. е.

$$S_n(x, f) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cos \gamma x, \ a_\nu \downarrow 0.$$

Через $\omega_k(f, t)_p$ обозначим модуль гладкости в метрике L_p порядка k функции $f(x)$, т. е.

$$\omega_k(f, t)_p = \sup \|\Delta_h^k f(x)\|_p, \text{ где } \Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x + \nu h).$$

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся следующие леммы. В этих леммах все ряды сходятся.

Лемма 1. *Пусть* $f(x) \in L_p$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \theta < \infty$, $\alpha(t)$ — *функция типа* σ, *тогда для любого натурального числа* k, *удовлетворяющего условию* $k > \sigma/\theta$, *справедливы неравенства*

$$\int_0^1 \alpha(t)\, \omega_k^\theta(f, t)_p dt \leq A_1 \{E_0^\theta(f)_p + E_1^\theta(f)_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) E_{2^\nu}^\theta(f)_p\},$$

$$\int_0^1 \alpha(t)\, \omega_k^\theta(f, t)_p dt \geq A_2 \{E_0^\theta(f)_p + E_1^\theta(f)_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) E_{2^\nu}^\theta(f)_p\},$$

где A_1 *и* A_2 *не зависят от* $f(x)$ *и* n.

Доказательство леммы 1 содержится в работе [2].

Лемма 2. *Пусть числа* α, β *и* a_ν, *таковы, что* $0 < \alpha < \beta < \infty$, $a_\nu \geq 0$; *тогда справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\beta\right)^{1/\beta} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\alpha\right)^{1/\alpha}.$$

Доказательство леммы 2 содержится в [3, т. 19, стр. 43].

Лемма 3. *Пусть числа* a_ν, b_ν *и* γ_n таковы, что $a_\nu \geq 0$, $b_\nu \geq 0$ *и* $\Sigma_{\nu=1}^n a_\nu = a_n \gamma_n$; *тогда*:

1. для p из промежутка $0 < p \leq 1$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} b_\mu\right)^p \geq p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \gamma_\nu)^p.$$

2. *для* p *из промежутка* $1 \leq p < \infty$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} b_\mu\right)^p \leq p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \gamma_\nu)^p.$$

Доказательство леммы для $1\leqq p<\infty$ содержится в работе [4]; для $0<p\leqq 1$ доказательство аналогично.

Лемма 4. *Пусть числа a_ν, b_ν и β_ν таковы, что*

$$a_\nu\geqq 0,\ b_\nu\geqq 0 \text{ и } \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu=a_n\beta_n; \text{ тогда}$$

1) *для p из промежутка $0<p\leqq 1$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\Big(\sum_{\mu=1}^{\nu} b_\mu\Big)^p\geqq p^p\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(b_\nu\beta_\nu)^p.$$

2) *для p из промежутка $1\leqq p<\infty$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\Big(\sum_{\mu=1}^{\nu} b_\mu\Big)^p\leqq p^p\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(b_\nu\beta_\nu)^p.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3: заметим, что для $1\leqq p<\infty$ она содержится в работе [5].

Лемма 5. *Пусть $f(x)\in L_p$ для некоторого p из промежутка $1<p<\infty$ и пусть $f(x)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\cos\nu x$, где $a_\nu\downarrow 0$; тогда справедливо*

$$E_n(f)_p\geqq A_3\Big(\sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu^p\,\nu^{p-2}\Big)^{1/p},$$

где положительная константа A_3 не зависит от $f(x)$ и n.

Доказательство леммы 5 содержится в работе [6].

Лемма 6. *Пусть $f(x)\in L_p$ и $A(\nu)=\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\alpha(t)dt$; тогда справедливы неравенства*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)E_\nu^\theta(f)_p\geqq A_4\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(\nu)E_{2^\nu}^\theta(f)_p,$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)E_\nu^\theta(f)_p\leqq A_5\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(\nu)E_{2^\nu}^\theta(f)_p.$$

Доказательство леммы 6 содержится в работе [7].

2. Теорема 1. *Для того, чтобы периодическая функция*

$$f(x)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\cos\nu x,\ a_\nu\downarrow 0,$$

принадлежала классу $B(p,\theta,\alpha)$ при $1<p<\infty$ и $0<\theta<\infty$, достаточно, чтобы ее коэффициенты Фурье удовлетворяли следующим условиям:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta\,\nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}\,b(\nu)<\infty; \tag{1}$$

для $\theta\leqq p$;

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta\,\nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}\,b(\nu)\Big\{\frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)}\Big\}^{\frac{\theta}{p}-1}<\infty; \tag{2}$$

для $\theta\geqq p$,

где $A(\nu)=\int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu}\alpha(t)dt$, $b(\nu)=\int_{1/(\nu+1)}^{1}\alpha(t)dt$; $k\theta>\sigma$ и k — натуральное число.

Доказательство. Сначала докажем, что из условий теоремы следует $f(x)\in L_p$, т. е. (см., например, [8]) $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}<\infty$. Если $\theta\leq p$, следует $b(\nu) \geq \int_{1/2}^1 \alpha(t)dt > A_6/2$ и тогда из (1) имеем $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}<\infty$.

Если $\theta-\theta/p-1\leq 0$, тогда $a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}\downarrow 0$, где $a_\nu\downarrow 0$, или $\nu a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}=0(1)$, т. е. $a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}}=o(1)$.

Если $\theta-\theta/p-1>0$, тогда из $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}<\infty$ и $a_\nu\downarrow 0$ следует

$$a_n^\theta \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}=O(1),$$

откуда имеем $a_n^\theta n^{\theta-\frac{\theta}{p}}=O(1)$. Таким образом

$$a_\nu \nu^{p-2}=(a_\nu \nu^{1-\frac{1}{p}})^{p-\theta}\, a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}=O(1)\,.\,a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1},$$

т. е. $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}<\infty$.

Теперь предположим, что $\theta>p$:

$$a_\nu^p \nu^{p-2}=a_\nu^p \nu^{p(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta})}\,.\,b(\nu)^{\frac{p}{\theta}}\left[\frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)}\right]^{\frac{\theta-p}{\theta}} \nu^{\frac{\theta-p}{\theta}}\, b(\nu)^{-p/\theta}\left[\frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)}\right]^{-\frac{\theta-p}{\theta}},$$

и применяя неравенство Гельдера для $\theta/p>0$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}\leq\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu)\left[\frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)}\right]^{\frac{\theta-p}{p}}\Big)^{\frac{p}{\theta}}\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1}\, b(\nu)^{-\frac{p}{\theta-p}}\left[\frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)}\right]^{-1}\Big)^{\frac{\theta-p}{\theta}}$$

$$\leq\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu)\left[\frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)}\right]^{\frac{\theta-p}{p}}\Big)^{\theta/p}\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) b(\nu)^{-\frac{\theta}{\theta-p}}\Big)^{\frac{\theta-p}{\theta}},$$

и из [2] следует $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}<\infty$ при $\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) b(\nu)^{-\frac{\theta}{\theta-p}}<\infty$.

Докажем, что $\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\, b(\nu)^{-\frac{\theta}{\theta-p}}<\infty$. Если $\int_0^1 \alpha(t)dt<\infty$, тогда $\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) = \int_0^1 \alpha(t)dt<\infty$, откуда $\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) b(\nu)^{-\frac{\theta}{\theta-p}}<\infty$, потому что $b(\nu)\geq\int_{1/2}^1 \alpha(t)\,dt> A_6/2$.

Если $\int_0^1 \alpha(t)dt=\infty$, тогда $\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)=\infty$, откуда $B(\nu)=\sum_{i=1}^{\nu} A(i)\uparrow\infty$. Теперь $b(\nu)=\int_{1/(\nu+1)}^1 \alpha(t)dt=\sum_{i=1}^{\nu} A(i)$. Значит

$$\sum_{\nu=1}^{n} A(\nu) b(\nu)^{-\frac{\theta}{\theta-p}}\leq\sum_{\nu=1}^{n}[B(\nu)-B(\nu-1)]\,.\,B(\nu)^{-\frac{\theta}{\theta-p}},$$

где $B(0)=0$. Знаем, что $B(\nu)\uparrow\infty$ и

$$\sum_{\nu=1}^{n}[B(\nu)-B(\nu-1)]\,.\,B(\nu)^{-\frac{\theta}{\theta-p}}\leq B(1)^{-\frac{\theta}{\theta-p}}+\int_{B(1)}^{n} x^{-\frac{\theta}{\theta-p}}dx,$$

поэтому из $\theta/(\theta-p)>1$ следует, что $\sum_{\nu=1}^{\infty}[B(\nu)-B(\nu-1)]\,.\,B(\nu)^{-\frac{\theta}{\theta-p}}<\infty$. Значит и в этом случае $\sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu)\, b(\nu)^{-\frac{\theta}{\theta-p}}<\infty$.

Примененяя лемму 1, затем лемму 2 и делая простые выкладки, получим

$$I=\int_0^1 \alpha(t)\omega_k^\theta(f,t)_p dt \leqq A_7\{E_0^\theta(f)_p+\sum_{\nu=2}^{\infty}\mu(\nu)E_{2^\nu}^\theta(f)_p\}=A_7\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\mu(\nu+2)E_{2^{\nu+2}}^\theta(f)_p$$

$$+E_0^\theta(f)_p\}\leqq A_8\{\sum_{m=0}^{\infty}\mu(m+2)E_{2^{m+2}}^\theta(f)_p+\|f\|_p^\theta\}$$

$$\leqq A_9\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\nu=2^m}^{2^{m+1}}A(\nu)E_{2\nu}^\theta(f)_p+\|f\|_p^\theta\}=A_9\{\sum_{\nu=1}^{\infty}A(\nu)E_{2\nu}^\theta(f)_p+\|f\|_p^\theta\}$$

$$\leqq A_{10}\{\sum_{\nu=1}^{\infty}A(\nu)(\sum_{n=\nu}^{\infty}a_n^p n^{p-2})^{\theta/p}+\|f\|_p^\theta\}.$$

Так как $\|f\|_p\leqq A_{11}(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p n^{p-2})^{1/p}$, то имеем

$$I=\int_0^1\alpha(t)\omega_k^\theta(f,t)_p dt\leqq A_{12}\sum_{\nu=1}^{\infty}A(\nu)(\sum_{n=\theta}^{\infty}a_n^p n^{p-2})^{\theta/p}, \tag{3}$$

но применяя лемму 6, получаем

$$I\leqq A_{13}\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(\nu)E_{2^\nu}^\theta(f)_p\leqq A_{14}\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(\nu)(\sum_{n=2^\nu}^{\infty}a_n^p n^{p-2})^{\theta/p}.$$

Так как

$$\sum_{n=2^\nu}^{\infty}a_n^p n^{p-2}=\sum_{m=\nu}^{\infty}\sum_{n=2^m}^{2^{m+1}-1}a_n^p n^{p-2}\leqq\sum_{m=\nu}^{\infty}a_{2^m}^p 2^{m(p-1)},$$

то

$$I\leqq A_{15}\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(\nu)(\sum_{m=\nu}^{\infty}a_{2^m}^p 2^{m(p-1)})^{\theta/p}.$$

1) Если $\theta\leqq p$, применяя лемму 2, из последнего неравенства следует

$$I\leqq A_{15}\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu(\nu)\sum_{m=\nu}^{\infty}a_{2^m}^\theta 2^{m(p-1)\theta/p}=A_{15}\sum_{m=1}^{\infty}a_{2^m}^\theta 2^{m(p-1)\theta/p}\sum_{\nu=1}^{m}\mu(\nu)$$

$$\leqq A_{15}\sum_{m=1}^{\infty}a_{2^m}^\theta 2^{m(\theta-\theta/p)}\int_{1/2^m}^1\alpha(t)dt\leqq A_{15}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\nu=2^{m-1}}^{2^m}a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}\int_{1/\nu}^1\alpha(t)dt,$$

т. е.

$$I\leqq\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1}b(\nu). \tag{4}$$

2) Если $\theta\geqq p$, применяя лемму 3, из (3) следует

$$I\leqq A_{16}\sum_{\nu=1}^{\infty}A(\nu)[a_\nu^p \nu^{p-2}\gamma(\nu)]^{\theta/p},$$

где $b(n)=\sum_{\nu=1}^{n}A(\nu)=A(n)\gamma(n)$, т. е.

$$I \leqq A_{16} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu) \{\frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)}\}^{\frac{\theta}{p}-1}. \tag{5}$$

Из справедливости неравенств (4) и (5) следует справедливость теоремы 1.

Теорема 2. *Если периодическая функция* $f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$; $a_\nu \downarrow 0$. *принадлежит классу* $B(p, \theta, \alpha)$ *при* $1<p<\infty$ *и* $0<\theta<\infty$, *то ее коэффициенты Фурье удовлетворяют следующим условиям:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu) \{\frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)}\}^{\frac{\theta}{p}-1} < \infty,$$

для $\theta \leqq p$;

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu) < \infty.$$

для $\theta \geqq p$.

Доказательство. Знаем, что

$$I = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t) \omega_k^\theta(f, t)_p dt \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_k^\theta(f, \frac{1}{\nu+1})_p \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \alpha(t) dt$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_k^\theta(f, \frac{1}{\nu+1})_p A(\nu) \geqq C_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) \omega_k^\theta(f, \frac{1}{[\frac{\nu}{2}]+1})_p \geqq C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) E^\theta_{[\nu/2]+1}(f)_p.$$

На основании леммы 5 следует, что

$$I \geqq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) (\sum_{n=\nu}^{\infty} a_n^p n^{p-2})^{\theta/p}.$$

1. Если $\theta \leqq p$, применяя лемму 3, из последнего неравенства следует $I \geqq C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} A(\nu) [a_\nu^p \nu^{p-2} \gamma(\nu)]^{\theta/p}$, т. е.

$$I \geqq C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu) \{\frac{b(\nu)}{\nu A(\nu)}\}^{\frac{\theta}{p}-1}. \tag{6}$$

2. Если $\theta \geqq p$, применяя лемму 1, получаем

$$I \geqq C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) E^\theta_{2^\nu}(f)_p \geqq C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) (\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_{2^n}^p 2^{n(p-1)})^{\theta/p},$$

а на основании леммы 2 имеем $I \geqq C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(\nu) \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_{2^n}^\theta 2^{n(p-1)\theta/p}$. Меняя порядок суммирования, имеем

$$I \geqq C_6 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2^n}^\theta 2^{n(\theta-\theta/p)} \int_{1/2^n}^{1} \alpha(t) dt \geqq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{n-1}}^{2^n} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} \int_{1/\nu}^{1} \alpha(t) dt,$$

т. е.

$$I \geqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\theta n^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(n). \tag{7}$$

Из справедливости неравенств (6) и (7) следует справедливость теоремы 2, Из теоремы 1 и 2 вытекает

Теорема 3. *Если функция* $\alpha(t)$ *удовлетворяет условию* $B_1 \leqq b(\nu)/\nu A(\nu) \leqq B_2$, *то тогда, для того чтобы периодическая функция* $f(x) \sim \Sigma_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$, $a_\nu \downarrow 0$, *принадлежала классу* $B(p, \theta, \alpha)$ *при* $1<p<\infty$ *и* $0<\theta<\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты Фурье удовлетворяли следующему условию:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{\theta-\frac{\theta}{p}-1} b(\nu) < \infty.$$

Если в определении класса $B(p, \theta, \alpha)$ взять $\alpha(t) = t^{-r\theta-1}$ и $k>r$, то получим класс Бесова $B_{p\theta}^r$. Тогда из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Для того, чтобы функция* $f(x) \sim \Sigma_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$, $a_\nu \downarrow 0$, *принадлежала классу* $B_{p\theta}^r$ *при* $1<p<\infty$ и $0<\theta<\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы ее коэффициенты Фурье удовлетворяли следующему условию:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{r\theta+\theta-\frac{\theta}{p}-1} < \infty.$$

Доказательство этого утверждения содержится в работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Бериша. О коэффициентах Фурье некоторых классов функций. *Glasnik matematički*, **16**, 1981, 75—90.
2. М. К. Потапов. О вложении и совпадении некоторых классов функций. *Изв. АН СССР*, № 4, 1969, 840—860.
3. Г. Б. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. М., 1948.
4. М. К. Потапов. Об одной теореме вложения. *Mathematica (Cluj)*, **14**, 1972, 123—146.
5. L. Leindler Über verschiedene Konvergenzarten trigonometricher Reihen III (Bedingungen in der Metric von L_p). *Acta Scient. Math.*, **27**, 1966, 205—215.
6. А. А. Конюнков. Наилучшие приближения при преобразовании коэффициентов Фурье методом средних арифметических и о рядах Фурье с неотрицательными коэффициентами. *Сиб. матем. ж.*, № 1, 1962, 56—58.
7. М. Ч. Бериша. О коэффициентах Фурье периодических функций, принадлежащих $B(p, \theta, \alpha)$-классам. *Math. Balkanica*, 1982 (в печати).
8. A. Zygmund. Trigonometrical series. New York, 1952.
9. М. К. Потапов, М. Бериша. Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного. *Publ. Inst. Math.*, **26** (40), 1979.

Universiteti i Kosovës
Fakulteti i Shkencave matematike natyrore
Marshali Tito p. n.
38000 Prishtinë
Jugoslavija

Поступила 21. 11. 1983