Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or
institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or
licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ЛИНЕЙНОЕ МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ

РОСИЦА Д. ДОДУНЕКОВА

В работе исследуется вопрос об оценивании неизвестного параметра случайного процесса в условиях неполных данных. Оценивание проводится в классе линейных оценок определенного вида. Подход минимаксный. В качестве меры близости между оценкой и оцениваемой величиной используется среднеквадратическое уклонение.

Рассмотрим двумерный случайный процесс (ξ_t, η_t), $0 \leqq t \leqq T$, со стохастическим дифференциалом

$$
(1) \qquad \begin{aligned} d\xi_t &= (\lambda + g(t)\,t)dt + \varepsilon dW_t, \\ d\eta_t &= \xi_t dt + d\widetilde{W}_t, \end{aligned}
$$

где λ — неизвестный реальный параметр, W_t, $\widetilde{W}_t$ — независимые стандартные винеровские процессы и $\varepsilon \geqq 0$ — заданная константа. Функция $g(t)$ неизвестна и принадлежит классу функций, измеримых на $[0, T]$ и таких, что $|g(t)| \leqq C$, где C — известная константа. Пусть наблюдению доступен только процесс η_t и по его реализациям на $[0, T]$ требуется оценить неизвестный параметр λ. Мы будем искать минимаксную оценку для λ в классе M линейных оценок вида $\lambda_T(\eta) = \int_0^T l(t) d\eta_t$, где весовая функция $l(t)$, зависящая, может быть, и от T, принадлежит классу $L_2[0, T]$.

Определение. *Оценка $\lambda_T^*(\eta)$ из M называется минимаксной в этом классе для параметра λ, если*

$$
\sup_{\lambda,\ |g(t)| \leqq C} \mathsf{E}|\lambda_T^*(\eta) - \lambda|^2 = \inf_{\lambda_T(\eta) \in M} \ \sup_{\lambda,\ |g(t)| \leqq C} \mathsf{E}|\lambda_T(\eta) - \lambda|^2.
$$

Мы рассмотрим отдельно случай $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon > 0$. Для первого случая основной результат содержится в теореме 5, утверждающей, что линейная минимаксная оценка для параметра λ существует и единственна. Приводится точный вид ее весовой функции. Оценка имеет гауссовское распределение. Вычислена ее дисперсия, а также и максимальное уклонение

$$
\sup_{\lambda,\ |g(t)| \leqq C} \mathsf{E}|\lambda_T^*(\eta) - \lambda|^2.
$$

Если $g(t) \equiv 0$, оценка $\lambda^*_T(\eta)$ оказывается несмещенной. Если $T \geqq T_1 = (C^2/6)^{-1/3}$ весовая функция линейной минимаксной оценки от T не зависит и сосредоточена на интервале $[0, T_1]$. При этом для любого $T > 0$

$$
\sup_{\lambda,\ |g(t)| \leqq C} \mathsf{E}|\lambda_{T_1}^*(\eta) - \lambda|^2 \leqq \sup_{\lambda,\ |g(t)| \leqq C} \mathsf{E}|\lambda_T^*(\eta) - \lambda|^2,
$$

что свидетельствует о том, что оптимально вести наблюдения до момента T_1. Для второго случая — $\varepsilon > 0$, основной результат содержится в теореме 8 и

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 11, 1985, с. 97—111.

состоит в том, что линейная минимаксная оценка для параметра λ существует и единственна. Приводится вид весовой функции этой оценки.

Задачи, близкие к нашей постановке, в которых оценивание неизвестных параметров производится по принципу минимакса, рассмотрены в статьях [1; 2; 4]. Отметим, что результаты настоящей работы анонсированы в [5] без доказательств.

Очевидно, имеет смысл рассматривать только те линейные оценки, для которых выполнено условие

$$(*)\qquad \sup_{\lambda,\ |g(t)|\leqq C} \mathsf{E}\,|\lambda_T(\eta)-\lambda|^2<\infty .$$

Пусть $\varepsilon=0$ и $\lambda_T(\eta)$ — линейная оценка, удовлетворяющая $(*)$. Если $l(t)$ — ее весовая функция, то

$$\mathsf{E}\,|\lambda_T(\eta)-\lambda|^2=\lambda^2\Big(\int_0^T l(t)\,t\,dt-1\Big)^2+\Big(\int_0^T l(t)\int_0^t g(s)\,s\,ds\,dt\Big)^2$$

$$+\int_0^T l^2(t)dt+2\lambda\Big(\int_0^T l(t)\,t\,dt-1\Big)\int_0^T l(t)\int_0^t g(s)\,s\,ds\,dt.$$

Из условия $(*)$ следует, что функция $l(t)$ удовлетворяет условию

$$(**)\qquad \int_0^T l(t)\,t\,dt=1.$$

Учитывая равенство $\int_0^T l(t)\int_0^t g(s)\,s\,ds\,dt=\int_0^T g(t)\,t\int_t^T l(s)\,ds\,dt$, имеем

$$\mathsf{E}\,|\lambda_T(\eta)-\lambda|^2\leqq\Big(\int_0^T |g(t)|\,|t|\,\Big|\int_t^T l(s)\,ds\Big|\,dt\Big)^2+\int_0^T l^2(t)\,dt.$$

Для функции $\tilde g(t)=|g(t)|\operatorname{sign}\int_t^T l(s)ds$ в неравенстве достигается равенство Тогда

$$\sup_{\lambda,\ |g(t)|\leqq C}\mathsf{E}\,|\lambda_T(\eta)-\lambda|^2=\sup_{|g(t)|\leqq C}\Big(\int_0^T |g(t)|\,t\,\Big|\int_t^T l(s)ds\Big|\,dt\Big)^2+\int_0^T l^2(t)dt$$

$$=C^2\Big(\int_0^T t\,\Big|\int_t^T l(s)ds\Big|\,dt^2\Big)+\int_0^T l^2(t)\,dt.$$

Так как линейная минимаксная оценка должна доставлять inf левой части в первом равенстве, то ее весовая функция должна являться решением вариационной задачи

$$(2)\qquad \begin{gathered} C^2\Big(\int_0^T t\,\Big|\int_t^T l(s)ds\Big|\,dt\Big)^2+\int_0^T l^2(t)\,dt\to\inf,\\ \int_0^T l(t)\,t\,dt=1\,;\ l\in L_2\,[0,T]. \end{gathered}$$

Лемма 1. *Если функция* $l^*(t)$ — *решение задачи* (2), *то*

$$(3)\qquad \int_t^T l^*(s)ds\geqq 0,\ \ 0\leqq t\leqq T.$$

Доказательство. Допустим противное: $\mu\{t \in [0, T] : \int_t^T l^*(s)ds < 0\} > 0$ (μ — мера Лебега). Из первого ограничения в (2) имеем

$$1 = \int_0^T l^*(t)\, t dt = \int_0^T \int_t^T l^*\, ds\, dt.$$

Положим $\beta = \int_0^T |\int_t^T l^*(s)ds|\, dt$. Согласно предположению, $\beta > 1$. Рассмотрим функцию $\tilde{l}(t) = (1/\beta)\operatorname{sign}(\int_t^T l^*(s)ds)\, l^*(t)$. Эта функция допустима для задачи (2), т. е. удовлетворяет ее ограничениям, так как $\tilde{l} \in L_2[0, T]$ и

$$\int_0^T \tilde{l}(t)\, t dt = -(1/\beta)\int_0^T t(|\int_t^T l^*(s)ds|)'_t dt = 1.$$

Кроме того, функция $\tilde{l}(t)$ удовлетворяет и условию (3)

$$\int_t^T \tilde{l}(s)ds = (1/\beta)\,|\int_t^T l^*(s)ds| \geqq 0.$$

Учитывая свойство (3), легко показать, что $\tilde{l}(t)$ доставляет минимизируемому функционалу в (2) меньшее значение, чем функция $l^*(t)$, что противоречит тому, что последняя является решением задачи (2).

Следствие 1. *Если функция $l^*(t)$ — решение задачи* (2), *то для любого $t^* \in [0, T]$ выполняется* $\int_{t^*}^T t l^*(t)dt \geqq 0$, $\int_{t^*}^T t^2 l^*(t)dt \geqq 0$.

Доказательство. Из леммы 1 $\int_t^T l^*(s)ds \geqq 0$, $0 \leqq t \leqq T$. Интегрируем в пределах от t^* до T и берем интеграл по частям. Получим $\int_{t^*}^T t l^*(t)dt \geqq t^* \int_{t^*}^T l^*(t)\, dt \geqq 0$. Для доказательства второго неравенства интегрируем функцию $\int_t^T s l^*(s)ds$ в пределах от t^* до T.

(Заметим, что все рассматриваемые нами интегралы — это интегралы Лебега по мере μ. Интегрирование по частям производится на том основании, что работаем с абсолютно непрерывными функциями).

Следствие 2. *Если функция $l^*(t)$ — решение задачи* (2), *то она является решением и задачи*

$$C^2\Big(\int_0^T t \int_t^T l(s)ds\, dt\Big)^2 + \int_0^T l^2(t)\, dt \to \inf,$$
$$\int_0^T l(t)\, t dt = 1\,;\quad \int_t^T l(s)\, ds \geqq 0,\ 0 \leqq t \leqq T\,;\ l \in L_2[0, T]. \tag{4}$$

Дальше мы расширим класс допустимых функций для задачи (4), заменив условие $\int_t^T l(s)ds \geqq 0$, $0 \leqq t \leqq T$ более общим (согласно следствию 1 к лемме 1) условием $\int_t^T s l(s)\, ds \geqq 0$, $0 \leqq t \leqq T$. Вместе с равенством $\int_0^T t \int_t^T l(s)\, ds\, dt = (1/2)\int_0^T t^2 l(t)dt$ это приводит к задаче

$$(C^2/4)\Big(\int_0^T t^2 l(t)dt\Big)^2 + \int_0^T l^2(t)dt \to \inf,$$
$$\int_0^T t l(t)dt = 1\,;\quad \int_t^T s l(s)ds \geqq 0,\ 0 \leqq t \leqq T\,;\ l \in L_2[0, T]. \tag{5}$$

Лемма 2. *Если функция $l^*(t)$ — решение задачи* (5), *то* $\int_0^t t^2 l^*(t)dt > 0$.

Доказательство. Если лемма не верна, то из следствия 1 к лемме 1 имеем $\int_0^T t^2 l^*(t)\,dt = 0$. Из равенства

$$\int_0^T t^2 l^*(t)\,dt = \int_0^T \int_t^T sl^*(s)\,ds\,dt$$

следует, что для любого $t \in [0, T]$, $\int_t^T sl^*(s)\,ds = 0$, откуда $l^*(t) = 0$ (μ. п. в.)

Лемма 3. *Пусть функция $l^*(t)$ — решение задачи* (5). *Тогда выполняется* $\mu\{t \in [0, T] : l^*(t) < 0\} = 0$.

Доказательство. Проведем его, исходя из противного. Сделаем основное предположение: $\mu\{t \in [0, T] : l^*(t) < 0\} > 0$. Функция переменного t $\int_0^t sl^*(s)ds$ непрерывна на $[0, T]$ и дифференцируема почти везде. Тогда существует точка $t_0 \neq 0$, $t_0 \neq T$, такая, что $l^*(t_0) < 0$, и в этой точке рассматриваемый интеграл дифференцируем; при этом его производная равна $t_0 l^*(t_0) < 0$. Следовательно, в некоторой правой окрестности точки t_0, пусть это будет $(t_0, t_0 + \Delta)$, выполнено $\int_{t_0}^t sl^*(s)ds < 0$. Так как

$$\int_{t_0}^T sl^*(s)\,ds \geqq 0,$$

то существует точка $\tilde{t}_0 \in [t_0 + \Delta, T]$, такая, что $\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} sl^*(s)ds = 0$. Будем считать что $\tilde{t}_0$ — самая близкая такая точка к точке t_0. Тогда

$$\int_{t_0}^t sl^*(s)ds < 0, \quad \int_t^{\tilde{t}_0} sl^*(s)ds > 0, \quad t_0 < t < \tilde{t}_0.$$

Интегрируя второе неравенство по $t \in (t_0, \tilde{t}_0)$, получим $\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} t^2 l^*(t)\,dt > 0$. Итак, нашлись точки t_0, $\tilde{t}_0$, $t_0 < \tilde{t}_0$ такие, что

$$\int_{t_0}^{\tilde{t}_0} tl^*(t)\,dt = 0; \quad \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} t^2 l^*(t)\,dt > 0. \tag{6}$$

Обсудим теперь вопрос о знаке интеграла $\int_0^{t_0} t^2 l^*(t)dt$. Пусть интеграл неотрицателен. Введем функцию

$$l^{**}(t) = \begin{cases} l^*(t) & t \notin (t_0, \tilde{t}_0), \\ 0 & t \in (t_0, \tilde{t}_0). \end{cases}$$

Легко проверяется, что эта функция допустима для задачи (5). Обозначим через J минимизируемый функционал в (5). Из (6) и следствия 1 леммы 1 получаем $J(l^{**}) < J(l^*)$, что противоречит тому, что $l^*(t)$ — решение задачи (5). Следовательно, если основное предположение верно, то верно и следующее утверждение:

Предложение А. *Если для некоторого t из $[0, T]$ функция $l^*(t) < 0$ и функция $\int_0^u sl^*(s)ds$ переменного $u \in [0, T]$ дифференцируема в точке t, то $\int_0^t s^2 l^*(s)ds < 0$. Мера множества всех $t \in [0, T]$, для которых это неравенство выполнено, положительна.*

Пользуясь предложением А, докажем

Предложение Б. *Если для некоторого* $t \in [0, T]$ *выполнено* $\int_0^t s^2 l^*(s)ds > 0$, *то имеется окрестность точки* t, *в которой* $l^*(s) \geqq 0$ (μ. п. в.). *Если неравенство выполнено на некотором интервале* Δ, *то на этом интервале выполнено также* $l^*(s) \geqq 0$ (μ. п. в.).

Доказательство. Допустим, что в любой окрестности $V(t)$ точки t имеется множество положительной меры, на котором $l^*(s) < 0$. Тогда мы найдем в этом множестве точку $t_0(V)$, в которой функция $\int_0^u sl^*(s)ds$ дифференцируема. Согласно предложению А, должно выполняться $\int_0^{t_0(V)} s^2 l^*(s)ds < 0$ Сужая окрестности $V(t)$ и находя соответственные точки $t_0(V)$, приходим. к неравенству $\int_0^t s^2 l^*(s)ds \leqq 0$, что противоречит условию предложения. Дальше: выберем для любой точки из интервала Δ окрестность, в которой функция $l^*(t)$ почти везде неотрицательна. Эти окрестности покрывают Δ. Беря конечное покрытие, приходим к выводу, что $l^*(t) \geqq 0$ (μ. п. в,) на интервале Δ.

Обозначим теперь через $\bar{t}$, $\bar{t} \in (0, T)$ ту ближайшую к T точку, для которой

$$\int_0^{\bar{t}} s^2 l^*(s)ds = 0, \quad \int_0^t s^2 l^*(s)ds > 0, \ t \in (\bar{t}, T].$$

Такая точка существует, что следует из предложения А и леммы 2. (Напомним, что предполагается выполненным основное предположение).

Предложение В. *Для* $0 < t \leqq \bar{t}$ *верно неравенство* $\int_0^t s^2 l^*(s)ds \leqq 0$.

Доказательство. Пусть предложение неверно и существует точка $\tilde{t} \in (0, \bar{t})$, для которой $\int_0^{\tilde{t}} s^2 l^*(s)ds > 0$. Так как $\int_0^t s^2 l^*(s)ds$ является непрерывной функцией по $t \in [0, \bar{t}]$ и при $t = 0$, $t = \bar{t}$ эта функция принимает значение нуль, то справа и слева от точки $\tilde{t}$ существуют хотя бы по одному нулю этой функции. Выберем ближайшие нули слева и справа; пусть это точки $\tilde{t} - \Delta_1$, $\tilde{t} + \Delta_2$. Для $t \in (\tilde{t} - \Delta_1, \tilde{t} + \Delta_2)$ выполняется $\int_0^t s^2 l^*(s)ds > 0$. Согласно предложению Б, $l^*(t) \geqq 0$ (μ. п. в.) на $(\tilde{t} - \Delta_1, \tilde{t} + \Delta_2)$. Но $\int_{\tilde{t}-\Delta_1}^{\tilde{t}+\Delta_2} s^2 l^*(s)ds = 0$ и тогда $l^*(t) = 0$ почти везде на $(\tilde{t} - \Delta_1, \tilde{t} + \Delta_2)$. Отсюда

$$\int_0^{\tilde{t}} s^2 l^*(s)ds = \int_0^{\tilde{t}-\Delta_1} s^2 l^*(s)ds = 0,$$

что противоречит выбору точки $\tilde{t}$.

Предложение Г. *Верно следующее*: $\int_0^{\bar{t}} sl^*(s)ds \leqq 0$.

Доказательство. Пусть верно обратное неравенство $\int_0^{\bar{t}} sl^*(s)ds > 0$. Определим точку $t^* = \inf\{t \in (0, \bar{t}] : \int_t^{\bar{t}} sl^*(s)ds = 0\}$. Тогда для $0 < t < t^*$ выполнено $\int_t^{t^*} sl^*(s)ds > 0$ и из равенства

$$\int_0^{t^*} s^2 l^*(s)ds = \int_0^{t^*} \int_t^{t^*} sl^*(s)\, ds\, dt$$

получаем $\int_0^{t^*} s^2 l^*(s)ds > 0$, что противоречит предложению В.

Из предложения Г и из условия $\int_0^T tl^*(t)dt = 1$ следует, что величина $\beta = \int_{\bar{t}}^T tl^*(t)\,dt \geqq 1$. Вводим функцию

$$l^{**}(t)=\begin{cases}0, & 0\leqq t<\bar t\\ (1/\beta)\,l^*(t), & \bar t\leqq t\leqq T.\end{cases}$$

Имеем

$$J(l^{**})\leqq (C^2/4)\,(\int_{\bar t}^{T} t l^*(t)dt)^2+\int_{\bar t}^{T}(l^*(t))^2dt.$$

Согласно выбору точки $\bar t$, выполняется

$$\int_0^{\bar t} s^2\, l^*(s)ds=0,\quad \int_0^{t} s^2\, l^*(s)ds>0,\quad \bar t<t\leqq T.$$

Из первого условия следует, что $\int_{\bar t}^{T} s^2\, l^*(s)\,ds=\int_0^T s^2\, l^*(s)\,ds$, а из неравенства и предложения Б следует, что $l^*(t)\geqq 0$ почти везде на $[\bar t, T]$. Учитывая основное предположение, приходим к выводу $\mu\{t\in[0,\bar t]: l^*(t)<0\}>0$ и, следовательно, $\int_0^{\bar t}(l^*(t))^2dt>0$. Тогда

$$J(l^{**})<(C^2/4)\,(\int_0^T t^2\, l^*(t)\,dt)^2+\int_0^T (l^*(t))^2\,dt,$$

что противоречит тому, что функция $l^*(t)$ является решением задачи (5). Следовательно, основное предположение неверно. Лемма доказана.

Следствие. *Если функция $l^*(t)$ — решение задачи* (5), *то она является решением и задачи*

$$(C^2/4)\,(\int_0^T t^2\, l(t)\,dt)^2+\int_0^T l^2(t)\,dt\to \inf,$$

(7)

$$\int_0^T t l(t)\,dt=1\,;\ l(t)\geqq 0\,;\ l\in L_2[0,T].$$

Сформулируем без доказательства вспомогательный результат. Рассмотрим задачу

$$({}^*{}_*{}^*)\qquad J(l)\to \inf,\ l\in A,$$

где J — строго выпуклый и слабо непрерывен снизу функционал в $L_2[0, T]$, для которого при $l\in A$ выполнено $J(l)\geqq\gamma\|l\|$, где γ — некоторая положительная константа; множество A выпукло и слабо замкнуто в $L_2[0, T[$.

Теорема 1. *Задача* $({}^*{}_*{}^*)$ *имеет единственное решение.*

Следствие 1. *Задачи* (4), (5), *и* (7) *имеют единственное решение.* Из следствия к лемме 3 получаем

Следствие 2. *Задачи* (5) *и* (7) *имеют одно и то же решение.*

Так как класс допустимых функций в задаче (5) шире, чем таковой в задаче (4), а последний содержит класс допустимых функций для задачи (7), то верно

Следствие 3. *Задачи* (4) *и* (5) *имеют одно и то же решение.*

Следствие 4. *Задача* (2) *имеет единственное решение, и оно совпадает с решением задачи* (7).

Доказательство. Пусть функция $l(t)$ — решение задачи (7). Следовательно, она является решением задачи (4). Пользуясь доказательством в лемме 1, можно показать, что не существует функция, допустимая для задачи (2) и доставляющая минимизируемому функционалу меньшее значение, чем функция $l(t)$ (которая тоже допустима для задачи (2)). Тогда $l(t)$ — решение задачи (2). Единственность вытекает из следствия 2 к лемме 1 и из следствия 1 теоремы 1.

Как и раньше, минимизируемый функционал в (7) будем обозначать через J. Для решения задачи (7) достаточно знать какое-то решение $l_{\sigma^2}(t)$ задачи

$$\int_0^T t^2 l(t)\,dt \to \inf,$$

$$(8)\qquad \int_0^T tl(t)\,dt = 1\,; \quad \int_0^T l^2(t)\,dt = \sigma^2\,; \quad l(t) \geqq 0.$$

и воспользоваться очевидным равенством

$$(9)\qquad \inf_l J(l) = \inf_{\sigma^2 \geqq 3/T^3} J(l_{\sigma^2}),$$

где inf в левой части берется по функциям, допустимым для задачи (7), а условие $\sigma^2 \geqq 3/T^3$ следует из соотношений $1 = (\int_0^T tl(t)dt)^2 \leqq (T^3/3)\sigma^2$.

Лемма 4. *В равенстве* (9) *случай* $\sigma^2 = 3/T^3$ *можно исключить.*

Доказательство. Функция $3t/T^3$ допустима для задачи (8) при $\sigma^2 = 3/T^3$. Если $l(t)$ — другая такая, то $\int_0^T (l(t) - 3t/T^3)^2 dt = 0$ и $l(t) = 3t/T^3$ почти везде на $[0, T]$. Рассмотрим функции

$$l_n(t) = 3t \exp((T^3 - t^3)/n) : n \exp(T^3/n - 1), \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Имеем $l.\,i.\,m \ln(t) = 3t/T^3$. Легко проверяется, что $l_n(t)$ допустимы для (8) при $\sigma^2 = \sigma_n^2 = 3/2n(\exp(T^3/n) + 1) : (\exp(T^3/n) - 1)$. Легко проверяется также, что для любого n, $\sigma_n^2 > 3/T^3$ и $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = 3/T^3$. По непрерывности функционала J

$$J(3t/T^3) = \lim_{n\to\infty} J(l_n) \geqq \inf_{\sigma^2 > 3/T^3} J(l_{\sigma^2}).$$

Составим функцию Лагранжа для задачи (8):

$$(10)\qquad H(l) = -\psi_0 t^2 l + \psi_1 tl + \psi_2 l^2,$$

и положим $\psi_2 = -1/2$. Тогда, каковы бы не были константы ψ_0 и ψ_1, для любого t имеем

$$\max_{l \geqq 0} H(l) = \begin{cases} H(-\psi_0 t^2 + \psi_1 t), & -\psi_0 t^2 + \psi_1 t \geqq 0 \\ H(0), & -\psi_0 t^2 + \psi_1 (t) < 0, \end{cases}$$

т. е. $\max_{l \geqq 0} H(l)$ достигается для любого t на функции

$$(10^\circ)\qquad l(t) = (-\psi_0 t^2 + \psi_1 t)^+.$$

Теперь подберем константы ψ_0 и ψ_1 так, чтобы функция из (10°) была допустимой для задачи (8). Для этого нужно рассмотреть два случая.

1. Пусть $3/T^3<\sigma^2\leq 24/5T^3$. Положим

$$\psi_0=4\sqrt{5}/T^2\sqrt{T}(\sigma^2-3/T^3)^{1/2};$$
(11)
$$\psi_1=3(1/T^3+\sqrt{5}/T\sqrt{T}(\delta^2-3/T^3)^{1/2}).$$

Тогда $\psi_1/\psi_0=3/4\sqrt{5T}(\sigma^2-3/T^3)^{-1/2}+3T/4\geq T$,
что означает, что функция $l(t)$ из (10°) при ψ_0 и ψ_1 из (11) имеет вид

$$l_{\sigma^2}(t)=-\psi_0 t^2+\psi_1 t,\ 0\leq t\leq T.$$

Легко проверяется, что функция $l_{\sigma^2}(t)$ допустима для задачи (8). Если $l(t)$ — любая допустимая функция, то верно неравенство

$$H(l_{\sigma^2}(t))\geq H(l(t)),\ 0\leq t\leq T, \tag{12}$$

где в (10) постоянные ψ_0 и ψ_1 — из (11), $\psi_2=-1/2$. Проинтегрируем неравенство (12) в границах от 0 до T. Получим $\int_0^T t^2 l_{\sigma^2}(t)\,dt\leq\int_0^T t^2 l(t)\,dt$. Тем самым доказана

Теорема 2. *При* $3/T^3<\sigma^2\leq 24/5T^3$ *функция*

$$l_{\sigma^2}(t)=-4\sqrt{5}/T^2\sqrt{T}(5^2-3/T^3)^{1/2}t^2+3(1/T^3+\sqrt{5}/T\sqrt{T}(\sigma^2-3/T^3)^{1/2}t \tag{13}$$

является решением задачи (8).

2. Рассматривая случай $\sigma^2>24/5T^3$, для удобства присоединим и граничное значение. Положим

$$\psi_0=5\sigma^2/2(5\sigma^2/24)^{1/3},\ \psi_1=5\sigma^2/2. \tag{14}$$

Тогда $\psi_1/\psi_0\leq T$, и для этих ψ_0 и ψ_1 функция из (10^0) имеет вид

$$l_{\sigma^2}(t)=\begin{cases}-5\sigma^2/2(5\sigma^2/24)^{1/3}t^2+5\sigma^2/2\,t, & 0\leq t\leq(5\sigma^2/24)^{-1/3},\\ 0, & (5\sigma^2/24)^{-1/3}<t\leq T.\end{cases} \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что эта функция допустима для задачи (8). Подставляя в (10) ψ_0, ψ_1 из (14), $\psi_2=-1/2$ и интегрируя неравенство (12) при $l_{\sigma^2}(t)$ из (15) ($l(t)$ — снова любая допустимая функция), приходим к неравенству $\int_0^T t^2 l_{\sigma^2}(t)\,dt\leq\int_0^T t^2 l(t)\,dt$. Тогда верна

Теорема 3. *При* $\sigma^2\geq 24/5T^3$ *функция* $l_{\sigma^2}(t)$ *из* (15) *является решением задачи* (8).

Осталось найти $\inf_{\sigma^2>3/T^3}J(l_{\sigma^2})$.

Нетрудно убедиться, что функция переменного σ^2, $J(l_{\sigma^2})$ при $l_{\sigma^2}(t)$ из (13) определена для $\sigma^2>3/T^3$, выпукла вниз и имеет абсолютный минимум в точке $\sigma_1^2=3/T^3+45C^2T^7/(320+C^2T^5)^2$. Если $l_{\sigma^2}(t)$ — из (15), то функция $J(l_{\sigma^2})$ определена для $\sigma^2>0$, выпукла вниз и имеет абсолютный минимум в точке $\sigma_2^2=24/5(C^2/80)^{3/5}$. Тогда справедливы равенства

$$\min_{3/T^3>\sigma^2\leq 24/5T^3}J(l_{\sigma^2})=J(l_{\sigma_*^2}),\quad \sigma_*^2=\min(\sigma_1^2,\ 24/5T^3);$$

$$\min_{\sigma^2\geq 24/5T^3}J(l_{\sigma^2})=J(l_{\sigma_{**}^2}),\ \sigma_{**}^2=\max(\sigma_2^2,\ 24/5T^3).$$

Если $T<(C^2/80)^{-1/5}$, то $\sigma_*^2=\sigma_1^2$, $\sigma_{**}^2=24/5T^3$; если $T=(C^2/80)^{-1/5}$, то $\sigma_*^2=24/5T^3=\sigma_{**}^2=\sigma_1^2=\sigma_2^2$. Если $T>(C^2/80)^{-1/5}$, то $\sigma_*^2=24/5T^3$, $\sigma_{**}^2=\sigma_2^2$. Тогда верна

Теорема 4. *Для* $0<T<(C^2/80)^{-1/5}$ *единственным решением задачи* (7) *является функция*

$$l^*(t)=[-60T/(320+C^2T^5)]\,t^2+3(1/T^3)+[15C^2T^2/(320+C^2T^5)]\,t, \tag{16}$$

при этом

$$J(l^*)=9C^2T^2/40+3/T^3-9C^4T^7/64\,(320+C^2T^5). \tag{17}$$

Для $T\geqq(C^2/80)^{-1/5}$ единственным решением задачи (7) является функция

$$l^*(t)=\begin{cases}-12(C^2/80)^{4/5}\,t^2+12\,(C^2/80)^{3/5}t, & 0\leqq t\leq(C^2/80)^{-1/5},\\ 0, & (C^2/80)^{-1/5}<t\leqq T,\end{cases} \tag{18}$$

при этом

$$J(l^*)=12\,(C^2/80)^{3/5}. \tag{19}$$

Теорема 5. *Линейная минимаксная оценка для параметра* λ *в задаче* (1) *при* $\varepsilon=0$ *существует и единственна. Для* $0<T<(C^2/80)^{-1/5}$ *ее весовая функция задается равенством* (16), *и максимальное уклонение* $\sup_{\lambda,\,|g(t)|\leqq C}\mathsf{E}\,|\lambda^*_T(\eta)|-\lambda^2$ *равно выражению в правой части* (17). *Для* $T\geqq(C^2/80)^{-1/5}$ *весовая функция оценки задается равенством* (18), *и ее максимальное уклонение равно выражению в правой части* (19). *Оценка имеет гауссовское распределение с параметрами*

$$\mathsf{E}\,\lambda^*_T(\eta)=\lambda+\int_0^T l^*(t)\int_0^T g(s)s\,ds\,dt,\quad \mathsf{D}\lambda^*_T(\eta)=\int_0^T(l^*(t))^2dt,$$

где $l^*(t)$ — *функция из теоремы 4.*

Доказательство. Пусть $\lambda_T(\eta)$ — произвольная линейная оценка, для которой выполнено условие (*). Как было показано, ее весовая функция $l(t)$ удовлетворяет условию (**) и, следовательно, она допустима для задачи (2). При этом

$$\sup_{\lambda,\,|g(t)|\leqq C}\mathsf{E}\,|\lambda_T(\eta)-\lambda|^2=C^2\Big(\int_0^T t\,\Big|\int_t^T l(s)\,ds\,\Big|\,dt\Big)^2+\int_0^T l^2(t)dt$$

$$\geqq C^2\Big(\int_0^T t\int_t^T l^*(s)\,ds\,dt\Big)^2+\int_0^T(l^*(t))^2\,dt,$$

где $l^*(t)$ — функция из теоремы 4. Положим $\lambda^*_T(\eta)=\int_0^T l^*(t)d\eta_t$. Тогда

$$\sup_{\lambda,\,|g(t)|\leqq C}\mathsf{E}\,|\lambda_T(\eta)-\lambda|^2\geqq\sup_{\lambda,\,|g(t)|\leqq C}\mathsf{E}\,|\lambda^*_T(\eta)-\lambda|^2.$$

Так как это неравенство выполнено и для линейных оценок, не удовлетворяющих (*), то оценка $\lambda^*_T(\eta)$ минимаксна в классе M линейных оценок. Ее единственность следует из единственности решения задачи (2). Из представления

$$\lambda^*_T(\eta)=\lambda+\int_0^T l^*(t)\int_0^t g(s)\,s\,ds\,dt+\int_0^T l^*(t)\,d\widetilde{W}_t$$

и из свойств интеграла по винеровскому процессу (см. [3]) следует, что $\lambda_T^*(\eta)$ имеет гауссовское распределение с параметрами

$$\mathsf{E}\,\lambda_T^*(\eta)=\lambda+\int_0^T l^*(t)\int_0^t g(s)\,s\,ds\,dt,\quad \mathsf{E}\,|\lambda_T^*(\eta)-\mathsf{E}\lambda_T^*(\eta)|^2=\int_0^T (l^*(t))^2dt.$$

Теорема доказана.

Пусть теперь в задаче (1) ε — произвольное положительно число. Можно показать, что если линейная минимаксная оценка для параметра λ существует, то ее весовая функция должна являться решением вариационной задачи

$$\text{(20)}\qquad \begin{gathered} C^2\Bigl(\int_0^T t\,\Bigl|\int_t^T l(s)ds\Bigr|\,dt\Bigr)^2+\varepsilon^2\int_0^T\Bigl(\int_t^T l(s)\,ds\Bigr)^2dt+\int_0^T l^2(t)dt\to\inf,\\ \int_0^T tl(t)dt=1\,;\ \ l\in L_2[0,T]. \end{gathered}$$

Лемма 5. *Пусть функция* $l^*(t)$ — *решение задачи* (20). *Тогда*

$$\int_t^T l^*(s)ds\geq 0,\ \ 0\leq t\leq T.$$

Доказательство. Если лемма не верна, то число $\beta=\int_0^T\bigl|\int_t^T l^*(s)ds\bigr|dt$ больше единицы. Нетрудно показывается, что функция

$$\tilde{l}(t)=(1/\beta)\,\mathrm{sign}\Bigl(\int_t^T l^*(s)\,ds\Bigr)\,l^*(t)$$

допустима для задачи (20) и доставляет минимизируемому функционалу меньшее значение, чем функция $l^*(t)$, что противоречит тому, что последняя является решением задачи (20).

Следствие. *Любое решение задачи* (20) *является решением задачи*

$$\text{(21)}\qquad \begin{gathered} C^2\Bigl(\int_0^T t\int_t^T l(s)ds\,dt\Bigr)^2+\varepsilon^2\int_0^T\Bigl(\int_t^T l(s)ds\Bigr)^2dt+\int_0^T l^2(t)\,dt\to\inf,\\ \int_0^T tl(t)dt=1\,;\ \ \int_t^T l(s)ds\geq 0,\ \ 0\leq t\leq T\,;\ \ l\in L_2[0,T]. \end{gathered}$$

Пусть функция $l(t)$ допустима для (21). Рассмотрим функцию

$$\text{(22)}\qquad \mathscr{X}(t)=\int_t^T l(s)ds,\ \ 0\leq t\leq T.$$

Она обладает следующими свойствами: $\mathscr{X}(t)\geq 0$; $\mathscr{X}(T)=0$; $\mathscr{X}(t)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$, и почти везде $\mathscr{X}'(t)=-l(t)$. Так как

$$\int_0^T t\,l(t)dt=\int_0^T\int_t^T l(s)\,ds\,dt,$$

то $\int_0^T\mathscr{X}(t)\,dt=1$. Если $\tilde{\mathscr{X}}(t)$ — другая функция с такими свойствами, то функция $\tilde{\mathscr{X}}'(t)$ является допустимой для задачи (21). Пользуясь равенством $\int_0^T t\,\mathscr{X}'(t)dt=-1$, представим минимизируемый функционал в (21) в виде

$$(C^2/\varepsilon^2)\Big(\int_0^T t(\varepsilon\mathscr{X}(t)-\mathscr{X}'(t))dt-1\Big)^2+\int_0^T(\varepsilon\mathscr{X}(t)-\mathscr{X}'(t))^2dt$$

$$+2\varepsilon\int_0^T\mathscr{X}(t)\mathscr{X}'(t)dt=(C^2/\varepsilon^2)\Big(\int_0^T tu(t)\,dt-1\Big)^2+\int_0^T u^2(t)\,dt-\varepsilon\mathscr{X}^2(0),$$

где мы обозначили

(23) $$u(t)=\varepsilon\mathscr{X}(t)-\mathscr{X}'(t).$$

Отметим теперь, что уравнение (23) имеет (при фиксированной суммируемой на $[0, T]$ функции $u(t)$) единственное решение в классе абсолютно непрерывных функций с граничным условием $\mathscr{X}(T)=0$ и оно имеет вид

$$\mathscr{X}(t)=e^{\varepsilon t}\int_t^T e^{-\varepsilon s}u(s)\,ds.$$

При этом, условия $u\in L_2[0, T]$ и $\mathscr{X}'(t)\in L_2[0, T]$ эквивалентные. Если выразим ограничения в задаче (21) как ограничения на функцию $u(t)$, мы придем к задаче

(24)
$$(C^2/\varepsilon^2)\Big(\int_0^T tu(t)\,dt-1\Big)^2+\int_0^T u^2(t)dt-\varepsilon\Big(\int_0^T e^{-\varepsilon t}u(t)dt\Big)^2\to\inf,$$
$$\int_0^T(1-e^{-\varepsilon t})u(t)dt=\varepsilon;\ \int_t^T e^{-\varepsilon s}u(s)ds\geq 0,\ 0\leq t\leq T;\ u\in L_2[0, T].$$

Нетрудно проверить, что верна

Лемма 6. *Любое решение задачи* (21) *определяет равенствами* (22) *и* (23) *решение задачи* (24), *и наоборот, любое рашение задачи* (24) *определяет равенствами* (22) *и* (23) *решение задачи* (21). *При этом минимальные значения минимизируемых функционалов одни и те же.*

Лемма 7. *Задача* (24) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Применяя неравенство Коши—Буняковского, имеем

$$\int_0^T u^2(t)dt-\varepsilon\Big(\int_0^T e^{-\varepsilon t}u(t)dt\Big)^2\geqq\int_0^T u^2(t)dt\,(1+1/2(e^{-\varepsilon T}-1)).$$

Тогда задача (24) имеет вид $({}^{*}{}_{*}{}^{*})$, и лемма следует из теоремы 1.

Положим $V(t)=e^{-\varepsilon t}u(t)$. Это преобразование приводит единственное решение задачи (24) в единственное решение задачи:

(25)
$$(C^2/\varepsilon^2)\Big(\int_0^T te^{\varepsilon t}V(t)-1\Big)^2+\int_0^T(e^{\varepsilon t}V(t))^2\,dt-\varepsilon\Big(\int_0^T v(t)dt\Big)^2\to\inf,$$
$$\int_0^T(e^{\varepsilon t}-1)V(t)\,dt=\varepsilon;\ \int_t^T v(s)ds\geqq 0,\ 0\leqq t\leqq T;\ V\in L_2[0, T].$$

Лемма 8. *Если функция* $V(t)$ *удовлетворяет условию*

(i) $$\int_t^T V(s)ds\geqq 0,\ 0\leqq t\leq T,$$

то она удовлетворяет и условию

(ii) $$\int_t^T (\varepsilon s e^{\varepsilon s} - e^{\varepsilon s} + 1) V(s)\, ds \geqq 0, \quad 0 \leqq t \leqq T.$$

Доказательство. Интегрируя в пределах от t^* до T неравенство $\varepsilon^2 t e^{\varepsilon t} \int_t^T V(s) ds \geqq 0$, получаем

$$\int_{t^*}^T (\varepsilon t e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon t} + 1)\, V(t) dt \geqq (\varepsilon t^* e^{\varepsilon t^*} - e^{\varepsilon t^*} + 1) \int_{t^*}^T V(t) dt \geqq 0.$$

Лемма 9. *Если функция $V^*(t)$ — решение задачи* (25), *то $V^*(t) \geqq 0$ почти везде на $[0, T]$.*

Доказательство. Допустим противное: $\mu\{t \in [0, T] : V^*(t) < 0\} > 0$. Функции переменного t

$$\int_0^t (\varepsilon s e^{\varepsilon s} - e^{\varepsilon s} + 1) V^*(s) ds, \quad \int_0^t V^*(s) ds, \quad \int_0^t (e^{\varepsilon s} - 1) V^*(s) ds$$

дифференцируемы почти везде на $[0, T]$. Пусть D — множество, где все они дифференцируемы; тогда $\mu(D) = T$, $\mu(D \cap \{t \in [0, T] : V^*(t) < 0\}) > 0$. Следовательно, существует точка $t_0 \in D$, $t_0 \neq 0$, $t_0 \neq T$, такая, что $V^*(t_0) < 0$, и значит для точек $t \neq t_0$ из некоторой малой правосторонней окрестности точки t_0 выполняется

$$\int_{t_0}^t (\varepsilon s e^{\varepsilon s} - e^{\varepsilon s} + 1) V^*(s) ds < 0, \quad \int_{t_0}^t V^*(s) ds < 0, \quad \int_{t_0}^t (e^{\varepsilon s} - 1) V^*(s) ds < 0.$$

Так как $V^*(t)$ удовлетворяет (ii) (лемма 8), то существует хотя бы одна точка $\tilde{t}$, $t_0 < \tilde{t} \leqq T$, такая, что $\int_{t_0}^{\tilde{t}} (\varepsilon s e^{\varepsilon s} - e^{\varepsilon s} + 1) V^*(s)\, ds = 0$. Обозначим через $\tilde{t}_0$ ту из точек $\tilde{t}$, которая ближе всего к точке t_0. Имеем

(26) $$\begin{gathered} \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} (\varepsilon s e^{\varepsilon s} - e^{\varepsilon s} + 1) V^*(s)\, ds = 0; \\ \int_{t_0}^{t} (\varepsilon s e^{\varepsilon s} - e^{\varepsilon s} + 1) V^*(s) ds < 0, \quad t_0 < t < \tilde{t}_0. \end{gathered}$$

Предложение A1. *Выполняется следующее:* $\int_{t_0}^t V^*(s) ds < 0$, $t_0 < t \leqq \tilde{t}_0$.

Доказательство. Пусть существуют точки из $(t_0, \tilde{t}_0]$, в которых интеграл неотрицательный. Так как (согласно выбору точки t_0) в некоторой правой окрестности точки t_0 значение интеграла отрицательно, то существует хотя бы одна точка из $(t_0, \tilde{t}_0]$, в которой интеграл равняется нулю. Пусть t^0 — самая близкая к t_0 такая точка. Имеем $\int_{t_0}^{t^0} V^*(s) ds = 0$, $\int_{t_0}^t V^*(s) ds < 0$, $t_0 < t < t_0$. Тогда $\varepsilon^2 t e^{\varepsilon t} \int_{t_0}^t V^*(s) ds < 0$, $t_0 < t < t^0$. Интегрируя по всем таким t, получаем $\int_{t_0}^{t^0} (\varepsilon t e^{\varepsilon t} - e^{\varepsilon t} + 1)\, V^*(t)\, dt > 0$, что противоречит (26).

Предложение Б1. *Выполняется следующее* $\int_{t_0}^t (e^{\varepsilon s} - 1)\, V^*(s)\, ds < 0$, $t_0 < t \leqq \tilde{t}_0$.

Доказательство. Пусть существуют точки из $(t_0, \tilde{t}_0]$, для которых интеграл неотрицательный. Так как (согласно выбору точки t_0) в некоторой правой окрестности точки t_0 значение интеграла отрицательно, то существуют точки из $(t_0, \widetilde{t}_0]$, в которых интеграл равняется нулю. Пусть t^0 — самая близкая до точки t_0 такая точка. Тогда

$$\int_{t_0}^{t^0} (e^{\varepsilon s}-1)V^*(s)ds=0, \quad \int_{t_0}^{t} (e^{\varepsilon s}-1)V^*(s)ds<0, \quad t_0<t<t^0.$$

Из равенства $(t>0, \varepsilon>0)$

$$((\varepsilon te^{\varepsilon t}-e^{\varepsilon t}+1)(e^{\varepsilon t}-1)^{-1})'_t=\varepsilon e^{\varepsilon t}(e^{\varepsilon t}-1-\varepsilon t)(e^{\varepsilon t}-1)^{-2}>0$$

следует, что

$$((\varepsilon te^{\varepsilon t}-e^{\varepsilon t}+1)(e^{\varepsilon t}-1)^{-1})'_t \int_{t_0}^{t} (e^{\varepsilon s}-1)V^*(s)ds<0, \quad t_0<t<t^0.$$

Интегрируя в пределах от t_0 до t^0, получаем $\int_{t_0}^{t^0}(\varepsilon te^{\varepsilon t}-e^{\varepsilon t}+1)V^*(t)dt>0$. что противоречит (26). Итак, если лемма неверна, найдутся точки $t_0 \in (0, T)$, $\widetilde{t}_0 \in (t_0, T]$, такие, что

$$(27) \qquad \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} (\varepsilon te^{\varepsilon t}-e^{\varepsilon t}+1)V^*(t)dt=0, \quad \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0} V^*(t)dt<0, \quad \int_{t_0}^{\widetilde{t}_0}(e^{\varepsilon t}-1)V^*(t)dt<0.$$

Рассмотрим функцию

$$V^{**}(t)=\begin{cases} V^*(t)/d, & t\notin(t_0, \widetilde{t}_0), \\ 0, & t\in(t_0, \widetilde{t}_0), \end{cases}$$

где

$$d=(1/\varepsilon)\left(\int_0^{t_0}(e^{\varepsilon t}-1)V^*(t)dt+\int_{\widetilde{t}_0}^{T}(e^{\varepsilon t}-1)V^*(t)\,dt\right).$$

Так как $\int_0^T (e^{\varepsilon t}-1)V^*(t)dt=\varepsilon$, то из (27) следует, что $d>1$. Легко проверяется, что функция $V^{**}(t)$ допустима для задачи (25). Обозначим через J функционал, который минимизируется в (25). Покажем, что $J(V^*)>J(V^{**})$. Сначала подсчитаем

$$\left(\int_0^T te^{\varepsilon t}V^*(t)\,dt-1\right)^2=\left(\int_0^T te^{\varepsilon t}V^*(t)dt-(1/\varepsilon)\int_0^T(e^{\varepsilon t}-1)V^*(t)\,dt\right)^2$$

$$=(1/\varepsilon^2)\left(\int_0^T(\varepsilon te^{\varepsilon t}-e^{\varepsilon t}+1)V^*(t)dt\right)^2=(d^2/\varepsilon^2)\left(\int_0^T(\varepsilon te^{\varepsilon t}-e^{\varepsilon t}+1)V^{**}(t)dt\right)^2$$

$$=d^2\left(\int_0^T te^{\varepsilon t}V^{**}(t)dt-1\right)^2.$$

Тогда

$$J(V^*)-J(V^{**})>\left(\int_0^T(e^{\varepsilon t}V^*(t))^2dt-\varepsilon\left(\int_0^T V^*(t)dt\right)^2\right)$$

$$-\left(\int_0^T(e^{\varepsilon t}V^{**}(t))^2dt-\varepsilon\left(\int_0^T V^{**}(t)dt\right)^2\right).$$

Пользуясь тем, что выражение в первых скобках положительно (см. лемму 7), а также и условиями (27), нетрудно показать, что правая часть полученного неравенства положительна. Это противоречит тому, что функция $V^*(t)$ — решение задачи (25). Лемма доказана.

Следствие. *Единственное решение задачи* (25) *является единственным решением задачи*

$$(28)\quad \begin{gathered} (C^2/\varepsilon^2)\Big(\int_0^T te^{\varepsilon t}V(t)dt-1\Big)^2+\int_0^T (e^{\varepsilon t}V(t))^2dt-\varepsilon\Big(\int_0^T V(t)dt\Big)^2\to \inf,\\ \int_0^T (e^{\varepsilon t}-1)V(t)dt=\varepsilon;\quad V(t)\geqq 0;\quad V\in L_2[0,T]. \end{gathered}$$

Заметим, что если функция $V(t)$ *допустима для* (28), *то*

$$\int_0^T te^{\varepsilon t}V(t)\,dt-1=(1/\varepsilon)\int_0^T(\varepsilon te^{\varepsilon t}-e^{\varepsilon t}+1)V(t)dt>0.$$

Для нахождения решения задачи (28) достаточно рассмотреть задачу

$$(29)\quad \begin{gathered} \int_0^T (e^{\varepsilon t}\,V(t))^2dt\to \inf,\\ \int_0^T e^{\varepsilon t}V(t)dt=\varepsilon+\alpha;\quad \int_0^T te^{\varepsilon t}V(t)\,dt=1+\beta,\\ \int_0^T V(t)dt=\alpha;\quad V(t)\geqq 0;\quad V\in L_2[0,T], \end{gathered}$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$, и такие, что ограничения в (29) задают непустой класс функций. Пусть $\mathscr{F}\subset R^2$ — множество всех таких точек (α,β).

Теорема 6. *Решение задачи* (29) *единственно и имеет вид* $\overline{V}(t;\alpha,\beta)=e^{-2\varepsilon t}(\overline{\psi}_1+\overline{\psi}_2\,e^{\varepsilon t}+\overline{\psi}_3\,te^{\varepsilon t})^+$, *где константы* $\overline{\psi}_1$, $\overline{\psi}_2$ *и* $\overline{\psi}_3$ *определяются из ограничений в* (29).

Доказательство. Задача (29) имеет вид $({}^*{}_*{}^*)$, следовательно, решение существует и единственно. Согласно теореме 1 в [6], найдутся константы $\psi_0\geqq 0$, ψ_1, ψ_2 и ψ_3, не все равные нулю, такие, что это решение максимизирует функцию Лагранжа $H(V)=-\psi_0\,e^{2\varepsilon t}V^2+(\psi_1+\psi_2\,e^{\varepsilon t}+\psi_3te^{\varepsilon t})\,V$ по переменному $V\geqq 0$ почти для всех $t\in[0,T]$. Очевидно, $\psi_0>0$. Не ограничивая общности, положим $\psi_0=-1/2$. Тогда для любого t, $\max_{l\geqq 0}H(l)$ достигается на функции $V(t)=e^{-2\varepsilon t}(\psi_1+\psi_2\,e^{\varepsilon t}+\psi_3\,te^{\varepsilon t})^+$, что доказывает теорему.

Пусть $(\overline{\alpha},\overline{\beta})$ — та единственная точка из множества $\mathscr{F}$, на которой достигается минимум функции $J(\overline{V}(t;\alpha,\beta))$. Тогда функция $\overline{V}(t;\overline{\alpha},\overline{\beta})$ является решением задачи (28).

Теорема 7. *Единственное решение задачи* (20) *имеет вид*

$$(30)\quad l^*(t)=(\overline{\psi}_1\,e^{-\varepsilon t}+\overline{\psi}_2+\overline{\psi}_3t)^+-\varepsilon e^{\varepsilon t}\int_t^T(\overline{\psi}_1e^{-2\varepsilon s}+\overline{\psi}_2e^{-\varepsilon s}+\overline{\psi}_3se^{-\varepsilon s})^+ds.$$

Доказательство. Функция $u^*(t)=e^{-\varepsilon t}\,\overline{V}(t;\overline{\alpha},\overline{\beta})$ является единственным решением задачи (24). Согласно лемме 6, единственное решение задачи

(21) имеет вид $l^*(t)=u^*(t)-\varepsilon e^{\varepsilon t}\int_t^T e^{-\varepsilon s}u^*(s)ds$. После подстановки получаем функцию (30). Пользуясь доказательством леммы 5, можно показать, что не существует функции, допустимой для задачи (20) и доставляющей минимизируемому функционалу меньшее значение, чем допустимая функция (30), Тем самым она является решением задачи (20). Его единственность следует из леммы 5 и из единственности решения задачи (21).

Теорема 8. *Линейная минимаксная оценка для λ при $\varepsilon>0$ в задаче* (1) *существует и единственна. Ее весовая функция имеет вид* (30).

Доказательство. Пусть $\lambda_T(\eta)$ — линейная оценка, удовлетворяющая условию (*). Тогда ее весовая функция удовлетворяет (**) и, следовательно, она допустима для задачи (20). При этом

$$\sup_{\lambda,\ |g(t)|\leqq C} \mathsf{E}\,|\lambda_T(\eta)-\lambda|^2=C^2\Big(\int_0^T t\,\Big|\int_t^T l(s)\,ds\Big|\,dt\Big)^2+\varepsilon^2\int_0^T\Big(\int_t^T l(s)\,ds\Big)^2dt+\int_0^T l^2(t)\,dt,$$

где $l(t)$ — весовая функция оценки $\lambda_T(\eta)$. Положим $\lambda_T^*(\eta)=\int_0^T l^*(t)d\eta_t$, где функция $l^*(t)$ — из (30). Тогда

$$\sup_{\lambda,\ |g(t)|\leqq C} \mathsf{E}\,|\lambda_T(\eta)-\lambda|^2\geqq\sup_{\lambda,\ |g(t)|\leqq C} \mathsf{E}\,|\lambda_T^*(\eta)-\lambda|^2.$$

Так как верхнее неравенство верно и для линейных оценок, не удовлетворяющих (*), то оценка $\lambda_T^*(\eta)$ минимаксна в классе M линейных оценок для параметра λ. Единственность линейной минимаксной оценки следует из единственности решения задачи (20). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Л. Легостаева, А. Н. Ширяев. Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса. *Теория вероятн. и ее примён.*, **16**, 1970, 339—345.
2. J. Sacks, D. Ylvisaker. Linear Estimation for Approximately Linear Models. *Ann. Statist.*, **6**, 1978, 1122—1137.
3. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. Москва, 1974.
4. Р. Д. Додунекова. Минимаксная оценка тренда одного класса случайных процессов. *Mathematische Operationsforschung und Statistik*, **14**, 1983, 509—515.
5. Р. Д. Додунекова. Минимаксное оценивание в задачах с неполными данными. *Успехи матем. наук* (в печати).
6. В. Й. Аркин. О бесконечномерном аналоге задач невыпуклого программирования. *Кибернетика*, 1967, № 2, 37—93.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 19. 1. 1983
В переработанном виде 23. 1. 1984