Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОДИН КЛАСС СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

ТОДОР Р. ГИЧЕВ

Рассматривается стационарный линейный управляемый объект при производных некоторых из переменных, в законе движения которого имеется малый положительный параметр. В одном неустойчивом случае изучается поведение оптимального времени в задаче быстродействия для объекта, когда параметр стремится к нулю.

1. Пусть через Q_λ, $\lambda\in(0, \Lambda_0)$, $\Lambda_0>0$ обозначен управляемый объект с законом движения

$$(1)\qquad \begin{aligned} \dot{x}&=A_{11}x+A_{12}y+B_1u,\\ \lambda\dot{y}&=A_{21}x+A_{22}y+B_2u, \end{aligned}$$

где $x\in R^n$, $y\in R^m$, $u\in R^r$; A_{ij}, B_i, $i=1, 2$; $j=1, 2$ — постоянные матрицы с размерами, которые определяются векторами x, y, u. При условии, что матрица A_{22}^{-1} существует, через Q_0 обозначим управляемый объект с законом движения

$$(2)\qquad \dot{x}=A_0x+B_0u,$$

где $A_0=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $B_0=B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2$. Пусть Ω — выпуклый и компактный многогранник в R^r, который содержит в своей внутренности начало координат O_r пространства R^r. Допустимыми управлениями для объекта Q_λ, $\lambda\in[0, \Lambda_0)$, являются кусочно-непрерывные функции u, которые определены на конечных отрезках времени $[0, T]$ и $u(t)\in\Omega$, когда $t\in[0, T]$. Предполагается, что точки разрыва принадлежат интервалу $(0, T)$, и функция u непрерывна справа во всех точках $t\in(0, T)$.

Задача быстродействия Γ_λ, $\lambda\in(0, \Lambda_0)$ (см. [4]) состоит в отыскании допустимого управления, которое переводит объект Q_λ из фиксированного начального состояния $(v_0, w_0)\in R^{n+m}$ в начало координат O пространства R^{n+m} в минимально возможное время. Через Γ_0 обозначим задачу быстродействия, состоящую в отыскании допустимого управления, которое переводит объект Q_0 из начального состояния v_0 в начало координат O_n пространства R^n в минимально возможное время. Пусть через T_λ, $\lambda\in[0, \Lambda_0)$ обозначено оптимальное время в задаче Γ_λ, если, конечно, она имеет решение.

Перечислим предположения, при которых в дальнейшем исследуется сходимость T_λ к T_0, когда λ стремится к нулю:

I. Матрица $\exp(A_{22}\tau)$, $\tau\geqq0$, периодическая с периодом $\nu>0$.

II. Имеет место равенство

$$\operatorname{rank}[B_2A_{22}B_2\ldots A_{22}^{m-1}B_2]=m.$$

III. Для объекта Q_0 и многогранника Ω выполняется условие общности положения.

Основной результат работы формулируется следующим образом.

Теорема. *Пусть задача* Γ_0 *имеет решение и выполняются предположения* I—III. *Тогда для всех достаточно малых* $\lambda>0$ *задача* Γ_λ *имеет решение и* $\limsup_{\lambda\to 0} T_\lambda = T_0$. *Если, кроме того, матрица* A_{12} *нулевая, то* $\lim_{\lambda\to 0} T_\lambda = T_0$.

Эта теорема является расширением результатов из [5; 3; 2], где рассматриваются соответственно случай $r=1$ и случай, когда характеристические числа матрицы A_{22} либо имеют отрицательные действительные части, либо разделены в две группы — с отрицательными и положительными действительными частями. Литературный обзор по этим вопросам содержится в [1].

2. *Сначала докажем некоторые вспомогательные результаты.*

Лемма. *Пусть выполняются предположения* I *и* II. *Пусть, далее,* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — *последовательность чисел* $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$; $\bar{w}_0\in R^m$, $w_T\in R^m$; $\tilde{u}(t)$, $t_0\leq t\leq T$, — *r-мерная функция, которая имеет непрерывную и ограниченную производную всюду на отрезке* $[t_0, T]$ *с исключением, может быть, конечного числа точек интервала* (t_0, T); $\tilde{x}$ — *соответствующее функции* $\tilde{u}$ *решение уравнения* (2). *Тогда существует такая последовательность* $\{\tilde{u}_k\}_1^\infty$ *r-мерных кусочно-непрерывных функций* $\tilde{u}_k$ *с соответствующими при* $\lambda=\lambda_k$ *решениями* $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ *системы* (1) *с начальным условием* $(\tilde{x}(t_0), \bar{w}_0)$, *что последовательности* $\{\tilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{x}_k\}_1^\infty$ *сходятся равномерно на отрезке* $[t_0, T]$ *соответственно к* $\tilde{u}$ *и* $\tilde{x}$, *и имеет место равенство* $\tilde{y}_k(T)=w_T$.

Доказательство. Через (x_k, y_k) обозначим соответствующее функции $\tilde{u}$ решение системы (1) при $\lambda=\lambda_k$ с начальным условием $(\tilde{x}(t_0), \bar{w}_0)$. Пусть $X(t,\tau)$ и $Y(t,\tau,\lambda)$ — нормированные при $t=\tau$ фундаментальные матрицы соответственно уравнениям $\dot{x}=A_{11}x$ и $\lambda\dot{y}=A_{22}y$. Тогда, если введено обозначение $\tilde{y}(t)=-A_{22}^{-1}(A_{21}\tilde{x}(t)+B_2\tilde{u}(t))$, то из (1) и (2) получается, что

$$x_k(t)-\tilde{x}(t)=\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)A_{12}(y_k(\tau)-\tilde{y}(\tau))d\tau,$$

$$y_k(t)-\tilde{y}(t)=Y(t,t_0,\lambda_k)\bar{w}_0+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_0}^{t} Y(t,\tau,\lambda_k)A_{21}(x_k(\tau)-\tilde{x}(\tau))d\tau \tag{3}$$

$$-[\tilde{y}(t)+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_0}^{t} Y(t,\tau,\lambda_k)A_{22}\tilde{y}(\tau)d\tau]$$

и, следовательно,

$$x_k(t)-\tilde{x}(t)=\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)A_{12}Y(\tau,t_0,\lambda_k)\bar{w}_0 d\tau$$

$$+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)A_{12}\int_{t_0}^{\tau} Y(\tau,s,\lambda_k)A_{21}(x_k(s)-\tilde{x}(s))ds d\tau$$

$$-\int_{t_0}^{t} X(t,\ \tau)A_1{}^2[\tilde{y}(\tau)+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_0}^{\tau} Y(\tau,\ s,\ \lambda_k)\,A_{22}\tilde{y}(s)\,ds]d\tau$$

$$=\int_{t_0}^{t} X(t,\ \tau)\,A_{12}Y(\tau,\ t_0,\ \lambda_k)\bar{w}_0 d\tau$$

$$-\int_{t_0}^{t}[X(t,\ s)A_{12}+\frac{1}{\lambda_k}\int_{s}^{t} X(t,\ \tau)A_{12}Y(\tau,\ s,\ \lambda_k)\,A_{22}\,d\tau]\tilde{y}(s)ds$$

$$+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t} X(t,\ \tau)A_{12}Y(\tau,\ s,\ \lambda_k)d\tau A_{21}(x_k(s)-\tilde{x}(s))ds.$$

Интегрируя по частям в первых двух слагаемых правой части верхней цепи равенств, получаем, что при некоторой постоянной $c_1>0$ для всех $t\in[t_0,\ T]$ имеет место неравенство

$$\|x_k(t)-\tilde{x}(t)\|\leqq c_1\lambda_k$$

$$+\int_{t_0}^{t}\|\frac{1}{\lambda_k}\int_{s}^{t} X(t,\ \tau)A_{12}Y(\tau,\ s,\ \lambda_k)A_{21}d\tau\|\,\|x_k(s)-\tilde{x}(s)\|\,ds.$$

Далее, с помощью неравенства Гронуолла доказывается существование такой постоянной $c_2>0$, что

(4) $$\max_{t_0\leqq t\leqq T}\|x_k(t)-\tilde{x}(t)\|\leqq c_2\lambda_k.$$

Тогда из (3) и (4) следует ограниченность последовательности $\{y_k(T)\}_1^\infty$.

Введем следующие обозначения:

$$M_k(t)=\frac{1}{\lambda_k}\int_{t}^{T}\exp\left(A_{22}\frac{T-\tau}{\lambda_k}\right)B_2B_2^*\exp\left(A_{22}^*\frac{T-\tau}{\lambda_k}\right)d\tau,$$

$$\tilde{M}=\int_{0}^{\nu}\exp\left(A_{22}s\right)B_2B_2^*\exp\left(A_{22}^*s\right)ds,$$

где $*$ — знак транспонирования. Согласно предположению II, матрица $\tilde{M}$ невырождена. Если натуральное число $l(k)$ выбрано так, что

$$\nu l(k)\leqq\lambda_k^{-1/2}<\nu(l(k)+1),$$

то для всех достаточно больших k выполняется

(5) $$\|(l(k)\tilde{M})^{-1}\|\leqq(l(k))^{-1}\|\tilde{M}^{-1}\|\leqq 2\nu\sqrt{\lambda_k}\,\|\tilde{M}^{-1}\|.$$

Сделав замену переменных $\tau=T-s\lambda_k$ в интеграле $M_k(T-\nu\lambda_k l(k))$, получим

$$M_k(T-\nu\lambda_k l(k))=\int_{0}^{\nu l(k)}\exp\left(A_{22}s\right)B_2B_2^*\exp\left(A_{22}^*s\right)ds$$

и в силу периодичности подинтегральной функции следует, что

$$M_k(T-\nu\lambda_k l(k))=l(k)\tilde{M}.$$

Пусть w_T^i, $i=1, 2, \ldots, l$, — точки из R^m, выпуклая оболочка которых содержит в своей внутренности точку w_T. При $k=1, 2, \ldots$ обозначим $t_k=T-\sqrt{\lambda_k}$ и введем в рассмотрение функции $\tilde{u}_k^i(t)=\tilde{u}(t)+\delta_k^i(t)$, $i=1, 2, \ldots, l$, где

$$\delta_k^i(t)=\begin{cases} O_r, & t\in[t_0, t_k], \\ B_2^*Y^*(T, t, \lambda_k)(l(k)\tilde{M})^{-1}(w_T^i-y_k(T)), & t\in(t_k, T]. \end{cases}$$

Из (5) следует, что последовательность $\{\delta_k^i(t)\lambda_k^{-1/2}\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на отрезке $[t_0, T]$ и при некоторой постоянной $c_3>0$ выполняется неравенство

$$\max_{t_0\leq t\leq T}\|\tilde{u}_k^i(t)-\tilde{u}(t)\|\leq c_3\sqrt{\lambda_k}.$$

Через $(\tilde{x}_k^i, \tilde{y}_k^i)$ обозначим соответствующее управлению $\tilde{u}_k^i$ при $\lambda=\lambda_k$ решение системы (1) с начальным условием $(\bar{x}(t_0), \bar{w}_0)$. На отрезке $[t_0, t_k]$ имеет место равенство $\tilde{x}_k^i(t)=x_k(t)$, а когда $t\in(t_k, T]$,

$$x_k^i(t)-x_k(t)=\int_{t_k}^{t}X(t, \tau)B_1\delta_k^i(\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_k}^{t}\int_{s}^{t}X(t, \tau)A_{12}Y(\tau, s, \lambda_k)\,d\tau B_2\delta_k^i(s)ds$$

$$+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_k}^{t}\int_{s}^{t}X(t, \tau)A_{12}Y(\tau, s, \lambda_k)A_{21}d\tau(\tilde{x}_k^i(s)-x_k(s))ds.$$

И снова с помощью неравенства Гронуолла показывается, что при подходящей постоянной $c_4>0$ имеем

$$\max_{t_0\leq t\leq T}\|\tilde{x}_k^i(t)-x_k(t)\|\leq c_4\lambda_k. \tag{6}$$

Тогда из (4) и (6) следует, что

$$\max_{t_0\leq t\leq T}\|\tilde{x}_k^i(t)-\tilde{x}(t)\|\leq(c_3+c_4)\lambda_k.$$

С другой стороны, в силу (1),

$$\tilde{y}_k^i(T)-y_k(T)=\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_k}^{T}Y(T, \tau, \lambda_k)A_{21}(\tilde{x}_k^i(\tau)-x_k(\tau))d\tau+(w_T^i-y_k(T))$$

$$+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_k}^{T-\nu\lambda_k l(k)}Y(T, \tau, \lambda_k)B_2B_2^*Y^*(T, \tau, \lambda_k)\,d\tau(l(k)\tilde{M})^{-1}(w_T^i-y_k(T)),$$

и, учитывая (6), приходим к выводу, что $\lim_{k\to\infty}\tilde{y}_k^i(T)=w_T^i$. Следовательно, при всех достаточно больших k выпуклая оболочка точек $\tilde{y}_k^i(T)$ содержит точку w_T. Это означает, что точку w_T можем представить в виде $w_T=\Sigma_{i=1}^l\mu_k^i\tilde{y}_k^i(T)$, где $\mu_k^i\geq 0$ и $\Sigma_{i=1}^l\mu_k^i=1$. Тогда легко проверяется, что последовательность управлений

$$\tilde{u}_k(t)=\sum_{i=1}^{l}\mu_k^i\tilde{u}_k^i(t)$$

с соответствующими решениями $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ системы (1) при $\lambda=\lambda_k$ с начальным условием $(\tilde{x}(t_0), \bar{w}_0)$ обладает всеми свойствами, которые требуются в лемме.

Следствие. *Пусть выполняются предположения* I *и* II. *Пусть, далее,* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — *последовательность чисел* $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$; $\bar{w}_0\in R^m, w_T\in R^m$; $u(t)$, $0\leq t\leq T$, — *кусочно-постоянное допустимое управление с соответствующим решением* $\tilde{x}$ *уравнения* (2). *Тогда для любого числа* $\gamma>0$ *существует такая последовательность* $\{\tilde{u}_k\}_1^\infty$ *допустимых управлений* $\tilde{u}_k$ *с соответствующими решениями* $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ *системы* (1) *при* $\lambda=\lambda_k$, *что имеют место равенства* $\tilde{x}_k(0)=\tilde{x}(0)$, $\tilde{y}_k(0)=\bar{w}_0$, $\tilde{y}_k(T)=w_T$ *и неравенство* $\lim_{k\to\infty}\|\tilde{x}_k(T)-\tilde{x}(T)\|\leq\gamma$.

Доказательство. Пусть γ — произвольное положительное число. Число $\varepsilon_0>0$ выбирается так, чтобы

$$\left\|\int_{T-\varepsilon_0}^{T}X_0(T, \tau)B_0\tilde{u}(\tau)d\tau\right\|<\gamma,$$

где $X_0(t, \tau)$ — нормированная при $t=\tau$ фундаментальная матрица уравнения $\dot{x}=A_0x$. Соответствующее управлению

$$\tilde{u}_0(t)=\begin{cases}\tilde{u}(t), & t\in[0, T-\varepsilon_0),\\ 0_r, & t\in[T-\varepsilon_0, T]\end{cases}$$

решение уравнения (2) с начальным условием $\tilde{x}(0)$ обозначим через $\tilde{x}_0$. Тогда из (2) следует оценка

$$\|\tilde{x}(T)-\tilde{x}_0(T)\|=\left\|\int_{T-\varepsilon_0}^{T}X_0(T, \tau)B_0\tilde{u}(\tau)d\tau\right\|\leq\gamma. \tag{7}$$

Построим соответствующие управлению $\tilde{u}_0$ в силу леммы последовательности $\{\tilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{x}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{y}_k\}_1^\infty$, для которых выполняются соотношения

$$\tilde{x}_k(0)=\tilde{x}(0),\quad \tilde{y}_k(0)=\bar{w}_0,\quad \lim_{k\to\infty}\|\tilde{x}_k(T)-\tilde{x}_0(T)\|=0,\quad \tilde{y}_k(T)=w_T.$$

Но тогда, учитывая (7), получим, что имеет место неравенство $\lim_{k\to\infty}\|\tilde{x}_k(T)-\tilde{x}(T)\|\leq\gamma$. И так как управления $\tilde{u}_k$ совпадают с управлением $\tilde{u}$ на отрезке $[0, T-\varepsilon_0]$ и стремятся к O_r в интервале $(T-\varepsilon_0, T]$, то для всех достаточно больших k они допустимы. Все это достаточно, чтобы утверждать, что следствие верно.

3. Через $K(T, \lambda)$, $\lambda\in(0, \Lambda_0)$, $T>0$, обозначим множество достижимости для объекта Q_λ с начальным состоянием (v_0, w_0) и допустимыми управлениями $u(t)$, $0\leq t\leq T$. По аналогии через $K_0(T)$, $T>0$, обозначим множество достижимости для объекта Q_0 с начальным состоянием v_0 и допустимыми управлениями $u(t)$, $0\leq t\leq T$.

Переходим к доказательству теоремы. Сначала докажем, что для любого числа $\varepsilon>0$ начало координат пространства R^{n+m} при всех достаточно малых

$\lambda>0$ принадлежит множеству $K(T_0+\varepsilon, \lambda)$. Допустим противное. Тогда найдутся такие число $\varepsilon_0>0$, последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ чисел $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$ и единичные векторы (p_k, q_k), $p_k\in R^n$, $q_k\in R^m$, что $0\notin K(T_0+\varepsilon_0, \lambda_k)$ и для каждой точки $(x, y)\in K(T_0+\varepsilon_0, \lambda_k)$ выполняется

$$x^*p_k+y^*q_k<0. \tag{8}$$

Без ограничения общности можем считать, что $\lim_{k\to\infty}(p_k, q_k)=(p_0, q_0)$. При предположении III для каждого достаточно малого числа $\alpha>0$ существует такое кусочно-постоянное допустимое управление $\bar{u}(t)$, $T_0\leqq t\leqq T_0+\varepsilon_0$, с соответствующей в силу (2) траекторией $\bar{x}$, что $\bar{x}(T_0)=0_n$, $\bar{x}(T_0+\varepsilon_0)=\alpha p_0$. Если $u_0(t)$, $0\leqq t\leqq T_0$, — оптимальное управление в задаче Γ_0, то введем обозначение

$$\bar{u}_0(t)=\begin{cases} u_0(t), & 0\leqq t<T_0,\\ \bar{u}(t), & T_0\leqq t\leqq T_0+\varepsilon_0.\end{cases}$$

Пусть положительные числа $\beta>0$ и $\gamma>0$ выбраны так, чтобы выполнялось неравенство

$$\alpha\|p_0\|^2-\gamma\|p_0\|+\beta\|q_0\|^2>0. \tag{9}$$

С помощью уже доказанного следствия построим соответствующие управлению $\bar{u}_0$ последовательности $\{\tilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\tilde{x}_k\}^\infty$, $\{\tilde{y}_k\}_1^\infty$, для которых имеют место соотношения

$$\tilde{x}_k(0)=v_0, \quad \tilde{y}_k(0)=w_0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\|\tilde{x}_k(T_0+\varepsilon_0)-\alpha p_0\|\leqq\gamma, \quad \tilde{y}_k(T_0+\varepsilon_0)=\beta q_0. \tag{10}$$

И так как точка $(\tilde{x}_k(T_0+\varepsilon_0), \tilde{y}_k(T_0+\varepsilon))$ принадлежит множеству $K(T_0+\varepsilon_0, \lambda_k)$, то в силу (8) выполняется неравенство

$$\tilde{x}_k^*(T_0+\varepsilon_0)p_k+\tilde{y}_k^*(T_0+\varepsilon_0)q_k<0,$$

откуда следует, что

$$\alpha p_0^*p_k-\|\tilde{x}_k(T_0+\varepsilon_0)-\alpha p_0\|\,\|p_k\|+\beta q_0^*q_k<0.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве и принимая в виду (10), получаем неравенство

$$\alpha\|p_0\|^2-\gamma\|p_0\|+\beta\|q_0\|^2\leqq 0,$$

которое противоречит (9). Следовательно, для любого числа $\varepsilon>0$ при всех достаточно малых $\lambda>0$ выполняется соотношение $O\in K(T_0+\varepsilon, \lambda)$. Из этого уже следует, что для тех же самых λ задача Γ_λ имеет решение и

$$\limsup_{\lambda\to 0} T_\lambda\leqq T_0. \tag{11}$$

Далее рассмотрим случай, когда матрица A_{12} нулевая. Допустим, что существует такая последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ чисел $\lambda_k>0$, для которой $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$, но последовательность $\{T_{\lambda_k}\}_1^\infty$ сходится к числу T_1, которое меньше T_0. Так как замкнутое множество $K_0(T_0)$ содержит в своей внутренности замкнутое множество $K_0((T_0+T_1)/2)$, точка O_n является внешней для множества $K_0((T_0+T_1)/2)$. Пусть $u_k(t)$, $0 \leqq t \leqq T_{\lambda_k}$, — оптимальное управление для задачи Γ_{λ_k} с соответствующей траекторией (x_k, y_k). Так как x_k удовлетворяет соотношениям

$$\dot{x}_k = A_{11}x_k + B_1 u_k(t), \quad x_k(t_0) = v_0, \quad x_k(T_{\lambda_k}) = O_n,$$

то для всех достаточно больших k выполняется $O_n \in K_0((T_0+T_1)/2)$. Достигнутое противоречие вместе с (11) доказывает, что

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} T_\lambda = T_0.$$

Этим доказательство теоремы кончается.

В заключение хочу выразить благодарность А.廷 Дончеву, который при знакомстве с рукописью работы обратил внимание автора на необходимость уточнить формулировку теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. В сб. *Итоги науки и техники. Математический анализ*, **20**, Москва, 1982.
2. Т. Р. Гичев. Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия — условно устойчивый случай. *Сердика*, **9**, 1983, 337—384.
3. Т. Р. Гичев, А. Л. Дончев. Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия. *Прикл. матем. и механ.*, **43**, № 3, 1979.
4. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Москва, 1961.
5. W. D. Collins. Singular perturbations of linear time-optimal control problems. *Recent. Math. Develop. in Control*, London—New York, 1973.

ВИАС, бул. Хр. Смирненски № 1
1000 София Болгария

Поступила 12. 5. 1983