Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ДИСТРИБУТИВНЫЙ ЗАКОН В РЕШЕТКЕ ПОДАЛГЕБР

АЛЕКСАНДР Г. ГЕЙН

Изучается ограниченный дистрибутивный закон в решетке подалгебр линейной алгебры над коммутативным кольцом с 1, удовлетворяющей тождеству $x^2=0$. Доказано, что дистрибутивные пары подалгебр являются дуально дистрибутивными, а нильпотентные дуально стандартные подалгебры стандартны. Найден критерий дистрибутивности решетки подалгебр для алгебры без кручения, а также критерий разложимости решетки подалгебр в прямое произведение.

Через L мы обозначаем линейную алгебру над коммутативным кольцом Φ, принадлежащую многообразию $\mathfrak{L}$, задаваемому тождеством $x^2=0$. Ясно, че $\mathfrak{L}$ содержится в многообразии всех антикоммутативных алгебр и содержит, в свою очередь, многообразие лиевых алгебр над Φ. Мы будем говорить, что алгебра абелева, если $xy=0$ для любых ее элементов x и y. Запись $A\leq L$ $(A\lhd L)$ означает, что A — подалгебра в L (соответственно, идеал). $Z_L(A)=\{l/lA=0\}$ — централизатор множества A в алгебре L. Отметим, что $Z_L(A)$ всегда является подмодулем в L, но не обязательно подалгеброй. $Z(L)=Z_L(L)$ — центр алгебры L. $Z(L)$ — абелев идеал в L.

В силу антикоммутативности алгебры, $L(LL)=(LL)L$, и можно определить $L^n=L^{n-1}L$, считая $L^1=L$.

Пусть $(A:B)=\{\varphi\in\Phi \mid \varphi b\in A$ для любого $b\in B\}$. Если A — подмодуль в L, то $(A:B)$ является идеалом кольца Φ. Вместо $(A:\{x\})$ мы будем писать $(A:x)$, а $(0:x)$ будем обозначать через $Annx$.

$\Gamma x=\{\gamma x \mid \gamma\in\Gamma\}$ является подалгеброй для любого $x\in L$ и $\Gamma\lhd\Phi$. Через $A\vee B$ обозначена верхняя грань элементов A и B в решетке $\mathscr{L}(L)$.

Если алгебра является прямой суммой модулей A и B, то для любого $x\in L$ разложение $x=a+b$, где $a\in A$, $b\in B$, однозначно, так что определены отображения $pr_Ax=a$, $pr_Bx=b$. Если $L=A\oplus B$, а $A\lhd L$ и $B\leq L$, то пишем $L=A\lambda B$. Если, сверх того, $B\lhd L$, то $L=A\times B$.

Будем говорить, что L удовлетворяет идеализаторному условию, если любая ее подалгебра может быть включена в возрастающий идеальный ряд (вообще говоря, трансфинитный), доходящий до L. Нетрудно проверить, что нильпотентные алгебры (т. е. алгебры, некоторая степень которых равна 0) удовлетворяют идеализаторному условию. Очевидно, что идеализаторное условие наследуется подалгебрами.

Алгебру L будем называть конечномерной, если она конечно порождена как Φ-модуль.

Элемент x алгебры L будем называть чистым, если $Annx=0$; в противном случае назовем x периодическим. Множество периодических элементов обозначим через $T(L)$; если Φ — область целостности, то $T(L)\lhd L$. Будем говорить, что L без кручения, если $T(L)=0$, и периодическая, если $T(L)=L$.

Напомним, что два идеала кольца называются взаимно простыми, если их сумма равна всему кольцу.

1. Дистрибутивные пары подалгебр. Пару (A, B) подалгебр A и B алгебры L будем называть дистрибутивной (дуально дистрибутивной), если для всякой подалгебры C из L выполняется равенство $(A \vee B) \cap C = (A \cap C) \vee (B \cap C)$ (соответственно, дуальное равенство).

Сформулируем признаки дистрибутивности пары.

Лемма 1. *Следующие условия эквивалентны*:

(1) пара (A, B) *дистрибутивна*;

(2) *для любого* $x \in A \vee B$ *идеалы* $(A : x)$ *и* $(B : x)$ *взаимно просты*;

(3) *для любых* $a \in A$, $b \in B$ *идеалы* $((A \cap B) : a)$ и $((A \cap B) : b)$ взаимно просты.

Доказательство импликаций (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) практически без изменений переносится из [1, стр. 56, 57]. Для доказательства (3) $\Rightarrow$ (2) заметим, что $1 = \alpha + \beta$, где $\alpha \in ((A \cap B) : a)$, $\beta \in ((A \cap B) : b)$. Следовательно, $a \cdot b = (\alpha a)b + (\beta a)b \in B + A$, т. е. $A \vee B = A + B$. Если теперь $x \in A \vee B$, то $x = a + b$ и достаточно воспользоваться легко проверяемыми равенствами $(A : x) = ((A \cap B) : b)$ и $(B : x) = ((A \cap B) : a)$.

Следствие 1. *Если пара* (A, B) *дистрибутивна, то* $A \vee B = A + B$.

Следствие 2. *Пусть* (A, B) — *дистрибутивная пара подалгебр*.

1. *Если* $A \cap B \lhd B$, *то* $A \lhd A \vee B$.

2. *Если* A *и* B *абелевы, то* $A \vee B$ *абелева*.

Доказательство. В обозначениях доказательства леммы 1 $(\alpha a)b \in A \cap B$. Если же A и B абелевы, то $(\alpha a)b = a(\beta b) = 0$.

Следствие 3. *Если* $\mathscr{L}(L)$ *дистрибутивна, то* L *абелева*.

Тем самым, L, по существу, является модулем с дистрибутивной решеткой подмодулей.

Следствие 4. *Пусть* A, B — *подалгебры* L, $N \lhd L$, $N \leq A \cap B$. *Пара* (A, B) *дистрибутивна (дуально дистрибутивна) в* L *тогда и только тогда, когда пара* $(A/N, B/N)$ *дистрибутивна (дуально дистрибутивна) в* L/N.

Доказательство для дуально дистрибутивных пар, по существу, проведено в [2, стр. 1001]. В случае дистрибутивных пар заметим, что фигурирующие в лемме 1 идеалы $((A \cap B) : a)$ и $((A \cap B) : b)$ не меняются при факторизации по N.

При доказательстве очередного утверждения мы будем использовать следующий факт. Пусть заданы два семейства $\{\theta_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, $\{\Delta_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ идеалов кольца Φ, причем любой идеал первого семейства взаимно прост с любым идеалом второго. Тогда идеалы $\Pi_{i=1}^{k} \theta_i$ и $\Pi_{j=1}^{m} \Delta_j$ также взаимно просты (ср. [3, стр. 70]).

Теорема 1. *Дистрибутивная пара подалгебр дуально дистрибутивна*.

Доказательство. Пусть (A, B) — дистрибутивная пара; C — произвольная подалгебра, содержащая $A \cap B$; $d \in (A \vee C) \cap (B \vee C)$, т. е. $d = c_1 + a_1 + \ldots + c_n \ldots a_i \ldots + \ldots = c_1' + b_1 + \ldots + c_l' \ldots b_j \ldots + \ldots$, где $a_1, \ldots, a_i, \ldots \in A$, $b_1, \ldots, b_j, \ldots \in B$, $c_1, c_1', \ldots, c_n, \ldots, c_l', \ldots \in C$. Пусть $\{a_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, $\{b_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ — все элементы из A и B, соответственно, встречающиеся в указанной записи элемента d. Положим $\theta_i = ((A \cap B) : a_i)$, $\Delta_j = ((A \cap B) : b_j)$. По лемме 1, θ_i и Δ_j взаимно просты для всех i и j. Поэтому существуют ϑ и δ такие, что $\vartheta \in \Pi_{i=1}^{k}\theta_i$, $\delta \in \Pi_{j=1}^{m}\Delta_j$ и $\vartheta+\delta=1$. Ввиду линейности операций $\vartheta d=\vartheta(c_1+a_1+\ldots)\in C$ и $\delta d=\delta(c_1'+b_1+\ldots)\in C$, откуда $d\in C$. Этого достаточно (см. [2, стр. 1001]) для дуальной дистрибутивности пары (A, B).

Лемма 2. *Если пара (A, B) дуально дистрибутивна и $A\cap B\lhd A$, $A\cap B\lhd B$, то $A\vee B=A+B$.*

Доказательство. Действительно, $\Phi a\vee\Phi b\leq\Phi(a+b)\vee A$, $\Phi a\vee\Phi b\leq\Phi(a+b)\vee B$ для любых $a\in A$, $b\in B$. В силу дуальной дистрибутивности, $\Phi a\vee\Phi b\leq(\Phi(a+b)\vee A)\cap(\Phi(a+b)\vee B)=\Phi(a+b)\vee(A\cap B)=\Phi(a+b)+(A\cap B)\subseteq A+B$.

Следующая теорема дает критерий разложимости решетки подалгебр в прямое произведение, аналогичный теореме Джонса для групповых решеток.

Теорема 2. *Пусть A и B — подалгебры в L, для которых $A\cap B=0$, $A\vee B=L$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *пара (A, B) дистрибутивна;*

(2) *пара (A, B) дуально дистрибутивна;*

(3) $\mathscr{L}(L)=\mathscr{L}(A)\times\mathscr{L}(B)$;

(4) *для любых $a\in A$, $b\in B$ идеалы $\mathrm{Ann}\,a$ и $\mathrm{Ann}\,b$ взаимно просты.*

При выполнении условий (1)—(4) алгебры A и B периодичны и $L=A\times B$.

Доказательство. Лемма 1 показывает, что условия (1) и (4) эквивалентны. В силу следствия 2, $L=A\times B$.

Покажем, что (4) влечет (3). Пусть $H\leq L$. Из (1) следует, что $H=(H\cap A)\times(H\cap B)$. Поэтому отображение $H\to(H\cap A, H\cap B)$ является изоморфизмом между $\mathscr{L}(L)$ и $\mathscr{L}(A)\times\mathscr{L}(B)$.

Из (3), очевидно, следует (2).

Ввиду леммы 2 из (2) вытекает, что $A\vee B=A+B$. Рассмотрим произвольную $C\leq L$ и пусть $c=a+b\in(A\vee B)\cap C$, $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$. $a=c-b\in C\vee B$, $b=c-a\in A\vee C$. Поэтому a и b принадлежат $(A\vee C)\cap(B\vee C)=(A\cap B)\vee C=C$. Таким образом, $a\in A\cap C$, $b\in B\cap C$.

Поскольку $\mathrm{Ann}\,a+\mathrm{Ann}\,b=\Phi$, из равенства $\mathrm{Ann}\,a=0$ следовало бы $\mathrm{Ann}\,b=\Phi$, т. е. $b=0$.

Следствие 5. *Пусть A, B — подалгебры в L, $A\cap B\lhd A$, $A\cap B\lhd B$. Пара (A, B) дистрибутивна тогда и только тогда, когде она дуально дистрибутивна.*

Доказательство. Достаточность вытекает из теоремы 1. Если же (A, B) — дуально дистрибутивная пара в L, то в силу леммы 2, $A\vee B=A+B$, и потому $A\cap B\lhd A\vee B$. Следствие 4 показывает, что пара $(A/A\cap B, B/A\cap B)$ дуально дистрибутивна в $A\vee B/A\cap B$. По теореме 2, эта же пара фактор-алгебр дистрибутивна в $A\vee B/A\cap B$. Применяя лемму 1 из [2] и следствие 4, получаем, что (A, B) дистрибутивна в L.

Пара инцидентных подалгебр, очевидно, всегда дистрибутивна. Такую пару будем называть тривиальной. Выясним, когда в алгебре отсутствуют нетривиальные дистрибутивные пары.

Теорема 3. *Алгебра L свободна от нетривиальных дистрибутивных пар тогда и только тогда, когда для любого ненулевого x из L кольцо $\Phi/\mathrm{Ann}\,x$ локально.*

Доказательство. Допустим, что Ψ и Ω — различные максимальные идеалы Φ, содержащие $\mathrm{Ann}\,x$. $\Psi x+\Omega x=\Phi x$, поэтому пара $(\Psi x, \Omega x)$ нетривиальна, и для получения противоречия достаточно показать ее дистрибутивность. Пусть $\lambda x \notin \Phi x$. Очевидно, что $(\Psi x : \lambda x) \supseteq \Psi$, $(\Omega x : \lambda x) \supseteq \Omega$, и теперь осталось применить лемму 1. Наоборот, пусть (A, B) — нетривиальная дистрибутивная пара. Положим $x = a + b$, где $a \in A \setminus B$, $b \in B \setminus A$. По лемме 1, $(A : x) + (B : x) = \Phi$ и, кроме того, $(A : x) \neq \Phi$ и $(B : x) \neq \Phi$ в силу выбора x. Но $(A : x) \supseteq Ann x$, $(B : x) \supseteq Ann x$, что противоречит локальности $\Phi / Ann x$.

Следствие 6. *Если алгебра свободна от нетривиальных дистрибутивных пар, то существует собственный идеал Ξ кольца Φ такой, что $Ann x \subseteq \Xi$ для любого ненулевого x.*

Доказательство. Пусть Ψ — максимальный идеал Φ, содержащий $Ann x$; Ω — максимальный идеал Φ, содержащий $Ann y$, и $\Psi \neq \Omega$. $Ann(x+y) \subseteq (\Phi y : x) \cap (\Phi x : y)$. Поскольку $(\Phi y : x) \supseteq Ann x$; $(\Phi x : y) \supseteq Ann y$, а по теореме 3, Ψ и Ω — единственные максимальные идеалы, содержащие $Ann x$ и $Ann y$ соответственно, то $(\Phi y : x) \subseteq \Psi$, $(\Phi x : y) \subseteq \Omega$. Оказалось, что $Ann(x+y)$ лежит по крайней мере в двух максимальных идеалах, что противоречит теореме 3.

Теорема 4. *Если алгебра L свободна от нетривиальных дуально дистрибутивных пар, то для любого ненулевого x из L кольцо $\Phi / Ann x$ локально. Если алгебра L удовлетворяет идеализаторному условию и для любого x из L кольцо $\Phi / Ann x$ локально, то L свободна от нетривиальных дуально дистрибутивных пар.*

Доказательство. Пусть (A, B) — неинцидентная дуально дистрибутивная пара, $C = A \cap B$ и существуют такие $X \leq A$, $Y \leq B$, что $C \triangleleft X$ и $C \triangleleft Y$. Ясно, что $X \cap Y = C$, и потому (X, Y) — дуально дистрибутивная пара [2, стр. 1002]. Следствие 5 показывает, что (X, Y) — нетривиальная дистрибутивная пара, что противоречит теореме 3.

Прямое утверждение с очевидностью следует из теорем 1 и 3.

Опустить идеализаторное условие в формулировке обратного утверждения теоремы 4 нельзя, что будет видно из следующих примеров.

Пример 1. Пусть $L = (\Phi a \times \Phi b) \lambda \Phi c$, где $ac = \alpha a$, $bc = \beta b$, $\alpha, \beta \in \Phi$. Если $\alpha - \beta$ обратим в кольце Φ, то подалгебры $A = \Phi a \lambda \Phi c$ и $B = \Phi b \lambda \Phi c$ образуют дуально дистрибутивную пару.

Доказательство. Отметим прежде всего, что $A \cap B = \Phi c$, $A + B = L$. Пусть $C \supset \Phi c$ и $x \in C \setminus \Phi c$. Тогда $x = \xi a + \eta b + \zeta c$, $xc = \alpha \xi a + \beta \eta b \in C$. Поскольку $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ обратим, то $\xi a \in C$, $\eta b \in C$, т. е. $pr_{\Phi a} C = \Phi a \cap C$, $pr_{\Phi b} C = \Phi b \cap C$. Ввиду $(\Phi a \cap C) + (\Phi b \cap C) + \Phi c \subseteq C \subseteq \Phi c + pr_{\Phi a} C + pr_{\Phi b} C$, имеем $A \vee C = A + (\Phi b \cap C)$, $B \vee C = B + (\Phi a \cap C)$. Но тогда $(A \vee C) \cup (B \vee C) = (B \cap (A + (\Phi b \cap c))) + (\Phi a \cap c) = (A \cap B) + (\Phi b \cap C) + (\Phi a \cap C) = C$, что достаточно для дуальной дистрибутивности пары (A, B).

Беря в качестве Φ локальное кольцо (например, поле), мы получаем примеры, показывающие, что обращение теоремы 1 неверно, существенны условия $A \cap B \triangleleft A$, $A \cap B \triangleleft B$ в следствии 5 и идеализаторное условие в теореме 4.

Пример 2. Пусть $L = A \times B$, где A и B — конечномерные алгебры Ли над полем Φ. L обладает нетривиальной дуально дистрибутивной парой подалгебр тогда и только тогда, когда L ненильпотентна.

Доказательство. Пусть L ненильпотентна, тогда ненильпотентна либо алгебра A, либо алгебра B. Пусть для определенности это будет A. Следовательно, в A существует максимальная собственная подалгебра M, не являющаяся идеалом (см. [4, стр. 237]). Выберем в B произвольную максимальную подалгебру N и покажем, что пара ($C=A\times N$, $D=B\times M$) дуально дистрибутивна. Заметим, что $C\cap D=M\times N$, $C+D=L$. Пусть $M\times N<F\leq L$, $x\in F\setminus(M\times N)$. Если $pr_A x\notin M$, то $x=a+b$, где $a\in A\setminus M$, $b\in B$. Поскольку $M\triangle A$ и $M\vee\Phi a=A$, найдется такое m, что $am\notin M$, т. е. $M\vee\Phi(am)=A$. Это означает, что $M\vee\Phi x\supseteq M\vee\Phi(am)=A$. Следовательно, $F\supseteq C$, и ввиду максимальности C, либо $F=C$, либо $F=L$.

Если же $pr_A x\in M$ для любого $x\in F\setminus(M\times N)$, то $x=m+b$, где $m\in M$, $b\in B$ и $b\in F\setminus(M\times N)$, т. е. $F=D$ или $F=L$, ибо $N\vee\Phi b=B$ и $M\subseteq F$. Тем самым, интервал $[M\times N;\, L]$ реализуется четырехэлементной решеткой, которая дистрибутивна. По лемме 1 из [2] пара $(C,\, D)$ дуально дистрибутивна.

Обратное утверждение вытекает из нильпотентности L и теоремы 4.

Пример 3. Простая расщепляемая алгебра Ли над полем характеристики 0 обладает нетривиальной дуально дистрибутивной парой подалгебр.

Доказательство. Пусть H — расщепляющая подалгебра Картана простой алгебры P, $M_1=H+\Sigma_{\alpha>0}P_\alpha$ и $M_2=H+\Sigma_{\alpha<0}P_\alpha$, где P_α — α-корневое подпространство. Рассмотрим произвольную подалгебру B, содержащую H, и $x\in B\setminus H$. Можно считать, что $x=\Sigma_{\alpha\in\Lambda}\omega_\alpha(x)e_\alpha$, где $\Phi e_\alpha=P_\alpha$, Λ — некоторое множество корней и все $\omega_\alpha(x)\neq 0$. Положим $X_x=\{x_\Delta \mid x_\Delta=\Sigma_{\alpha\in\Delta}\omega_\alpha(x)e_\alpha\in B,\ \Delta\subseteq\Lambda\}$. Ясно, что $x\in X_x$. Назовем x неразложимым над B, если X_x одноэлементно. Покажем, что x неразложим над B тогда и только тогда, когда Λ одноэлементно. Действительно, если $\alpha_1,\, \alpha_2\in\Lambda$, то существует такой корень β, что $(\alpha_1,\beta)\neq(\alpha_2,\beta)$, т. е. множество чисел $\{(\alpha,\beta)\mid\alpha\in\Lambda\}$ неодноэлементно. Пусть $c_1,\dots,c_n$ — все элементы этого множества, а $\Delta_j=\{\alpha\mid(\alpha,\beta)=c_j,\ \alpha\in\Lambda\}$. Заметим, что $\Sigma_{j=1}^n x_{\Delta_j}=x$, и покажем, что $x_{\Delta_j}\in B$. Действительно, для любого $k>1$ имеем $\Sigma_{j=1}^n c_j^k x_{\Delta_j}=x(adh_\beta)^k\in B$. Коэффициенты при x_{Δ_j} образуют ненулевой определитель Вандер-Монда (при $0\leqq k\leqq h-1$), и потому $x_{\Delta j}\in B$. Таким образом, x оказался разложимым над B. Обратное утверждение очевидно.

Это означает, что $pr_{P_\alpha}B=B\cap P_\alpha$, откуда немедленно вытекает, что $pr_{M_1}B=B\cap M_1$ и $pr_{M_2}B=B\cap M_2$. Рассуждения примера 1 показывают, что этого достаточно для дуальной дистрибутивности пары $(M_1,\, M_2)$.

2. Дистрибутивные и стандартные подалгебры. Элемент D решетки $\mathscr{L}(L)$ называется дистрибутивным, если для любых $A,\, B\in\mathscr{L}(L)$ выполняется равенство $(A\cap B)\vee D=(A\vee D)\cap(B\vee D)$.

Подалгебра S алгебры L называется стандартной (дуально стандартной), если она образует дистрибутивную (соответственно, дуально дистрибутивную) пару с каждой подалгеброй из:

Лемма 3. *Пусть D — дистрибутивный элемент $\mathscr{L}(L)$. Тогда для любого $d\in D$, $l\in L$, $\Gamma\lhd\Phi$ существует $\Sigma\lhd\Phi$ такой, что $D\vee\Gamma l=D\vee\Sigma l$ и $(\Sigma l)d=0$.*

Доказательство. По определению, $D\vee\Gamma l=(D\vee\Gamma l)\cap(D\vee\Gamma(l+d))=D\vee(\Gamma l\cap\Gamma(l+d))$. Обозначим через Σ идеал $(\Gamma(l+d):l)\cap\Gamma$. Тогда $\Gamma l\cap\Gamma(l+d)=\Sigma l$. Кроме того, для любого $\sigma\in\Sigma$ найдется $\gamma\in\Gamma$ такой, что $\sigma l=\gamma(l+d)$. Следовательно, $(\sigma l)d=(\sigma l)(l+d)=\gamma(l+d)(l+d)=0$.

Стандартная подалгебра всегда является дистрибутивным элементом в $\mathscr{L}(L)$ (см. [5, стр. 28]). Кроме того, имеет место

Предложение 1. *Пусть D — дистрибутивный элемент в $\mathscr{L}(L)$. D стандартна тогда и только тогда, когда $D\lhd L$.*

Доказательство. Если $D \triangleleft L$, то по закону Дедекинда, для любых подалгебр A и B выполняется равенство $A \cap (B \vee D) = A \cup (A \vee D) \cap (B \vee D) = A \cap ((A \cap B) \vee D) = A \cup ((A \cap B) + D) = (A \cap B) + (A \cap D)$.

Обратное утверждение вытекает из следствия 2 и того, что $D \cap \Phi x \triangleleft \Phi x$.

Следствие 7. *Пусть D — дистрибутивный элемент в $\mathscr{L}(L)$. Если D конечномерна, то D стандартна и $L = D + Z_L(D)$.*

Доказательство. Пусть $d_1, \ldots, d_n$ порождают D как модуль над Φ. Применяя n раз лемму 3, мы для любого $l \in L$ построим идеал Σ такой, что $D \vee \Phi l = D \vee \Sigma l$ и Σl централизуется всеми d_i. Но тогда $(\Sigma l) D = 0$, т. е. $l = d + \sigma l$, где $d \in D$, $\sigma \in \Sigma$. Следовательно, $L = D + Z_L(D)$ и $D \triangleleft L$.

Теорема 1 показывает, что стандартные подалгебры автоматически являются дуально стандартными и, следовательно, нейтральными элементами решетки подалгебр (см. [5, стр. 41]). В частности стандартные подалгебры обладают всеми свойствами дуально стандартных.

Лемма 1. *Центр дуально стандартной подалгебры лежит в центре всей алгебры.*

Доказательство. Пусть S — дуально стандартная подалгебра в L, $z \in Z(S)$, $l \in L$. Тогда $\Phi z \vee \Phi l = (\Phi(z+l) \vee S) \cap (\Phi(z+l) \vee \Phi l) = \Phi(z+l) \vee (S \cap \Phi l)$. Поскольку $S \cap \Phi l = \Gamma l$, где $\Gamma = (S : l)$, то для любого $\gamma \in \Gamma$ имеет место равенство $(l+z)(\gamma l) = z(\gamma l) = 0$. Следовательно, $\Phi z \vee \Phi l = \Gamma l + \Phi(l+z)$. Поэтому $z = \alpha(l+z) + \gamma l$ и $zl = z(l+z) = \gamma l(l+z) = 0$.

Рассуждениями работы [6, стр. 50, 51] доказывается

Лемма 5. *Подалгебра S стандартна тогда и только тогда, когда она образует дистрибутивную пару с любой подалгеброй, порожденной одним элементом.*

Предложение 2. *Пусть S и T — подалгебры в L, для которых $S \vee T = L$. S стандартна в L тогда и только тогда, когда S и T образуют дистрибутивную пару, а $S \cap T$ стандартна в T.*

Доказательство. Необходимость условий вытекает из определения стандартной подалгебры и леммы 9 из [5].

Достаточность. Покажем, что для любой $A \leq T$ пара (S, A) дистрибутивна. Рассмотрим произвольные элементы $s \in S$, $a \in A$. По лемме 1, $((S \cap T) : s) + ((S \cap T) : a) = \Phi$, т. е. существуют $\alpha \in ((S \cap T) : s)$, $\lambda \in ((S \cap T) : a)$, для которых $\alpha + \lambda = 1$; $\alpha s \in S \cap T$, поэтому снова по лемме 1, ввиду стандартности $S \cap T$ в T, найдутся такие $\beta \in ((S \cap T \cap A) : \alpha s)$, $\mu \in ((S \cap T \cap A) : a)$, что $\beta + \mu = 1$. Отсюда $\alpha\beta + (\beta\lambda + \mu) = 1$, а $\alpha\beta \in ((S \cap A) : s)$, $\beta\lambda + \mu \in ((S \cap A) : a)$, ибо $((S \cap T) : a) = ((S \cap A) : a)$. Еще раз применяя лемму 1, получаем дистрибутивность пары (S, A).

Рассмотрим теперь произвольный элемент $l \in L$. Поскольку $L = S + T$ (следствие 1), найдутся такие $s \in S$, $t \in T$, что $l = S + t$. По лемме 1, так как $(S, \Phi t)$ — дистрибутивная пара, $(S : l) + (\Phi t : l) = \Phi$. Обозначим $(\Phi t : l)$ через Γ $\Gamma l \leq T$, поэтому для любой $K \leq L$ имеет место $K \cap (S \vee \Phi l) = K \cap (S \vee \Gamma l) = (K \cap S) \vee (K \cap \Gamma l) \leq (K \cap S) \vee (K \cap \Phi l)$. Учитывая всегда верное соотношение $(K \cap (S \vee \Phi l)) \geq (K \cap S) \vee (K \cap \Phi l)$ и лемму 5, получаем стандартность S.

Теорема 5. *Нильпотентная дуально стандартная подалгебра стандартна.*

Доказательство проведем индукцией по ступени нильпотентности дуально стандартной подалгебры S.

Пусть S абелева. Рассмотрим произвольную моногенную подалгебру Φx всей алгебры L. Пара $(S, \Phi x)$ дуально дистрибутивна и $S \cap \Phi x \triangleleft S$,

$S\cap\Phi x\lhd\Phi x$. Согласно следствию 5, $(S, \Phi x)$ дистрибутивна. По лемме 5, S стандартна.

Пусть S^n — последний ненулевой член ряда степеней алгебры S. По лемме 4, $S^n\subseteq Z(S)\subseteq Z(L)$, т. е. $S^n\lhd L$. Очевидно, что S/S^n дуально стандартна в L/S^n. По предположению индукции, S/S^n стандартна в L/S^n.

Рассмотрим произвольную подалгебру Φx. Положим $T=S^n+\Phi x$. В силу следствия 4, (S, T) — дистрибутивная пара, ибо такова $(S/S^n, T/S^n)$ в L/S^n. По закону Дедекинда, $S\cap T=S^n+(\Phi x\cap S)$. $S\cap T$ дуально стандартна в T (см. [7, стр. 442]) и абелева, так как $S^n\subseteq Z(L)$. Следовательно, она стандартна в T, а S по предложению 2 стандартна в $S\vee\Phi x$. По лемме 5, S стандартна в L.

Однако, понятия стандартной и дуально стандартной подалгебр не совпадают.

Пример 4. Пусть Φ — подкольцо кольца рациональных чисел $\mathbf{Q}$, состоящее из чисел с нечетным знаменателем. Рассматривая $\mathbf{Q}$ как абелеву алгебру над Φ, построим $L=(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\lambda\Phi l$, полагая $(q_1;\ q_2)l=(0{,}125\,q_2;\ q_1)$, где $(q_1;\ q_2)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$. Легко убедиться, что L — алгебра Ли. Идеал Γ кольца Φ, порожденный элементом 2, является, очевидно, единственным максимальным собственным идеалом в Φ. Проверим, что если $q\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ и $q\neq 0$, то $\langle q,\ 2l\rangle=(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\lambda\Gamma l$ и $\langle q, l\rangle=L$. Действительно, пусть $q=(q_1;\ q_2)$; тогда $(q\,.\,2l)2l=4(0{,}125q_1;\ 0{,}125q_2)=0{,}5q$. Учитывая строение кольца Φ, получаем, что вся рациональная прямая $\mathbf{Q}q$ лежит в $\langle q,\ 2l\rangle$. С другой стороны, $r=q\,.\,2l$ линейно не зависит от q над полем $\mathbf{Q}$. В самом деле, если $r=\alpha q$, где $\alpha\in\mathbf{Q}$, то $0{,}5q=(q\,.\,2l)2l=r\,.\,2l=\alpha q\,.\,2l=\alpha^2q$, т. е. $\alpha^2=0{,}5$, чего не может быть. Таким образом, $\mathbf{Q}r$ также целиком лежит в $\langle q,\ 2l\rangle$, причем $\mathbf{Q}q\oplus\mathbf{Q}r$ — двумерное подпространство, лежащее в $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ и потому совпадающее с $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$. Поскольку Γ порожден 2, $\langle q,\ 2l\rangle$ $(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\lambda\Gamma l$ и $\langle q, l\rangle=L$.

Покажем, что подалгебра $S=(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\lambda\Gamma l$ дуально стандартна в L. Пусть A и B — произвольные подалгебры из L; проверим равенство

$$(*)\qquad (S\cap A)\vee B=(S\vee B)\cap(A\vee B).$$

Оно, очевидно, выполняется, если A и S инцидентны. Пусть A и S неинцидентны. Тогда $pr_{\Phi l}A=\Phi l$, ибо в противном случае $pr_{\Phi l}A\subseteq\Gamma l$, откуда $A\subseteq(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\lambda\Gamma l=S$. Рассмотрим элемент $x\in A$, для которого $pr_{\Phi l}x=l$. Если $A\neq\Phi x$, пусть $y\in A\setminus\Phi x$. Можно считать, что $y\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$. Но тогда $\langle x, y\rangle=L$, ибо $adx\,|_{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}=adl\,|_{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}$. Поэтому $A=L\supset S$. Следовательно, $A=\Phi x$. Отметим, что в этом случае $L=(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\lambda\Phi x$ и $S=(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\lambda\Gamma x$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $A=\Phi l$. Тогда $S\cap A=\Gamma l$.

Перейдем теперь к алгебре B. Равенство $(*)$ очевидно, если $S\subseteq B$ или $A\subseteq B$.

Пусть $B\subset S$. Если $pr_{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}B\neq 0$, то $(S\cap A)\vee B=\Gamma l\vee B\supseteq(\mathbf{Q}\times\mathbf{Q})\lambda\Gamma l=S$. Но $(S\cap A)\vee B\subseteq S$, так что левая часть $(*)$ равна S. Ясно, что $A\vee B=L$, а $S\vee B=S$, т. е. правая часть тоже равна S. Если же $pr_{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}B=0$, то $B\subseteq\Gamma l$. Поэтому $(S\cap A)\vee B=\Gamma l$ и $(S\vee B)\cap(A\vee B)=S\cap\Phi l=\Gamma l$.

Пусть, наконец, B и S неинцидентны. Тогда $B=\Phi x$ и $pr_{\Phi l}x=l$. Если $pr_{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}x=0$, то $x=l$ и $A=B$. Поэтому пусть $x=q+l$, где $q\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$, $q\neq 0$. Тогда $(S\cap A)\vee B=\Gamma l\vee\Phi x=L$ и $S\vee B=L$, $A\vee B=L$, т. е. $(*)$ снова верно.

Итак, S дуально стандартна. Однако, L по теореме 3, не имеет нетривиальных дистрибутивных пар, ибо Φ локально. Следовательно, S не является стандартной подалгеброй, так как пара $(S, \Phi l)$ нетривиальна и потому недистрибутивна.

Мы продолжим изучение дистрибутивных элементов решетки $\mathscr{L}(L)$ при дополнительных ограничениях на кольцо Ф.

Лемма 6. *Пусть Ф — область целостности, D — дистрибутивный элемент в $\mathscr{L}(L)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) L периодична;

(2) D периодична;

(3) *не все периодические элементы из L лежат в D.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть d — чистый элемент из D, l — периодический элемент из $L\diagdown D$. Тогда $\Phi(d+l)\cap\Phi l=0$. Поэтому $D=D\vee(\Phi(d+l)\cap\Phi l)=(D\vee\Phi(d+l))\cap(D\vee\Phi l)=D\vee\Phi l$, что противоречит выбору l.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $d\in D$, $d\neq 0$, l — чистый элемент из L. Очевидно, что $\Phi(d+l)\cap\Phi l=(Annd)l$. Пользуясь дистрибутивностью D, получаем $D\vee(Annd)l=D\vee\Phi l$, т. е. $l=d_1+\alpha_1 l+\alpha_2 d_2 l+\ldots$, где $d_1, d_2, \ldots\in D$ $\alpha_1, d_2, \ldots\in Annd$. Поэтому $ld=d_1 d\in D$ и так как d выбирался произвольно, то можно рассматривать алгебру $K=D\vee\Phi l=D\lambda\Phi l$. D, очевидно, является дистрибутивным элементом в $\mathscr{L}(K)$ и, поскольку $D\lhd K$, по предложению 1, D стандартна в K. По теореме 2, $Annl\neq 0$.

Следствие 8. *Если алгебра над областью целостности обладает дистрибутивной решеткой подалгебр, то она либо периодична, либо не имеет кручения.*

Предложение 3. *Пусть L — непериодическая алгебра над областью целостности Ф, D — дистрибутивный элемент $\mathscr{L}(L)$. Тогда $L^2\subseteq T(L)\subset D$ стандартна, любые два чистые элемента из L линейно зависимы, L/D периодична и для любых $t\in T(L)$, $\bar{l}\in L/D$ идеалы $Ann\, t$ и $Ann\,\bar{l}$ взаимно просты.*

Доказательство. Из леммы 6 вытекает, что $T(L)\subset D$. Пусть $d\in D\diagdown T(L)$, $l\in L\diagdown D$. Покажем, что $\Phi d\cap\Phi l\neq 0$. Если это не так, то ввиду чистоты d и l, $\Phi(l+d)\cap\Phi l=0$ и, следовательно, $D=D\vee(\Phi(d+l)\cap\Phi l)=(\Phi(d+l)\vee D)\cap(D\vee\Phi l)=D\vee\Phi l$, что противоречит выбору l. Теперь уже нетрудно показать, что для любых чистых элементов x, y алгебры L $\Phi x\cap\Phi y\neq 0$. Но это означает, что $Ann\, x\circ y\supseteq(\Phi x:y)+(\Phi y:x)\neq 0$. Следовательно, $L^2\subseteq T(L)$. По предложению 1, D стандартна, и остальные свойства вытекают теперь из леммы 1.

Следствие 9. *Пусть L — непериодическая алгебра над областью целостности Ф, S — собственная стандартная подалгебра. Если S нильпотентна, то L также нильпотентна.*

Доказательство вытекает из того, что L/S абелева, а по лемме 4, S лежит в гиперцентре алгебры L.

Ясно, что говорить об алгебре без кручения можно лишь в том случае, если Ф — область целостности. Пусть M — модуль без кручения, а Λ — поле частных кольца Ф. Как известно (см. [3, стр. 124]), M канонически отождествляется с Ф-подмодулем в $M\otimes_\Phi\Lambda$. С другой стороны, $M\otimes_\Phi\Lambda$ является векторным пространством над Λ. Если теперь любые два элемента из M линейно зависимы над Ф, то пространство $M\otimes_\Phi\Lambda$ одномерно. Следовательно, в этом случае M может быть отождествлено с некоторым Ф-подмодулем поля частных кольца Ф. Таким образом, нами доказано

Предложение 4. *Если алгебра без кручения обладает собственной стандартной подалгеброй, то она абелева и является Ф-подмодулем поля частных кольца Ф.*

Если Ф — прюферово кольцо, не являющееся полем (см. [3, стр. 583]), то указанные условия не только необходимы, но и достаточны, как показывает

Теорема 6. *Пусть L — алгебра без кручения. Решетка ее подалгебр дистрибутивна тогда и только тогда, когда L абелева, Ф — прюферово кольцо и L изоморфно вкладывается в поле частных кольца Ф, рассматриваемое как Ф-модуль.*

Доказательство. Поскольку Φx и Ф изоморфны как Ф-модули, Ф прюферово. Остальная часть прямого утверждения вытекает из предложения 4.

Обратно. Пусть L — некоторый Ф-подмодуль поля частных кольца Ф. Из теоремы 2 работы [1] следует, что L можно считать конечнопорожденной. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — порождающее множество. Учитывая строение поля частных, можно считать $\lambda_i = \varphi_i/\gamma$, где $\varphi_i \in \Phi$, $\gamma \in \Phi$. Рассмотрим идеал Ψ кольца Ф, порожденный элементами $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Нетрудно видеть, что отображение $L \to \Psi$, определенное для любого $\lambda \in L$ как $\lambda \to \gamma\lambda$, является изоморфизмом L и Ψ как Ф-модулей. Это означает, что L имеет дистрибутивную решетку Ф-подмодулей, ибо такова решетка у Ψ.

Отметим еще, что в случае колец главных идеалов вопрос о дистрибутивности решетки для модулей полностью решен в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Menzel. Über den Untergruppenverband einer Abelschen Operatogruppe. Teil II *Math. Z.*, **74**, 1960, 52—65.
2. П. Г. Конторович, С. Г. Иванов, Г. П. Кондрашов. Дистрибутивные пары элементов в структуре. *ДАН СССР*, **160**, 1965, 1001—1003.
3. Н. Бурбаки. Коммутативная алгебра. Москва, 1971.
4. D. W. Barnes. Nilpotency of Lie Algebras. *Math. Z.*, **79**, 1962, 287—238.
5. G. Grätzer, E. Schmidt. Standart ideals in lattices. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12**, 1961, 17—86.
6. С. Г. Иванов. Стандартные подгруппы. *Матем. записки Уральского университета*, **5**, 1966, 49—55.
7. С. Г. Иванов. Стандартные и дуально стандартные элементы решетки подгрупп группы. *Алгебра и логика*, **8**, 1969, 440—446.
8. W. Menzel. Ein Kriterium fur die Distributivität des Untergruppenverbandes ein Abelschen Operatorgruppe. *Math. Z.*, 75, 1961, 271—276.

СССР 620083 Свердловск
Мат.-мех. факультет
Уральский госуниверситет

Поступила 20. 1. 1984