Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О МИНИМУМЕ ЧИСЛА 3-АНТИКЛИК В n-ВЕРШИННЫХ ГРАФАХ БЕЗ 3-КЛИК

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ, НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ

Лорден [1] определил все n-вершинные графы без 3-клик и с минимальным числом 3-антиклик при $n \geq 12$. При $n=6$ это сделано Харари [2], при $n=7$ — в [3], при $n=8$ — в [4]. В настоящей заметке эта задача решается при $n=9$, 10, 11.

Будем рассматриаать только обыкновенные графы. Любое множество попарно смежных (несмежных) вершин называется кликой (антикликой). Будем говорить, что n-вершинный граф G является *графом типа Лордена*, если множество всех его вершин разбивается в объединение $[n/2]$-антиклики и $[n+1/2]$-антиклики, причем эти две антиклики содержат все 3-антиклики графа, иными словами, вершины можно обозначить буквами $a_1, a_2, \ldots, a_{[n/2]}, b_1, b_2, \ldots, b_{[n+1/2]}$, так что $\{a_1, a_2, \ldots, a_{[n/2]}\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_{[n+1/2]}\}$ — антиклики, и вершина a_i может быть несмежной только вершине b_i, $1 \leqq i \leqq [n/2]$. Очевидно, число неизоморфных n-вершинных графов типа Лордена равно $[n/2]+1$. Любой из них, не имея 3-клик, содержит ровно $\binom{[n/2]}{3}+\binom{[n+1/2]}{3}$ 3-антиклик. Лорден [1] доказал, что при $n \geqq 12$ это единственные n-вершинные графы без 3-клик, обладающие минимальным числом 3-антиклик. Существует единственный 5-вершинный граф без 3-клик и 3-антиклик (см. рис. 1). В [1] утверждается без доказательства, что кроме 6-вершинных графов типа Лордена имеются ровно два других 6-вершинных графа без 3-клик и с минимальным числом 3-антиклик (только 2), однако Харари [2] доказал, что есть только один такой исключительный граф (на рис. 2 изображен его дополнительный граф). 7-вершинные графы типа Лордена не являются экстремальными, потому что любой из них содержит пять 3-антиклик, однако, как показал Эрдеш (см. Сове [5]), имеется 7-вершинный граф без 3-клик, содержащий только четыре 3-антиклики (на рис. 3 изображен дополнительный граф). В [1] без доказательства утверждается, что это единственный 7-вершинный граф без 3-клик, который имеет минимальное число 3-антиклик. На этот раз высказанное утверждение верно (см. [3], стр. 22). 8-вершинные графы типа Лордена имеют по восемь 3-антиклик. В [1] утверждается без доказательства, что, кроме них, имеется только еще один экстремальный граф. Это неверно. В [4] доказано, что есть точно два 8-вершинные графа без 3-клик и с минимальным числом 3-антиклик (равным 8), отличные от графов типа Лордена. Их дополнительные графы приводятся на рис. 4.

Цель настоящей заметки — найти все n-вершинные графы без 3-клик, обладающие минимальным числом 3-антиклик для $n=9$, 10, 11. Весьма любопытен факт, что их нахождение затруднительнее, чем при $n \geqq 12$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 11, 1985, с. 251—258.

9-вершинные графы типа Лордена имеют по 14 3-антиклик. Однако в [1] указан пример 9-вершинного графа без 3-клик, имеющий только 13 3-антиклик (его дополнительный граф изображен на рис. 5). Оказывается, это единственный 9-вершинный граф без 3-клик и с минимальным числом 3-анти-

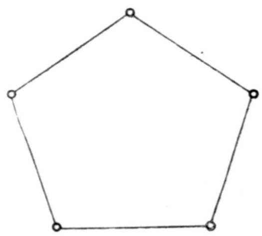


Рис. 1. Единственный 5-вершинный граф без 3-клик и 3-антиклик

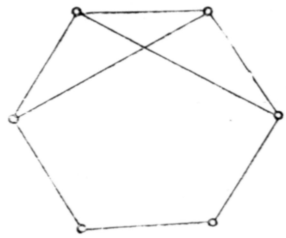


Рис. 2. Дополнительный граф единственного 6-вершинного графа без 3-клик и с минимальным числом 3-антиклик (только две), отличного от 6-вершинных графов типа Лордена

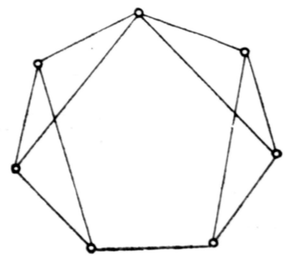


Рис. 3. Дополнительный граф единственного 7-вершинного графа без 3-клик и минимальным числом 3-антиклик (только четыре)

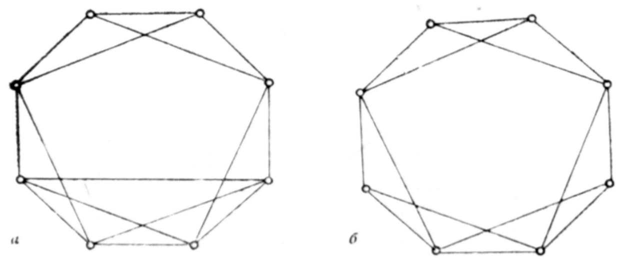


Рис. 4. Дополнительные графы единственных 8-вершинных графов без 3-клик и с минимальным числом 3-антиклик (восемь), отличных от 8-вершинных графов типа Лордена

клик, утверждение, высказанное в [1] без доказательства и доказанное здесь (см. теорему 1).

10-вершинные графы типа Лордена имеют по 203-антиклик. В [1] высказано без доказательства утверждение, что, кроме них, нет других 10-вершинных графов без 3-клик и с не более 20 3-антиклик. Это утверждение неверно. В теореме 1 доказано, что существует единственный 10-вершинный граф без 3-клик и с минимальным числом 3-антиклик, равным 20, не являющийся графом типа Лордена (на рис. 6 изображен его дополнительный граф).

11-вершинные графы типа Лордена имеют по 30 3-антиклик. В теореме 3 доказано, что, кроме них, имеются в точности два 11-вершинных графов без 3-клик и с минимальным числом 3-антиклик, равным 30 (их дополнительные графы изображены на рис. 7). В [1] эти экстремальные графы не указаны, однако утверждается без доказательства их существование.

Для доказательства объявленных результатов воспользуемся следующим простым равенством. Пусть G — обыкновенный граф, $d(v)$ — степень вершины v, $\Delta(G)$ — сумма чисел 3-клик и 3-антиклик графа G. Тогда

$$\Delta(G)+\frac{1}{2}\sum_{v} d(v)(n-1-d(v))=\binom{n}{3}. \tag{1}$$

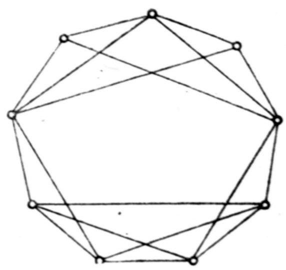


Рис. 5. Дополнение единственного 9-вершинного графа без 3-клик и с минимальным числом 3-антиклик (тринадцать)

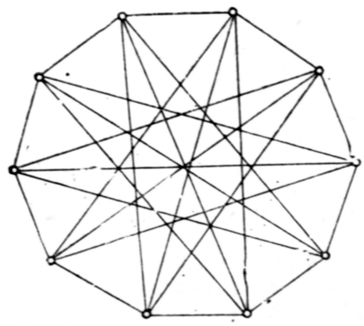
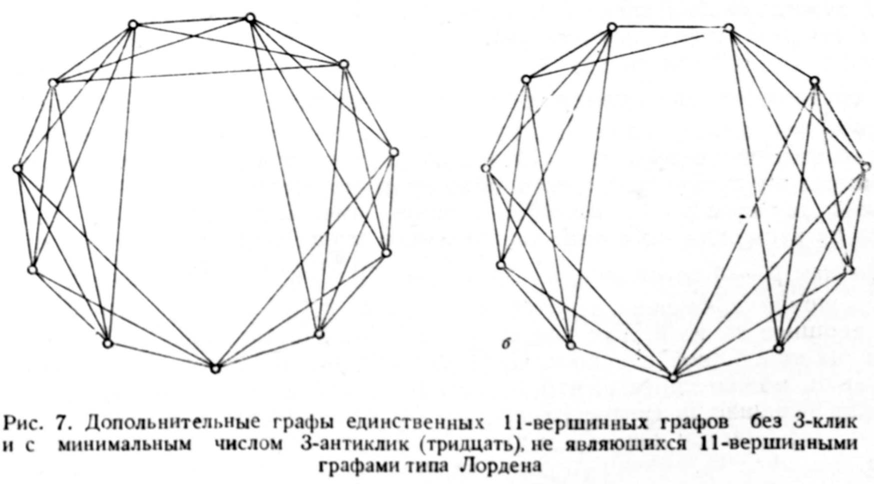


Рис. 6. Дополнение единственного 10-вершинного графа без 3-клик и с минимальным числом 3-антиклик (двадцать), отличного от 10-вершинных графов типа Лордена



б

Рис. 7. Дополнительные графы единственных 11-вершинных графов без 3-клик и с минимальным числом 3-антиклик (тридцать), не являющихся 11-вершинными графами типа Лордена

Это равенство содержится в [1], однако в несколько иной форме оно включено еще в [6], где использовано для нахождения минимума Δ при данном n. В нашем случае нет 3-клик, так что $\Delta(G)$ является числом 3-антиклик.

Теорема 1. *Любой 9-вершинный граф без 3-клик имеет хотя бы 14 3-антиклик за исключением графа на рис. 8, который имеет только 13 3-антиклик.*

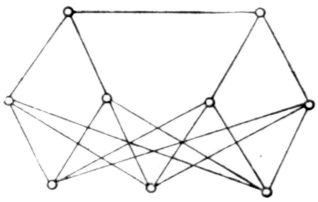


Рис. 8

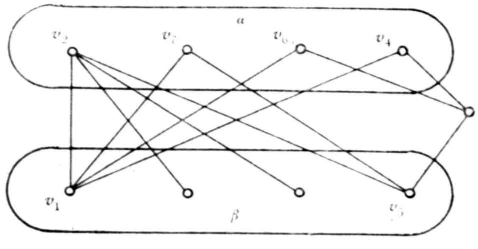


Рис. 9

Доказательство. Граф на рис. 8 (его дополнительный изображен на рис. 5) не имеет 3-клик и содержит ровно 13 3-антиклик. Пусть G — 9-вершинный граф без 3-клик. Положим $\varepsilon(v)=d(v)=4$ и из (1) получим

$$\Delta(G)=12+\frac{1}{2}\sum_{v}\varepsilon^2(v). \tag{2}$$

Если для вершины v имеем $|\varepsilon(v)|>1$, тогда из (2) следует, что $\Delta(G)\geqq 14$. В дальнейшем будем считать, что $|\varepsilon(v)|\leqq 1$ для любой вершины v. Если найдутся три вершины v, для которых $|\varepsilon(v)|=1$, тогда из (2) следует тоже, что $\Delta(G)\geqq 14$. В дальнейшем будем считать, что имеется хотя бы 7 вершин v, для которых $\varepsilon(v)=0$, а для остальных вершин u выполнено $|\varepsilon(u)|=1$. Если между упомянутыми семью вершинами v нет смежных, они составляют 7-антиклику и, следовательно, $\Delta(G)\geqq\binom{7}{3}>14$. Поэтому будем считать, что между ними имеется пара смежных v_1 и v_2. Так как вершины v_1 и v_2 имеют степень 4, то существует единственная вершина v_3, которая несмежна ни v_1, ни v_2. Через α обозначим множество вершин, смежных вершине v_1, а через β — множество вершин, смежных вершине v_2. Если вершина v_3 несмежна ни одной вершине из α, то $\alpha\cup\{v_3\}$ является 5-антикликой, и так как β — 4-антиклика, то $\Delta(G)\geqq\binom{5}{3}+\binom{4}{3}=14$. Поэтому будем считать, что вершина v_3 смежна некоторой вершине v_4 из α и, аналогично, некоторой вершине v_5 из β. Так как $d(v_3)=4+\varepsilon(v_3)\geqq 3$, то вершина v_3 смежна хотя бы еще одной вершине. Из-за симметрии множеств α и β в настоящей ситуации, можно считать, что v_3 смежна вершине v_6 из α. Вершина v_5 несмежна вершине v_4 (иначе $\{v_3, v_4, v_5\}$ будет 3-кликой) и вершине v_6 (иначе $\{v_3, v_5, v_6\}$ будет 3-кликой), и так как $d(v_5)\geqq 3$, то она смежна вершине v_7 из α (см. рис. 9), однако другим вершинам смежной быть не может, так что $d(v_5)=3$. Докажем, что $d(v_3)=3$. Действительно, если допустить $d(v_3)>3$, так как v_3 несмежна v_7 (иначе $\{v_3, v_5, v_7\}$ будет 3-кликой), то вершина v_3 смежна некоторой вершине v_8 из β. Вершина v_4 несмежна v_5 (иначе $\{v_3, v_4, v_5\}$ будет 3-кликой) и v_8 (иначе $\{v_3, v_4, v_8\}$ будет 3-кликой) и, следовательно, $d(v_i)\leqq 3$. Тем же образом доказывается, что $d(v_6)\leqq 3$. В графе G найдены 3 вершины, v_4, v_5 и v_6, для которых $d(v_i) \leqq 3$, что противоречит сделанному выше допущению. Итак, доказано, что $d(v_3) = 3$. В G не могут быть другие вершины степени 3, кроме v_3 и v_5 и, следовательно, $d(v_4 = d(v_6) = d(v_7) = 4$. Тогда вершины v_4, v_6 и v_7 смежны двум вер-

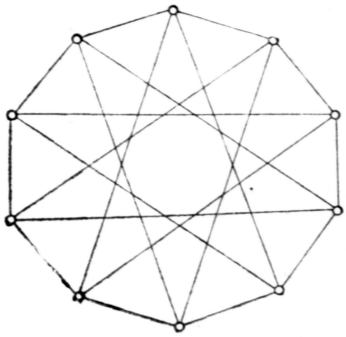


Рис. 10

шинам множества $\beta \diagdown \{v_1, v_5\}$ и, следовательно, G изморфен графу на рис. 8. Теорема доказана.

Теорема 2. *Любой 10-вершинный граф без 3-клик имеет хотя бы 21 3-антиклику за исключением графов типа Лордена (их ровно 6) и, кроме того, графа на рис. 10, которые имеют по 20 3-антиклик.*

Доказательство. Граф на рис. 10 не имеет 3-клик и содержит 20 3-антиклик. Его дополнительный граф изображен на рис. 6. Пусть G — 10-вершинный граф без 3-клик. Положим $\varepsilon(v) = d(v) - 4$. Из равенства (1) следует

$$\Delta(G) = 20 + \frac{1}{2} \sum_v (\varepsilon^2(v) - \varepsilon(v)),$$

и так как $\varepsilon^2(v) \geqq \varepsilon(v)$, то $\Delta(G) \geqq 20$. Пусть G — 10-вершинный граф без 3-клик и $\Delta(G) = 20$. Тогда $\varepsilon(v) = 0$ или 1 для любой вершины v и, следовательно, $d(v) = 4$ или 5. Надо доказать, что G — граф типа Лордена или изоморфен графу на рис. 10. Рассмотрим отдельно два случая.

I. В G имеется 5-антиклика.

Обозначим через α 5-антиклику, а через ρ — множество остальных вершин. Докажем, что β — антиклика. Если некоторая вершина u из β несмежна ни одной вершине из α, то вершины из α, будучи несмежными между собою и вершине u и имея степени не меньше 4, должны быть смежными всем вершинам из $\beta \diagdown \{u\}$, так как их не больше 4. Тогда всякая из вершин множества $\beta \diagdown \{u\}$ смежна всем вершинам из α и, следовательно, эти вершины несмежны между собой и вершине u. Оказывается, β — антиклика, что требовалось доказать. Но мы рассмотрели только случай, когда некоторая вершина множества β несмежна ни одной вершине множества α. Теперь уже будем предполагать, что вершина из β смежна хотя бы одной вершине из α, и снова докажем, что β является антикликой. Сначала докажем, что всякая вершина из β смежна хотя бы трем вершинам из α. Пусть $u \in \beta$ и v — смежная ей вершина из α. Вершина v имеет хотя бы 14 смежных ей вершин и, разумеется, все они из β. Одна из этих вершин — u. Вершина u не может быть смежной остальным, потому что в G нет 3-клик. Таким образом ясно, что вершина u не может быть смежной более одной вершине из β, и так как имеет хотя бы 4 смежных ей вершин, то она должна быть смежной хотя бы трем вершинам из α, что и требовалось доказать. Остается доказать, что никакие две вершины из β несмежны между собой. Это так, потому что для любой пары вершин из β в α есть вершина, смежная одновременно обеим вершинам пары (иначе в α должно существовать хотя бы 6 вершин) и, следовательно, вершины рассматриваемой пары несмежны между собой.

Итак, α и β — дизъюнктные 5-антиклики. Так как $4 \leqq d(v) \leqq 5$ для любой вершины v графа, то он, очевидно, является графом типа Лордена.

II. В G нет ни одной 5-антиклики.

Теперь все вершины имеют степень 4. Пусть v_1— вершина графа и $\alpha=\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ — смежные ей вершины, а $\beta=\{v_1, v_6, v_7, v_8\}$ — вершины, смежные вершине v_2. Остальные две вершины v_9 и v_{10} несмежны ни вершине v_1, ни вершине v_2. Так как в G нет 5-антиклик, то можно считать, что v_9 смежна вершинам v_5 и v_8. Вершина v_9 имеет еще две смежные вершины; без ограничения общности можно считать, что v_9 смежна вершине v_4. Вершина v_8 несмежна вершине v_4 (иначе $\{v_4, v_8, v_9\}$ будет 3-кликой) и вершине v_5 (иначе $\{v_5, v_8, v_9\}$ будет 3-кликой). Однако вершина v_8, кроме вершин v_2 и v_9, должна иметь еще две смежные вершины и, следовательно, смежна вершинам v_3 и v_{10}. Вершина v_{10} несмежна вершине v_9 (иначе $\{v_8, v_9, v_{10}\}$— 3-клика) и вершине v_3 (иначе $\{v_3, v_8, v_{10}\}$ — 3-клика) и, следовательно, может быть смежной только вершинам v_4 и v_5 из α, что показывает, что она смежна хотя бы одной вершине из β, отличной от v_8 и, разумеется v_1. Без ограничения общности можно считать, что v_{10} смежна вершине v_7 (см. рис. 11). Вершина v_{10} имеет еще две смежные вершины, а может быть смежной не более чем еще одной вершине из β. Следовательно, она смежна хотя бы одной из вершин v_4 и v_5. Так как обе эти вершины играют одинаковую роль (рис. 11), то будем считать, что v_{10} смежна v_5. Вершина v_5 несмежна вершине v_7 (иначе $\{v_5, v_7, v_{10}\}$ — 3-клика} и вершине v_8 (иначе $\{v_5, v_8, v_{10}\}$ — 3-клика) и, следовательно, смежна v_6. Вершина v_9 несмежна v_6 (иначе $\{v_5, v_6, v_9\}$ — 3-клика) и v_3 (иначе $\{v_3, v_8, v_9\}$ — 3-клика) и, следовательно, смежна v_7. Вершина v_{10} несмежна v_6 (иначе $\{v_5, v_6, v_{10}\}$ — 3-клика) и v_3 (иначе $\{v_3, v_8, v_{10}\}$ — 3-клика) и, следовательно, смежна v_4. Для вершины v_3 остается быть смежной v_6 и v_7. Остается только заметить, что вершины v_6 и v_4 должны быть смежными.

Оказывается, граф G изоморфен графу на рис. 12, который в свою, очередь изоморфен графу на рис. 10. Теорема 2 доказана.

При рассмотрении доказательства случая II легко заметить, что на самом деле доказана единственность 4-регулярного 10-вершинного графа без 3-клик и 5-антиклик.

Теорема 3. *Все 11-вершинные графы без 3-клик имеют хотя бы 31 3-антиклику за исключением 11-вершинных графов типа Лордена (их ровно 6) и, кроме того, графов на рис. 13, которые имеют по 30 3-антиклик.*

Доказательство. Пусть G — 11-вершинный граф без 3-клик. Положим $\varepsilon(v)=d(v)-5$ и из (1) получим

$$\Delta(G)=27{,}5+\frac{1}{2}\sum_{v}\varepsilon^2(v). \tag{3}$$

Если в G есть хотя бы 6 вершин v, для которых $\varepsilon(v)\neq 0$, тогда из (3) следует $\Delta(G)\geqq 31$ и утверждение доказано. Поэтому будем считать, что в G

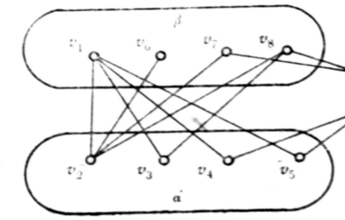


Рис. 11

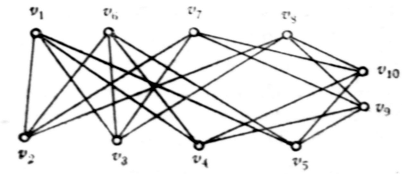


Рис. 12

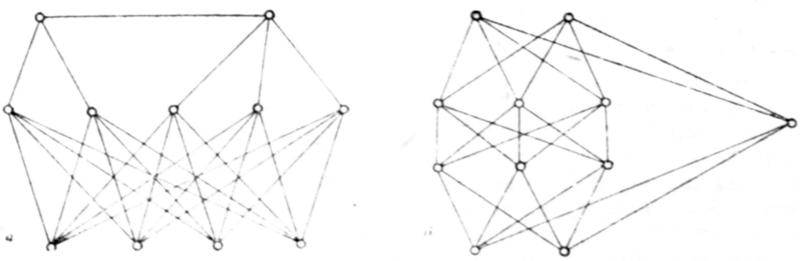


Рис. 13

имеется 6 вершин v, для которых $\varepsilon(v)=0$, т. е. $d(v)=5$. Если эти вершины составляют антиклику, тогда любая из них смежна остальным и, следовательно, они тоже составляют антиклику. Граф G, очевидно, оказывается изоморфным одному из графов Лордена, и утверждение снова доказано.

Будем теперь считать, что в G имеется две смежные вершины степени 5. Тогда в G есть две дизъюнктные 5-антиклики α и β. Через c обозначим вершну графа, находящуюся вне α и β. Если вершина c несмежна ни одной вершине из α, тогда $\alpha\cup\{c\}$ и β — дизъюнктные антиклики и общее число 3-антиклик в них равняется $\binom{6}{3}+\binom{5}{3}=30$, так что $\Delta(G)\geqq 30$. Притом $\Delta(G)=30$ только тогда, когда любая 3-антиклика графа содержится в $\alpha\cup\{c\}$ или β, т. е. когда граф имеет тип Лордена. Утверждение доказано и в этом случае. Поэтому в дальнейшем будем считать, что вершина c смежна хотя бы одной вершине из α (обозначим ее через a) и хотя бы одной вершине из β (обозначим ее через b). Рассмотрим отдельно следующие два случая.

I. Вершина c не имеет других смежных вершин в α, кроме a.

Пусть x — число вершин из β, смежных a, а y — число вершин из β, смежных вершине c. Так как нет вершин, одновременно смежных вершинам a и c, то $x+y\leqq 5$. Из этого неравенства и равенств $d(a)=x+1$ и $d(c)=y+1$ следует, что $d(a)+d(c)\leqq 7$, т. е. $\varepsilon(a)+\varepsilon(c)\leqq -3$. Тогда $\varepsilon^2(a)+\varepsilon^2(c)\geqq 5$ и из (3) следует, что $\Delta(G)\geqq 30$. Притом, если $\Delta(G)=30$, тогда $\varepsilon^2(a)+\varepsilon^2(c)=5$

и $\varepsilon(v)=0$ при $v \neq a, c$. Следовательно, $d(v)=5$ при $v \neq a, c$ и $(\varepsilon(a), \varepsilon(c)) =(-1, -2)$ или $(\varepsilon(a), \varepsilon(c))=(-2, -1)$, т. е. $(x, y)=(3, 2)$ или $(x, y)=(2, 3)$. Вершины a и c играют одинаковую роль по отношению к множествам $\alpha \setminus \{a\}$ и β, и поэтому можно считать, что, например, $x=2$ и $y=3$. Так как все вершины, кроме a и c, имеют степень 5, то все вершины из $\alpha \setminus \{a\}$ смежны всем вершинам из β и граф G оказывается изоморфным графу на рис. 13, а. Утверждение в этом случае доказано.

II. Вершина c смежна ровно двум вершинам из α.

Одна из вопросных двух вершин — a, другую обозначим через a_1. Если допустим, что вершина c несмежна другим вершинам из β, кроме b, тогда все сводится к случаю I, поменяв роли множеств α и β. Поэтому будем считать, что c смежна хотя бы еще одной вершине b_1 из β. Допустим, что $d(c) \geqq 5$. Тогда c смежна хотя бы еще одной вершине b_2 из β. Очевидно a и a_1 несмежны вершинам b, b_1, b_2, так что $d(a) \leqq 3$ и $d(a_1) \leqq 3$ и значит $\varepsilon^2(a)+\varepsilon^2(a_1) \geqq 8$. Из (3) следует $\Delta(G)>30$. Утверждение в этом случае доказано. Поэтому будем считать, что $d(c)=4$. Теперь, очевидно, $d(a) \leqq 4$, $d(c_1) \leqq 4$, $d(b) \leqq 4$, $d(b_1) \leqq 4$ и, следовательно, $\varepsilon^2(a)+\varepsilon^2(a_1)+\varepsilon^2(b)+\varepsilon^2(b_1)+\varepsilon^2(c) \geqq 5$, так что из (3) получаем неравенство $\Delta(G) \geqq 30$ и если $d(v) \neq 5$ при некотором $v \neq a, a_1, b, b_1, c$, получается даже неравенство $\Delta(G)>30$. Поэтому будем в дальнейшем считать, что $d(v)=5$ при $v \neq a, a_1, b, b_1, c$. Это означает, что любая вершина из β смежна всем вершинам из $\alpha \setminus \{a, a_1\}$, а вершины a и a_1 смежны всем вершинам из $\beta \setminus \{b, b_1\}$. Граф G оказывается изоморфным графу на рис. 13, б. Утверждение доказано и в этом случае.

После рассмотрения случаев I и II теорема доказана, когда вершина c смежна не более двум вершинам из α и не более двум вершинам из β. Но если это не так, т. е. если c смежна хотя бы трем вершинам из α и хотя бы трем вершинам из β, тогда, очевидно, любая из вопросных 6 вершин имеет степень не больше 3 и тогда в G есть 6 вершин v с $\varepsilon(v) \neq 0$, в этом случае утверждение доказано в самом начале. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Lorden. Blue-empty chromatic graphs. *Amer. Math. Monthly*, **69**, 1962, 114-119.
2. F. Harary. The two-triangle case of acquaintance graph. *Math. Magazine*, **45**, 1972, 130-135.
3. Н. Хаджииванов. Числа на Рамзи. София, 1982.
4. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. За броя на тройките, непознати в компания без тройки познати. *Физ.-мат. спис.*, **26**, 1984, 360—365.
5. L. Sauvè. On chromatic graphs. *Amer. Math. Monthly*, **68**, 1961, 107-111.
6. A. Goodman. On sets of acquaintances and strangers at any party. *Amer. Math. Monthly*, **66**, 1959, 778-783.

Единый центр математики и механики П. Я. 573
1090 София

Поступила 21. 11. 1983