Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or
institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or
licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

О ЗАДАЧЕ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

ХО ШИ ХЫНГ

В работе рассматривается вопрос о существовании собственных чисел задачи Штурма — Лиувилля для одного класса нелинейных эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами в неограниченных областях.

1. Вспомогательные результаты. В неограниченной области $\Omega\subset R^n$ с границей $\partial\Omega$ рассматривается задача

$$(1.1)\qquad -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)+a_0(x)u=\lambda f(x,\ u)\ \text{ в }\ \Omega,\ u|_{\partial\Omega}=0,$$

где $\lambda\in R$ — параметр.

В дальнейшем предполагаем, что условия (A1), (A2) и (A3) выполняются.

(A1) Функции a_{ij}, $i,\ j=1,\ 2,\dots\ n$ и a_0 ограничены и измеримы в Ω и удовлетворяют естественному условию $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$, $i,\ j=1,\ 2,\dots\ n$ для $x\in\Omega$. Кроме того, существуют положительные константы C_1, C_2 и C_3, такие, что

$$C_1|\xi|^2\leqq\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqq C_2|\xi|^2,\quad a_0(x)\geqq C_3,\quad \forall x\in\Omega.\quad \forall\xi\in R^n.$$

(A2) Функция $f(x,\ t)$ непрерывна в $\Omega\times R$ и $f(x,\ 0)=0$ для $x\in\Omega$ и $f\not\equiv 0$ в $\Omega\times R$.

Определение 1. 1. *Функция $u(x)$ называется обобщенным решением задачи* (1.1), *если $u(x)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)$, и удовлетворяет равенству*

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx+\int_\Omega a_0(x)uv\,dx=\lambda\int_\Omega f(x,\ u)v\,dx,\quad \forall v\in\mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Число $\lambda_0\in R$, для которого задача (1.1) имеет ненулевое обобщенное решение u_0, называется *собственным числом* задачи (1.1), а функция u_0 — *обобщенной собственной функцией, соответствующей собственному числу* λ_0. Множество всех собственных чисел задачи (1.1) называется ее *спектром.*

Функция f удовлетворяет условию (A3), которое будет сформулировано ниже. Прежде всего мы сформулируем одну известную теорему для компактного вложения Соболевских пространств.

Пусть

$$(1.2)\qquad W_\alpha(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha-n}, & 0<\alpha<n;\\ 1-\log|x|, & \alpha=n;\\ 1, & \alpha>n.\end{cases}$$

Для любой функции φ, определенной почти всюду в Ω, мы введем ее продолжение в R^n следующим образом:

$$\varphi_\Omega(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in\Omega,\\ 0\quad , & x\notin\Omega.\end{cases}\tag{1.3}$$

Теперь мы определим величины

$$M_{\alpha,p,\delta,x}(\varphi,\ \Omega)=\int\limits_{|y|<\delta}|\varphi_\Omega(x-y)|^p W_\alpha(y)dy,\quad 1<p<+\infty,\ \delta>0,\tag{1.4}$$

$$M_{\alpha,p}(\varphi,\ \Omega)=\sup_{x\in\mathrm{R}^n} M\alpha,\ p,\ \lambda,\ x(\varphi,\ \Omega).\tag{1.5}$$

Обозначим через $M_{\alpha,p}(\Omega)$ множество всех измеримых функций φ в Ω, для которых $M_{\alpha,p}(\varphi,\ \Omega)<+\infty$.

Имеет место следующая

Лемма 1. 2 (теорема вложения Бергера и Шехтера [4]). *Пусть m — целое положительное число. Предполагается, что $q\geq p>1$ и $1/q>1/p-m/n$. Пусть $\alpha>0$ — такое число, что $\alpha-n/q<m-n/p$. Тогда существует положительная константа C, зависящая только от p, q, m, n, и α такая, что*

$$\|\varphi u\|_{L_q(\Omega)}\leq CM_{\alpha,q}(\varphi,\ \Omega)\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)},\quad \forall u\in\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega),\quad \forall\varphi\in M_{\alpha,q}(\Omega).$$

Кроме того, если $\varphi\in M_{\alpha,q}(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|\to\infty}\ \int\limits_{y\in\Omega,\ |x-y|<1}|\varphi(y)|^q dy=0,$$

то оператор T, определенный равенством $T_u=\varphi u$ для $u\in\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$, действует компактно из $\overset{\circ}{W}{}^m_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$.

Пусть $0<\alpha<1$ — фиксированное число, а ограниченная и измеримая в Ω функция φ удовлетворяет условиям

$$M_{\alpha,2}(\varphi,\ \Omega)=\sup_{x\in\mathrm{R}^n}\ \int\limits_{|y|<1}|\varphi_\Omega(x-y)|^2|y|^{\alpha-n}dy<+\infty,\tag{1.6}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}\ \int\limits_{y\in\Omega,\ |x-y|<1}|\varphi(y)|^2 dy=0.\tag{1.7}$$

Если положим $m=1$, $p=q=2$, то из леммы 1.2 следует, что оператор $T:\ \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$, определяющийся равенством $Tu=\varphi u$ для $u\in\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, является компактным.

Сейчас мы сформулируем и последнее основное условие для f, а именно:

$$|f(x,\ t_1)-f(x,\ t_2)|\leq|\varphi(x)||t_1-t_2|,\quad \forall x\in\Omega,\quad \forall t_1,\ t_2\in\mathrm{R},\tag{A3}$$

где ограниченная и измеримая в Ω функция φ удовлетворяет (1.6) и (1.7).

Обозначим через H пространство всех функций из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_H=\{\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\ \frac{\partial u}{\partial x_j}dx+\int_\Omega a_0(x)u^2dx\}^{1/2},\quad \forall u\in H.$$

Из (A1) легко вытекает, что эта норма эквивалентна обычной норме $\|\cdot\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}$, следователно, H превращается в гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_H=\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_\Omega a_0(x)uvdx, \quad \forall u, v\in H.$$

Если в (A3) положим $t_1=u(x)$, $t_2=0$, то получим $|f(x, u(x))|\leq|\varphi(x)||u(x)|$ $c\leq_4|u(x)|$ $(c_4=\text{const}>0)$, следовательно, для каждого $u\in H$ имеем $f(x, u)\in L_2(\Omega)$. Для каждого фиксированного $u\in H$ линейный функционал $v\to\int_\Omega f(x, u)vdx$ непрерывен в H, поскольку

$$\left|\int_\Omega f(x, u)vdx\right|\leq\|f(x, u)\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)}\leq C_5\|f(x, u)\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_H$$

$(c_5=\text{const}>0)$. Из теоремы Рисса следует, что существует единственный элемент $V(u)\in H$, для которого выполняется равенство

$$(V(u), v)_H=\int_\Omega f(x, u)vdx, \quad \forall u, v\in H. \tag{1.8}$$

Лемма 1.3. *Пусть $V:H\to H$ — оператор, определенный равенством* (1.8). *Тогда из $u_m\to u_0$ слабо в H следует $V(u_m)\to V(u_0)$ сильно в H.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.4[2].

Как в [2], обозначим через

$$F(x, t)=\int_0^t f(x, s)ds, \quad x\in\Omega, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.9}$$

$$N(u)=\int_\Omega F(x, u)dx, \ u\in H. \tag{1.10}$$

Лемма 1.4. *Для всех $x\in\Omega$, t_1, $t_2\in\mathbb{R}$ выполняется равенство*

$$F(x, t_1)-F(x, t_2)=(t_1-t_2)\int_0^t f(x, t_2+s(t_1-t_2))ds.$$

Доказательство этой леммы можно найти в [2].

Определение 1.5. *Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, в котором определены функционал $M:\mathscr{H}\to\mathbb{R}$ и оператор $S:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$. Оператор S называется градиентом функционала M ($S=\operatorname{grad} M$), если $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{M(u+\varepsilon v)-M(u)}{\varepsilon}=(S(u), v)_{\mathscr{H}}$ для каждой пары u, $v\in\mathscr{H}$. Функционал M называется равномерно дифференцируемым в шаре $B_r=\{u\in\mathscr{H}, \|u\|_{\mathscr{H}}<r\}$, если $\operatorname{grad} M$ существует и для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что*

$$|M(u+v)-M(u)-(\operatorname{grad} M(u), v)_{\mathscr{H}}|\leq\varepsilon\|v\|_{\mathscr{H}}, \quad \forall u\in B_r, \ \forall v\in B_\delta.$$

Лемма 1.6. *Пусть функционал N определен равенством* (1.10). *Тогда имеет место равенство $\operatorname{grad} N(u)=(Vu)$ для всех $u\in H$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.7 [2].

Лема 1.7. *Пусть $r>0$ — любое число. Тогда функционал N является равномерно дифференцируемым в шаре $B_r=\{u\in H, \|u\|_H<r\}$.*

Доказательство. Сначала мы докажем, что для $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что

$$\|V(u+v)-V(u)\|_H<\varepsilon, \quad \forall u\in B_r, \ \forall v\in B_\delta. \tag{1.11}$$

Действительно, допустим, что (1.11) не выполняется. Тогда существует такое $\varepsilon_0>0$, что для каждого $\delta_m=m^{-1}$ можно найти $u_m\in B_r$ и $v_m\in B_{\delta_m}$, которое удовлетворяют неравенству

$$(1.12)\qquad \| V(u_m+v_m)-V(u_m)\|_H\geqq\varepsilon_0,\quad m=1,\ 2,\ \ldots$$

Последовательность $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена в H, поэтому из нее можно найти слабо сходящуюся подпоследовательность $\{u_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Пусть $u_{m_i}\to u_0$ слабо в H. Тогда легко видеть, что $u_{m_i}+v_{m_i}\to u_0$ слабо в H. Из леммы 1.3 имеем $V(u_{m_i})\to V(u_0)$ и $V(u_{m_i}+v_{m_i})\to V(u_0)$ сильно в H, следовательно, $V(u_{m_i}+v_{m_i})-V(u_{m_i})\to 0$ сильно в H. Это невозможно из-за (1.12). Этим доказывается (1.11). Из (1.11) и из леммы 1.4 и 1.6 следует, что для всех $u\in B_r$ и $v\in B_\delta$ получаем

$$|N(u+v)-N(u)-(\operatorname{grad} N(u),\ v)_H|=|\int_\Omega F(x,\ u+v)dx-\int_\Omega F(x,\ u)\,dx-(V(u),\ v)_H|$$

$$=|\int_\Omega v\{\int_0^1 f(x,u+sv)ds\}dx-(V(u),(v))_H|=|\int_0^1\{\int_\Omega vf(x,\ u+sv)dx\}ds-(V(u),\ v)_H|$$

$$=|\int_0^1(V(u+sv),\ v)_H ds-(V(u)),\ v)_H|=|\int_0^1(V(u+sv)-V(u),\ v)_H ds|$$

$$\leqq\int_0^1\| V(u+sv)-V(u)\|_H\| v\|_H ds\leqq\varepsilon\| v\|_H.$$

Последнее неравенство показывает, что функционал N является равномерно дифференцируемым в шаре B_r. Итак, лемма доказана.

Лемма 1.8. *Функционал N слабо непрерывен, т. е. из $u_m\to u_0$ слабо в H следует $N(u_m)\to N(u_0)$.*

Доказательство. Поскольку $\operatorname{grad} N=V$ (лемма 1.6) и из $u_m\to u_0$ слабо в H следует $V(u_m)\to V(u_0)$ сильно в H (лемма 1.3), следовательно, из леммы 3.14 [3], заключаем, что функционал N слабо непрерывен. Таким образом лемма доказана.

В дальнейшем нам будет необходима следующая

Лемма 1.9. *Пусть $\lambda\in\mathbf{R}$ — такое число, что $\lim\limits_{\|u\|_H\to\infty}(\frac{1}{2})(u,u)_H-\lambda N(u)=+\infty$. Если существует $u_0\in H$, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{2}(u_0,\ u_0)_H-\lambda N(u_0)<0$, то λ является собственным числом задачи* (1.1).

Доказательство. Функционал N слабо непрерывен (лемма 1.8). Из условий леммы и из теоремы 1.1 ([1], стр. 303) заключаем, что существует $u_1\in H$, удовлетворяющее равенствам

$$\frac{1}{2}(u_1,\ u_1)_H-\lambda N(u_1)=\inf\{\frac{1}{2}(u,\ u)_H-\lambda N(u),\quad u\in H\},$$

$$u_1-\lambda V(u_1)=\operatorname{grad}\{\frac{1}{2}(u_1,\ u_1)_H-\lambda N(u_1)\}=0.$$

Функция $u_1\neq 0$, поскольку $\frac{1}{2}(u_1,\ u_1)_H-\lambda N(u_1)\leq\frac{1}{2}(u_0,\ u_0)-\lambda N(u_0)<0$, а $\frac{1}{2}(0,\ 0)-\lambda N(0)=0$, следовательно, из последнего равенства легко видеть, что λ является собственным числом задачи (1.1). Лемма доказана.

Лемма 1.10. *Пусть $p(x,\ t)$ — непрерывная функция в $\Omega\times\mathbf{R}$ и $|p(x,t)|\leq C_6t^2$ для всех $x\in\Omega$ и $t\in\mathbf{R}$ ($C_6=\text{const}>0$). Если $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{p(x,\ t)}{t^2}=0$ равномерно по $x\in\Omega$, то выполняется следующее равенство:*

$$\lim_{\|u\|_H\to 0}\frac{\int_\Omega p(x,u)dx}{\|u\|_H^2}=0.$$

Доказательство. Пусть $0<\alpha<1$ -- фиксированное число. Обозначим через K_α множество $\{q\in\mathbb{R},\ q>2,\ \frac{1}{q}>\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\ \frac{\alpha-n}{q}<1-\frac{n}{2}\}$. K_α непусто. Действительно, для $q=2$ имеем $\frac{1}{q}>\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$ и $\frac{\alpha-n}{q}<1-\frac{n}{2}$, следовательно, существует такое $\delta>0$, что для всех $q\in\mathbb{R}$, $0<q-2<\delta$ выполняются неравенства $\frac{1}{q}>\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$ и $\frac{\alpha-n}{q}<1-\frac{n}{2}$, т. е. $K_\alpha\neq\emptyset$. Пусть $q\in K_\alpha$ — любое фиксированное число и $\psi(x)=1$ для $x\in\Omega$. Из (1.4) и (1.5) получаем

$$M_{\alpha,q}(\Omega,\psi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{|y|<1}|\psi_\Omega(x-y)|^q\,|y|^{\alpha-n}dy\leq\int_{|y|<1}|y|^{\alpha-n}dy<+\infty,$$

т. е. $\psi\in M_{\alpha,q}(\Omega)$. Согласно лемме 1.2, существует положительная константа C_7, такая, что

(1.13) $$\|u\|_{L_q(\Omega)}\leq C_7\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}\leq C_8\|u\|_H,\quad \forall u\in H\ (C_8=\mathrm{const}>0).$$

Пусть $\varepsilon>0$ — любое число и C_9 такая положительная константа, что $\|u\|_{L_2(\Omega)}\leq C_9\|u\|_H,\quad \forall u\in H$.

Из условий леммы следует, что существует $A=A(\varepsilon)>0$, для которого выполняется неравенство $|p(x,t)|\leq\frac{1}{2}\varepsilon C_9^{-2}t^2$ для всех $x\in\Omega, |t|<A$. Итак, имеем

(1.14)
$$\left|\int_\Omega p(x,u)\,dx\right|\leq\int_{|u(x)|<A}|p(x,u)|dx+\int_{|u(x)|\geq A}|p(x,u)|\,dx\leq\frac{1}{2}\varepsilon C_9^{-2}\int_{|u(x)|<A}u^2dx$$
$$+C_6\int_{|u(x)|\geq A}u^2dx\leq\frac{1}{2}\varepsilon C_9^{-2}\|u\|_{L_2(\Omega)}^2+C_6\int_{|u(x)|\geq A}u^2dx\leq\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_H^2+C_6\int_{|u(x)|\geq A}u^2dx.$$

Функция $|t|^{2-q}$ ограниченная для $|t|\geq A$, поскольку она непрерывна в замкнутом множестве $|t|\geq A$ и $\lim_{t\to\pm\infty}|t|^{2-q}=0$, поэтому $|t|^{2-q}\leq C_{10}$ для всех $|t|\geq A$ $(C_{10}=\mathrm{const}>0)$, т. е. $t^2\leq C_{10}|t|^q$ для всех $|t|\geq A$. Из (1.13) и (1.14) следует неравенство

$$\left|\int_\Omega p(x,u)dx\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_H^2+C_{10}\cdot C_6\int_{|u(x)|\geq A}|u|^qdx\leq\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_H^2$$
$$+C_{10}C_6\|u\|_{L_q(\Omega)}^q\leq\frac{\varepsilon}{2}\|u\|_H^2+C_6C_8^qC_{10}\|u\|_H^q.$$

Таким образом получаем

$$\left|\|u\|_H^{-2}\int_\Omega p(x,u)dx\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}+C_6C_8^qC_{10}\|u\|_H^{q-2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

для всех $0<\|u\|_H<\{\frac{\varepsilon}{2}C_6^{-1}C_8^{-q}C_{10}^{-1}\}^{\frac{1}{q-2}}$, т. е. $\lim_{\|u\|_H\to 0}\frac{\int_\Omega p(x,u)dx}{\|u\|_H^2}=0$ в силу произвольности $\varepsilon>0$. Лемма доказана.

Лемма 1.11. *Пусть* $p(x, t)$ — *непрерывная функция в* $\Omega\times\mathbf{R}$ *и* $|p(x, t)| \leqq C_{11}|\varphi(x)|t^2$ *для всех* $x\in\Omega$, $t\in\mathbf{R}$ ($C_{11}=\text{const}>0$), *где ограниченная и измеримая в* Ω *функция* φ *удовлетворяет* (1.6) *и* (1.7) *и* $m_0=\int_\Omega|\varphi(x)|dx<+\infty$. *Если* $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{p(x, t)}{t^2}=0$ *равномерно по* $x\in\Omega$, *то выполняется равенство*

$$\lim_{\|u\|_H\to\infty}\frac{\int_\Omega p(x, u)dx}{\|u\|_H^2}=0.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ — любое число. Существует такое число $A=A(\varepsilon)>0$, что $|p(x, t)|\leqq\frac{1}{2}\varepsilon C_9^{-2}t^2|$ для всех $x\in\Omega$, $|t|>A$. Итак, получаем

$$|\int_\Omega p(x, u)dx|\leqq\int_{|u(x)|\leqq A}|p(x, u)|dx+\int_{|u(x)|>A}|p(x, u)|dx$$

$$\leqq C_{11}\int_{|u(x)|\leqq A}|\varphi(x)|u^2dx+\frac{1}{2}\varepsilon C_9^{-2}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\leqq C_{11}A^2m_0+\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2_H.$$

Из последнего неравенства следует неравенство

$$|\|u\|_H^{-2}\int_\Omega p(x, u)dx|\leqq\frac{\varepsilon}{2}+C_{11}A^2m_0\|u\|_H^{-2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

для всех $\|u\|_H>\{\frac{\varepsilon}{2}C_{11}^{-1}A^{-2}m_0^{-1}\}^{-1/2}$, т. е. $\lim_{\|u\|_H\to\infty}\frac{\int_\Omega p(x, u)}{\|u\|_H^2}=0$ в силу произвольности $\varepsilon>0$. Лемма доказана.

2. Основные результаты. Теорема 2. 1. *Пусть условия* (A1), (A2) *и* (A3) *выполняются, где ограниченная и измеримая в* Ω *функция* φ *удовлетворяет* (1.6) *и* (1.7). *Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) *Если* $f(x, t)$ — *монотонно неубывающая функция* $t\in\mathbf{R}$ *при каждом фиксированном* $x\in\Omega$, *то для* $R>0$ *существует* $u_R\in H$, *удовлетворяющее равенствам*

$$\|u_R\|_H=R,\quad N(u_R)=\sup\{N(u):u\in H,\quad \|u\|_H=R\}. \tag{2.1}$$

Кроме того, для каждого $R>R_0$ ($R_0=\text{const}>0$) *выполняется равенство*

$$u_R=\lambda(R)V(u_R) \tag{2.2}$$

для подходящего $\lambda(R)>0$.

(ii) *Если* $tf(x, t)>0$ *для всех* $x\in\Omega$, $t\neq0$, *то для* $R>0$ *существует* $u_R\in H$, *удовлетворяющее* (2.1) *и* (2.2).

Функция u_R, *определенная в* (i) (*при* $R\geqq R_0$) *и в* (ii) (*при* $R>0$), *является обобщенной собственной функцией задачи* (1.1), *соответствующей собственному числу* $\lambda(R)$.

(iii) *Если* $m_0=\int_\Omega|\varphi(x)|dx<+\infty$ *и* $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{f(x, t)}{t}=0$ *равномерно по* $x\in\Omega$, *то существует такое* $\lambda_0>0$, *что по крайней мере один из интервалов* $(-\infty, -\lambda_0)$ *и* $(\lambda_0, +\infty)$ *принадлежит спектру задачи* (1.1).

Доказательство. Доказательства теоремы 2.1 (i) и (2.1) (ii) аналогичны доказательствам теоремы 2.1 (i) и (2.1) (ii) соответственно в работе [2]. Теперь мы докажем теорему 2.1 (iii). Легко видеть, что $|F(x, t)|\leq\frac{1}{2}|\varphi(x)|t^2$

для всех $x\in\Omega$ и $t\in\mathbf{R}$ и $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{F(x,\ t)}{t^2}=0$ равномерно по $x\in\Omega$. Согласно лемме 1.11,

$$\lim_{\|u\|_H\to\infty}\frac{N(u)}{\|u\|_H^2}=\lim_{\|u\|_H\to\infty}\frac{\int_\Omega F(x,\ u)dx}{\|u\|_H^2}=0,$$

следовательно, для каждого фиксированного $\lambda\in\mathbf{R}$ получаем

$$(2.3)\quad \lim_{\|u\|_H\to\infty}\{\frac{1}{2}(u,\ u)_H-\lambda N(u)\}=\lim_{\|u\|_H\to\infty}(u,\ u)_H\cdot\lim_{\|u\|_H\to\infty}\{\frac{1}{2}-\lambda\frac{N(u)}{\|u\|_H^2}\}=+\infty.$$

Сейчас мы покажем, что

$$(2.4)\qquad N(u)\not\equiv 0 \text{ в } H.$$

Действительно, допустим, что (2.4) не выполняется. Тогда $N(u)=0$ для всех $u\in H$, поэтому $V(u)=\operatorname{grad}N(u)=0$ для всех $u\in H$, т. е.

$$(2.5)\qquad (V(u),\ v)_H=\int_\Omega f(x,\ u)v dx=0,\quad \forall u,\ v\in H.$$

С другой стороны, $f\not\equiv 0$ в $\Omega\times\mathbf{R}$, следовательно, существуют такие $x_0\in\Omega$, $t_0\in\mathbf{R}$, что $f(x_0,\ t_0)\neq 0$. Пусть $\psi\in C_0^\infty(\Omega)\subset H$ такая функция, что $\psi(x_0)=t_0$. Функция $f(x,\ \psi(x))$ непрерывна в Ω, $\operatorname{supp}f(x,\ \psi(x))\subset\operatorname{supp}\psi$ и

$$(2.6)\qquad f(x,\ \psi(x))\not\equiv \text{ в } \Omega,$$

поскольку $f(x_0,\ \psi(x_0))=f(x_0,\ t_0)\neq 0$. Легко видеть, что $f(x,\ \psi(x))\in L_2(\Omega)$, следовательно, существует последовательность $\{\psi_m\}\subset C_0^\infty(\Omega)\subset H$, для которой $\psi_m\to f(x,\ \psi(x))$ сильно в $L_2(\Omega)$. Из (2.5) получаем

$$\int_\Omega f(x,\ \psi(x))\psi_m dx=0,\quad m=1,\ 2,\ldots$$

Итак, $\lim\limits_{m\to\infty}\int_\Omega f(x,\ \psi(x))\psi_m dx=\int_\Omega|f(x,\ \psi(x)|^2dx=0$, т. е. $f(x,\ \psi(x))=0$ для всех $x\in\Omega$, которое противоречит (2.6). Этим доказывается (2.4). Согласно (2.4) существует $u_0\in H$, удовлетворяющее неравенству $N(u_0)>0$ ($N(u_0)<0$). Пусть $\lambda_0>0$ такое число, что $\frac{1}{2}(u_0,\ u_0)_H-\lambda_0 H(u_0)\leq 0$ ($\frac{1}{2}(u_0,\ u_0)_H+\lambda_0 N(u_0)\leq 0$). Для всех $\lambda>\lambda_0$ ($\lambda<-\lambda_0$) имеем

$$(2.7)\qquad \frac{1}{2}(u_0,\ u_0)_H-\lambda N(u_0)<0.$$

Из (2.3), (2.7) и из леммы 1.9 следует, что каждое число $\lambda>\lambda_0$ ($\lambda<-\lambda_0$) является собственным числом задачи (1.1). Теорема полностью доказана.

В следующих теоремах мы предположим, что функции $g(x)$ и $h(x)$ непрерывны в Ω и $g\not\equiv 0$ и $h\not\equiv 0$ в Ω. Пусть μ_1 и ν_1 — наименьшие собственные числа задач

$$(2.8)\qquad -\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j})+a_0(x)u=\mu g(x)u \text{ в } \Omega,\ u|_{\partial\Omega}=0,$$

$$(2.9)\qquad -\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j})+a_0(x)x=\nu h(x)u \text{ в } \Omega,\ u|_{\partial\Omega}=0$$

соответственно.

Теорема 2.2. *Пусть условия* (A1), (A2) *и* (A3) *выполняются, где ограниченная и измеримая в* Ω *функция* φ *удовлетворяет* (1.6) *и* (1.7). *Предполагается, что* $tf(x, t)>0$ *для всех* $x \in \Omega$, $t \neq 0$, *а* $\lambda(R)$ — *собственное число задачи* (1.1), *определенное в теореме* 2.1 (ii). *Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) *Если* $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x, t)}{t} = 0$ *равномерно по* $x \in \Omega$, *то* $\lim\limits_{R \to 0} \lambda(R) = +\infty$.

(ii) *Если* $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x, t)}{t} = g(x)$ *равномерно по* $x \in \Omega$, *то* $\lim\limits_{R \to 0} \lambda(R) = \mu_1$.

Доказательство. Сначала мы докажем (i). Легко видеть, что $\lambda(R) = \|u_R\|_H^2 \{\int_\Omega u_R f(x, u_R) dx\}^{-1}$ и функция $p(x, t) = tf(x, t)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1.10, следовательно, получаем

$$\lim_{R \to 0} \lambda(R) = +\infty.$$

Теперь приступим к доказательству (ii). Прежде всего мы покажем, что линейная задача (2.8) имеет наименьшее собственное число. Из (A2) и (A3) следует неравенство $|t^{-1} f(x, t)| \leq |\varphi(x)|$ для всех $x \in \Omega$, $t \neq 0$, поэтому $(g(x) \leq |\varphi(x)|$ для всех $x \in \Omega$. С другой стороны, из условия $tf(x, t) > 0$ для всех $x \in \Omega$, $t \neq 0$ получаем $g(x) \geq 0$ для всех $x \in \Omega$. Итак, функция $f_1(x, t) = g(x)t$ удовлетворяет (A2) и (A3), кроме того, она монотонно неубывающая функция $t \in \mathbb{R}$ при каждом фиксированном $x \in \Omega$. Согласно теореме 2.1 (i), для некоторого $R_0 > 0$ существует $u_{R_0} \in H$, удовлетворяющее равенствам

$$(2.10) \qquad \|u_{R_0}\|_H = R_0, \quad \int_\Omega g(x) u_{R_0}^2 dx = \sup \{\int_\Omega g(x) u^2 dx : u \in H, \quad \|u\|_H = R_0\},$$

и u_{R_0} является обобщенной собственной функцией задачи (2.8), соответствующей подходящему собственному числу $\mu(R_0) > 0$. Если положим $R_0^{-1} u R_0 = u_1$, то легко видеть, что для всех $R > 0$ выполняются равенства

$$(2.11) \qquad \|Ru_1\| = R, \quad \int_\Omega g(x) R^2 u_1^2 dx = \sup \{\int_\Omega g(x) u^2 dx : u \in H, \quad \|u\|_H = R\}$$

и u_1 является обобщенной функцией задачи (2.8), соответствующей собственному числу $\mu(R_0)$ и $\mu(R_0) = \{\int_\Omega g(x) u_1^2 dx\}^{-1}$. Пусть $\bar{\mu}$ — любое собственное число задачи (2.8) с обобщенной собственной функцией $\bar{u} \in H$, $\|\bar{u}\|_H = 1$. Легко видеть, что $\bar{\mu} = \{\int_\Omega g(x) \bar{u}^2 dx\}^{-1}$, следовательно, из (2.11) следует неравенство

$$\bar{\mu} = \{\int_\Omega g(x) \bar{u}^2 px\}^{-1} \geq \{\int_\Omega g(x) u_1^2 dx\}^{-1} = \mu(R_0),$$

т. е. $\mu(R_0) = \mu_1$ и $\mu_1 = \{\int_\Omega g(x) u_1^2 dx\}^{-1} > 0$.

Из-за того, что $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x, t)}{t} = g(x)$ равномерно по $x \in \Omega$, следует, что если

$$(2.12) \qquad f(x, t) = g(x)t + s(x, t),$$

то $\lim\limits_{t \to 0} \frac{s(x, t)}{t} = 0$ равномерно по $x \in \Omega$. Из (2.12) имеем

$$(2.13) \qquad 2F(x, t) = g(x)t^2 + 2S(x, t),$$

где $S(x, t)=\int_0^t S(x, \eta)d\eta$. Из (2.13) следует равенство

$$2\int_\Omega F(x, u)dx-\int_\Omega g(x)u^2dx=2\int_\Omega S(x, u)dx, \quad \forall u\in H.$$

Итак, из (2.1) и (2.11) получаем

$$2\int_\Omega S(x, Ru_1)dx=2\int_\Omega F(x, Ru_1)dx-\int_\Omega g(x)R_1^2u_1^2dx$$

$$\leqq 2\int_\Omega F(x, u_R)dx-\int_\Omega g(x)R^2u_1^2dx\leqq 2\int_\Omega F(x, u_R)dx-\int_\Omega g(x)u_R^2dx=2\int_\Omega S(x, u_R)dx,$$

т. е.

$$\frac{2\int_\Omega S(x, Ru_1)dx}{\|Ru_1\|_H^2}\leqq\frac{2\int_\Omega F(x, u_R)dx}{\|u_R\|_H^2}-\mu_1^{-1}\leqq\frac{2\int_\Omega S(x, u_R)dx}{\|u_R\|_H^2}. \tag{2.14}$$

С другой стороны, функция $p(x, t)=S(x, t)$ $(p(x, t)=ts(x, t)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1.10, следовательно,

$$\lim_{R\to 0}\frac{\int_\Omega S(x, Ru_1)dx}{\|Ru_1\|_H^2}=\lim_{R\to 0}\frac{\int_\Omega S(x, u_R)dx}{\|u_R\|_H^2}=0\left(\lim_{R\to 0}\frac{\int_\Omega u_R S(x, u_R)dx}{\|u_R\|_H^2}=0\right). \tag{2.15}$$

Из (2.14) и (2.15) вытекает

$$\lim_{R\to 0}\frac{2\int_\Omega F(x, u_R)dx}{\|u_R\|_H^2}=\mu_1^{-1}. \tag{2.16}$$

Из (2.12), (2.13) и (2.16) следует равенство

$$\lim_{R\to 0}\lambda^{-1}(R)-\mu_1^{-1}=\lim_{R\to 0}\frac{\int_\Omega u_R f(x, u_R)dx}{\|u_R\|_H^2}-\lim_{R\to 0}\frac{\int_\Omega F(x, u_R)dx}{\|u_R\|_H^2}$$

$$=\lim_{R\to 0}\frac{\int_\Omega u_R S(x, u_R)dx}{\|u_R\|_H^2}-\lim_{R\to 0}\frac{\int_\Omega S(x, u_R)dx}{\|u_R\|_H^2}=0.$$

Итак, $\lim\limits_{R\to 0}\lambda(R)=\mu_1$. Теорема полностью доказана.

Теорема 2.3. *Пусть условия* (A1), (A2) *и* (A3) *выполняются, где ограниченная и измеримая в* Ω *функция* φ *удовлетворяет* (1.6), (1.7) *и* $m_0=\int_\Omega|\varphi(x)|dx<+\infty$. *Предполагается, что* $tf(x, t)>0$ *для всех* $x\in\Omega$, $t\neq 0$, *а* $\lambda(R)$ — *собственное число задачи* (1.1), *определенное в теореме* 2.1 (ii). *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(i) *Если* $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{f(x, t)}{t}=0$ *равномерно по* $x\in\Omega$, *то* $\lim\limits_{K\to 0}\lambda(R)=+\infty$.

(ii) *Если* $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{f(x, t)}{t}=h(x)$ *равномерно по* $x\in\Omega$, *то* $\lim\limits_{R\to\infty}\lambda(R)=\nu_1$.

С помощью леммы 1.11 доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.2.

Из (2.16) следует равенство $\lim\limits_{K=\infty}\frac{\frac{1}{2}(u_R, u_R)_H}{N(u_R)}=\mu_1$. Аналогичным образом получается $\lim\limits_{K=\infty}\frac{\frac{1}{2}(u_R, u_R)_H}{N(u_R)}=\nu_1$.

Теорема 2.4. *Пусть условия* (A1), (A2) *и* (A3) *выполняются, где ограниченная и измеримая в* Ω *функция* φ *удовлетворяет* (1.6), (1.7) *и* $m_0=\int_\Omega|\varphi(x)|\,dx<+\infty$. *Предполагается, что* $tf(x, t)>0$ *для всех* $x\in\Omega, t\neq 0$. *Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) *Если* $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x, t)}{t}=g(x)$ и $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{f(x, t)}{t}=h(x)$ *равномерно по* $x\in\Omega$ *и* $\mu_1<\nu_1$, *то интервал* (μ_1, ν_1) *принадлежит спектру задачи* (1.1).

(ii) *Если* $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x, t)}{t}=g(x)$ *и* $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{f(x, t)}{t}=0$ *равномерно по* $x\in\Omega$, *то интервал* $(\mu_1, +\infty)$ *принадлежит спектру задачи* (1.1). *При этом интервал* $(\mu_1, +\infty)$ *является спектром задачи* (1.1), *когда* $t\{f(x, t)-g(x)t\}<0$ *для всех* $x\in\Omega$, $t\neq 0$.

Доказательство. Сначала мы докажем (i). Пусть $\mu_1<\lambda_0<\nu_1$ — фиксированное число. Из $\mu_1=\lim\limits_{R\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(u_R, u_R)_H}{N(u_R)}<\lambda_0$ следует, что существует $R_0>0$, такое, что для всех $0<R<R_0$ выполняется неравенство $\dfrac{\frac{1}{2}(u_R, u_R)_H}{N(u_R)}<\lambda_0$, т.е.

$$\frac{1}{2}(u_R, u_R)_H-\lambda_0 N(u_R)<0, \quad \forall 0<R<R_0. \tag{2.17}$$

Если положим $2\delta=\nu_1-\lambda_0>0$, то $\nu_1=\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}(u_R, u_R)_H}{N(u_R)}>\lambda_0+\delta$, для некоторого $R_1>0$ имеем $\frac{1}{2}(u_R, u_R)N^{-1}(u_R)>\lambda_0+\delta$ для всех $R>R_1$, т. е. $N(u_R)<\frac{1}{2(\lambda_0+\delta)}(u_R, u_R)_H$ для всех $R>R_1$. При каждом $u\in H$, $\|u\|_H=R>R_1$ имеем

$$\frac{1}{2}(u, u)_H-\lambda_0 N(u)\geq\frac{1}{2}(u_R, u_R)_H-\lambda_0 N(u_R)$$

$$\geq\frac{1}{2}(u_R, u_R)-\frac{\lambda_0}{2(\lambda_0+\delta)}(u_R, u_R)_H=\frac{\delta}{2(\lambda_0+\delta)}(u_R, u_R),$$

следовательно,

$$\lim_{\|u\|_H\to\infty}\left\{\frac{1}{2}(u, u)_H-\lambda_0 N(u)\right\}=+\infty. \tag{2.18}$$

Из (2.17), (2.18) и из леммы 1.9 следует, что каждое λ_0, удовлетворяющее неравенствам $\mu_1<\lambda_0<\nu_1$, принадлежит спектру задачи (1.1). Этим доказано (i).

Теперь докажем (ii). Из (2.3), (2.17) и из леммы 1.9 следует, что каждое $\lambda_0>\mu_1$ принадлежит спектру задачи (1.1). С другой стороны, пусть $t\{f(x, t)-g(x)t\}<0$ для всех $x\in\Omega$, $t\neq 0$ и $\bar{\mu}$ — любое собственное число задачи (1.1) с обобщенной собственной функцией $\bar{u}\in H$, $\|\bar{u}\|_H=\bar{R}$. Из $0<tf(x, t)<g(x)t^2$ для всех $x\in\Omega$, $t\neq 0$, следует неравенство

$$\bar{\mu}=(\bar{u}, \bar{u})_H\{\textstyle\int_\Omega\bar{u}f(x, \bar{u})\,dx\}^{-1}>(\bar{u}, \bar{u})_H\{\int_\Omega g(\bar{x})u^2dx\}^{-1}\geq\bar{R}^2\{\int_\Omega g(x)\bar{R}^2u_1^2\,dx\}^{-1}=\mu_1$$

т. е. интервал $(\mu_1, +\infty)$ является спектром задачи (1.1). Итак, теорема доказана.

Теорема, которую сформулируем ниже, доказывается с помощью следующей теоремы Красносельского [1, теорема 2.2, стр. 332).

Теорема 2.5. *Пусть $A(A(0)=0)$ — нелинейный компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала $\Phi(\varphi)$ $(\Phi(0)=0)$, равномерно дифференцируемого в некоторой окрестности точки 0. Пусть оператор имеет в точке 0 производную Фреше B $(dA(0)=B)$, являющуюся компактным самосопряженным оператором. Тогда каждое характеристическое число линейного оператора B является точкой бифуркации нелинейного оператора A.*

Теорема 2.6. *Пусть условия* (A1), (A2) *и* (A3) *выполняются, где ограниченная и измеримая в Ω функция φ удовлетворяет* (1.6) *и* (1.7). *Предполагаем, что $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t}=g(x)$ равномерно по $x\in\Omega$ и $f(x,t)\not\equiv g(x)t$ в $\Omega\times R$. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ и для каждого собственного числа μ задачи* (2.8) *существует собственное число λ задачи* (1.1), *удовлетворяющее неравенству $|\mu-\lambda|<\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $A=V$. Из условий теоремы легко видеть, что V — нелинейный оператор и $V(0)=0$. Кроме того, из леммы 1.3 немедленно заключаем, что оператор компактен. Как в доказательстве теоремы 2.2 (ii), функция $f_1(x,t)=g(x)t$ удовлетворяет (A2) и (A3). Пусть $B:H\to H$ — определенный равенством

$$(B(u),v)_H=\int_\Omega g(x)uv\,dx,\quad \forall u,v\in H. \tag{2.19}$$

Согласно лемме 1.3, оператор B компактен, кроме того, из (2.19) легко видеть, что он линеен и самосопряжен.

Очевидно $V=\operatorname{grad}N$ (лемма 1.6), где функционал N слабо непрерывен (лемма 1.8) и равномерно дифференцируем в шаре $B_r=\{u\in H,\ \|u\|_H<r\}$ (лемма 1.7). Теперь мы найдем производную Фреше оператора V в точке 0.

Из-за того, что $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(x,t)}{t}=g(x)$ равномерно по $x\in\Omega$, следует, что если

$$f(x,t)=g(x)t+s(x,t), \tag{2.20}$$

то $\lim\limits_{t\to 0}\frac{s(x,t)}{t}=0$ равномерно по $x\in\Omega$. Мы покажем, что $dV(0)=B$. Из (1.8), (2.19) и (2.20) получаем

$$\begin{aligned}\|V(u)-V(0)-B(u)\|_H&=\|V(u)-B(u)\|_H=\sup\{(V(u)-B(u),v)_H,\ v\in H,\ \|v\|_H\le 1\}\\&=\sup\{\textstyle\int_\Omega(f(x,u)-g(x)u)v\,dx,\ v\in H\ \|v\|_H\le 1\}=\sup\{\textstyle\int_\Omega s(x,u)\,dx,\ v\in H,\ \|v\|_H\le 1\}\\&\le\sup\{\|s(x,u)\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)},\ v\in H,\ \|v\|_H\le 1\}\le C_{12}\sup\{\|s(x,u)\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_H),\\&\qquad v\in H,\ \|v\|_H\le 1\}\le C_{12}\|s(x,u)\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

$(C_{12}=\text{const}>0)$, следовательно,

$$\|V(u)-V(0)-B(u)\|_H\|u\|_H^{-1}\le C_{12}\|s(x,u)\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_H^{-1}. \tag{2.21}$$

С другой стороны, легко видеть, что функция $p(x,t)=S^2(x,t)$ удовлетворяет всем условиям леммы 1.10, поэтому

$$\lim_{\|u\|_H\to 0}\{\|u\|_H^{-2}\int_\Omega S^2(x, u)dx\}=\lim_{\|u\|_H\to 0}\{\|u\|_H^{-2}\|S(x, u)\|^2_{L_2(\Omega)}\}=0,$$

т. е. $\lim_{\|u\|_H\to\infty}\{\|u\|_H^{-1}\|s(x, u)\|_{L_2(\Omega)}\}=0$. Из (2.21) найдем $\lim_{\|u\|_H\to 0}\{\|V(u)-V(0)-B(u)\|_H\|u\|_H^{-1}\}=0$. Этим доказывается $dV(0)=B$. Из теоремы 2.5 следует, что каждое характеристическое число линейного оператора B является точкой бифуркации оператора V. В частности, выполняется следующее утверждение:

а) для каждого $\varepsilon>0$ и для каждого характеристического числа μ оператора B существует характеристическое число λ оператора V, удовлетворяющее неравенству $|\mu-\lambda|<\varepsilon$;

Из определения оператора V и B легко видеть, что

б) число λ является характеристическим числом оператора $V(B)$ тогда и только тогда, когда λ является собственным числом задачи (1.1) ((2.8)).

Утверждения а) и б) доказывают теорему.

Выражаю благодарность Т. Генчеву за внимание к этой работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Москва, 1956.
2. Хо Ши Хънг. Задача на Щурм — Лиувил за един клас от нелинейни елиптични уравнения в неограничени области. *Год. Соф. унив. Мат. фак.*, **76** (1982) (под печат).
3. M. S. Berger, M. S. Berger. Perspectives in nonlinearity. New York, 1968.
4. M. S. Berger, M. Schecter. Imbedding theorems and quasilinear elliptic boundary value problems for unbounded domains. *T. A. M. S.*, **172**, 1972, 261—278.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 17. 5. 1984