Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ТЕОРЕМЫ РЕГУЛЯРНОСТИ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ

ВИКТОР В. СТАРКОВ

В настоящей статье для универсальных линейно-инвариантных семейств функций доказана теорема регулярности (регулярности роста $\max_{|z|\leqq r}|f(z)|$, $\max_{|z|\leqq r}|f'(z)|$ и т. п.) и некоторые примыкающие к этой теореме результаты.

Оказывается, что изучение классов конформных отображений, основанное на их линейной инвариантности, не только позволяет получить обобщения ранее известных результатов на более широкие классы функций, но и новые результаты (в т. ч. в классе S однолистных функций), и новые, подчас более простые, доказательства.

Понятие линейно-инвариантного семейства функциий было введено Х. Поммеренке [1]. Семейство $\mathfrak{M}$ регулярных в круге $\Delta=\{|z|<1\}$ функций $f(z)=z+\cdots$ называется линейно-инвариантным, если

1) $f'(0)\neq 0$ в Δ (локальная однолистность);

2) при любом $a\in\Delta$ и $\theta\in[0, 2\pi)$

$$f_\theta(z)=\frac{f\left(e^{-i\theta}\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)-f(e^{-i\theta}a)}{f'(e^{-i\theta}a)\,e^{-i\theta}(1-|a|^2)}=z+\cdots\in\mathfrak{M}. \tag{1}$$

При этом порядком $\mathfrak{M}$ называется число пор $\mathfrak{M}=\sup\limits_{f\in\mathfrak{M}}\dfrac{|f''(0)|}{2}$. Каждая локально-однолистная в Δ функция $f(z)=z+\cdots$ порождает линейно-инвариантное семейство $\mathfrak{M}[f]$, определяемое формулой (1). Порядком такой функции $f(z)$ Х. Поммеренке называл число пор $f=$ пор $\mathfrak{M}[f]$. Он показал, что

$$\text{пор} f=\sup_{z\in\Delta}\left|-\bar{z}+\frac{1-|z|^2}{2}\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\geqq 1.$$

Универсальным линейно-инвариантным семейством порядка $\alpha\geqq 1$ в [1] называется объединение всех линейно-инвариантных семейств порядка не выше α. Оно обозначается U_α.

Интерес к линейно-инвариантным семействам вызван тем, что многие изучающиеся классы конформных отображений являются линейно-инвариантными семействами и обладают рядом свойств, общих для всех таких семейств. Примерами линейно-инвариантных семейств служат: класс выпуклых функций $K=U_1$ (см. [1]), классы однолистных (S) и близких к выпуклым функций, классы функций с ограниченным граничным вращением [2] и др. (см., например, [3; 4]).

Пусть $g(z)$ — непрерывная в Δ функция. Обозначим $M(r, g)=\max\limits_{|z|\leqq r}|g(z)|$, $r\in(0, 1)$. В классе S однолистных функций известен следующий результат (см., например, [5, стр. 120—122] или [6, стр. 80—82]):

Теорема А. *Для $f \in S$ существует*

$$\lim_{r\to 1-0}\left[M(r,f)\frac{(1-r)^2}{r}\right]=\lim_{r\to 1-0}\left[M(r,f')\frac{(1-r)^3}{1+z}\right]=\delta\in[0,\,1];$$

$\delta=1$ *только для* $f_\theta(z)=z(1-ze^{-i\theta})^{-2}$, *при* $\delta\neq 1$ *величины, стоящие под знаком предела, строго убывают с возрастанием* r. *Если* $\delta\neq 0$, *то существует* $\varphi_0\in[0,\,2\pi)$ *такое, что*

$$\lim_{r\to 1-0}\left[|f(re^{i\varphi})|\frac{(1-r)^2}{r}\right]=\lim_{r\to 1-0}\left[|f'(re^{i\varphi})|\frac{(1-r)^3}{1+r}\right]=\begin{cases}\delta, & \varphi=\varphi_0,\\ 0, & \varphi\neq\varphi_0;\end{cases}$$

величины, стоящие здесь под знаком предела, также убывают по $r\in(0,\,1)$.

В. К. Хейман [7] обобщил этот результат на функции, p-листные в среднем в Δ. Утверждения такого сорта носят название теорем регулярности (регулярности роста $M(r,\,f)$, $M(r,\,f')$ и т. д.). Число δ из теоремы A обычно называют числом Хеймана, φ_0 — направлением максимального роста (н. м. р.) функции $f(z)$. В дальнейшем будем придерживаться этой терминологии.

Целью этой статьи является получение теоремы регулярности в U_α и некоторых примыкающих к этой теореме результатов.

Пусть $f(z)$ локально однолистна в Δ, $F=f(\Delta)$ — риманова поверхность, на которую $f(z)$ отображает Δ. Пусть V — кривая на F, $\operatorname{diam} V$ — диаметр проекции V на плоскость, $l(V)=\int_V|dw|$ — длина V (можно считать V кусочно-гладкой). Пусть $w_1,\ w_2\in F$, обозначим (см. [1])

$$d(w_1,\ w_2)=\inf_V \operatorname{diam} V,\quad l(w_1,\ w_2)=\inf_V l(V),$$

где инфимум берется по всем кривым из F, связывающим w_1 и w_2. Очевидно, $|w_1-w_2|\le d(w_1,w_2)\le(w_1,\ w_2)$.

В дальнейшем понадобятся неравенства, доказанные Х. Поммеренке [1] для $f\in U_\alpha$ (здесь и далее всюду $1\le\alpha<\infty$), $|z|\le r$:

$$\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\le\frac{2(\alpha+r)}{1-r^2},\tag{1}$$

$$\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1+r)^{\alpha+1}}\le|f'(z)|\le\frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha-1}},\tag{2}$$

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha\right]\le\frac{d(f(z),\ 0)}{(1-r^2)|f'(z)|}\le\frac{l(f(z),\ 0)}{(1-r^2)|f'(z)|}.\tag{3}$$

При доказательстве теоремы регулярности в U_α будет использована теорема Харди и Литтльвуда [8, стр. 215—216]: *Если* $g(x)$ *дифференцируема на* $(0,\,1)$, $g'(x)$ *возрастает на* $(0,\,1)$, $\alpha>0$ *и* $\lim\limits_{x\to 1-0}g(x)(1-x)^\alpha=\delta>0$, *то существует* $\lim\limits_{x\to 1-0}g'(x)(1-x)^{\alpha+1}=\alpha\delta$.

Теорема 1 (теорема регулярности в U_α). *Пусть* $f(z)\in U_\alpha$. *Тогда*

1) *при каждом* $\varphi\in[0,\,2\pi)$ *величины* $|f'(re^{i\varphi})|\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ *и* $M(r,\,f')\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ *убывают по* r *на* $(0,\,1)$;

2) *существуют* $\delta \in [0, 1]$ *и вещественное* φ_0 *такие, что*

$$\delta = \lim_{r\to 1-0}\left[M(r, f')\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right] = \lim_{r\to 1-0}\left[\,|f'(re^{i\varphi_0})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right]$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\left[M(r, f'')\frac{(1-r)^{\alpha+2}}{2(\alpha+1)(1+z)^{\alpha-2}}\right] = \overline{\lim_{r\to 1-0}}\left[\,|f''(re^{i\varphi_0})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+2}}{2(\alpha+1)(1+r)^{\alpha-2}}\right]$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\left[\int_0^r M(\rho, f'')d\rho\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right] = \lim_{r\to 1-0}\left[\int_0^r |f''(\rho e^{i\varphi_0})|\,d\rho\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right]$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\left[M(r, d(f(z), 0)\,2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] = \lim_{r\to 0-1}\left[d(f(re^{i\varphi_0}), 0)\,2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right]$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\left[M(r, l(f(z), 0))\,2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] = \lim_{r\to 1-0}\left[l(f(re^{i\varphi_0}), 0)2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right]$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\left[\max_{\varphi}\left(\int_0^r |f'(\rho e^{i\varphi})|\,d\rho\right)2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] = \lim_{r\to 1-0}\left[\int_0^r |f'(\rho e^{i\varphi_0})|\,d\rho\,2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right]$$

$$\geq \overline{\lim_{r\to 1-0}}\left[M(r, f)2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right] \geq \overline{\lim_{r\to 1-0}}\left[\,|f(re^{i\varphi_0})|\,2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right];$$

3) $\delta = 1$ *только для* $f_\theta(z) = \dfrac{e^{i\theta}}{2\alpha}\left[\left(\dfrac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\right)^{\alpha} - 1\right]$.

З а м е ч а н и е Позже (см. замечание к теореме 3 и теорему 4) будет показано, что в теореме 1 можно всюду убрать знак верхнего предела и заменить неравенства равенствами; более того, для $n=2, 3, 4, \ldots$ существует $\lim_{r\to 1-0}\left[\,|f^{(n)}(re^{i\varphi_0})|\,(1-r)^{\alpha+n}\right] = \delta 2^{\alpha-1}(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)$.

Доказательство. 1) Доказательство этой части теоремы совершенно аналогично доказательству соответствующего утверждения для класса S [5. стр. 120—122], [6, стр. 80—82].

Из (1) следует, что для любого вещественного φ

$$\frac{\partial}{\partial r}\ln|f'(re^{i\varphi})| = \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{i\varphi}f''(re^{i\varphi})}{f'(re^{i\varphi})}\right\} \leq \frac{2(\alpha+r)}{1-r^2} = -\frac{\partial}{\partial r}\ln\left[\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right],$$

т. е. $\dfrac{\partial}{\partial r}\ln\left[\left(|f'(re^{i\varphi})|\,\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right]\right. \leq 0$; и $|f'(re^{i\varphi})|\,\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ убывает на $(0, 1)$.

Пусть $M(r, f') = |f'(re^{i\varphi(r)})|$. Возьмем $0<r_1<r_2<1$.

$$M(r_1, f')\frac{(1-r_1)^{\alpha+1}}{(1+r_1)^{\alpha-1}} \geq |f'(r_1e^{i\varphi(r_2)})|\,\frac{(1-r_1)^{\alpha+1}}{(1+r_1)^{\alpha-1}}$$

$$\geq |f'(r_2e^{i\varphi(r_2)})|\,\frac{(1-r_2)^{\alpha+1}}{(1+r_2)^{\alpha-1}} = M(r_2, f')\frac{(1-r_2)^{\alpha+1}}{(1+r_2)^{\alpha-1}}.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

2) Из доказанного следует существование $\lim_{r\to 1-0}\left[M(r, f')\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right] = \delta \in [0,1]$.

Покажем, что существует направление максимального роста φ_0 функции $f'(z)$.

Выберем возрастающую последовательность $r_n>0$, $r_n \to 1-0$ такую, что $\varphi_n=\varphi(r_n)\to\varphi_0$. При фиксированном n из 1) получаем для $r<r_n$:

$$M(r, f')\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} \geqq |f'(re^{i\varphi_n})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} \geqq |f'(r_n e^{i\varphi_n})|\,\frac{(1-r_n)^{\alpha+1}}{(1+r_n)^{\alpha-1}}$$

$$=M(r_n, f')\,\frac{(1-r_n)^{\alpha+1}}{(1+r_n)^{\alpha-1}}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получим

$$M(r, f'),\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} \geqq |f'(re^{i\varphi_0})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} \geqq \delta.$$

Отсюда, по теореме о зажатой переменной,

$$\lim_{r\to 1-0}\Big[\,|f'(re^{i\varphi_0})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\Big]=\delta.$$

Перейдем к рассмотрению $f''(z)$. Из (1) и (2) следует

$$|f''(z)| \leqq \frac{2(\alpha+r)(1+r)^{\alpha-2}}{(1-r)^{\alpha+2}}.$$

Обозначим $\delta_{f''}=\overline{\lim_{r\to 1-0}}\Big[M(r, f'')\,\frac{(1-r)^{\alpha+2}}{2(\alpha+r)(1+r)^{\alpha-2}}\Big]$. Сначала покажем, что $\delta_{f''}=\delta$.

$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, r_0\in(0, 1)$ такое, что $\forall\, r>r_0$ $|f''(re^{i\varphi})| \leqq (\delta_{f''}+\varepsilon)\,\dfrac{2(\alpha+r)(1+r)^{\alpha-2}}{(1-r)^{\alpha+2}}$. Поэтому при фиксированном $\varepsilon>0$ для $r>r_0$ и любого $\varphi\in[0, 2\pi)$

$$|f'(re^{i\varphi})|-|f'(r_0e^{i\varphi})|=\int_{r_0}^{r}\operatorname{Re}\Big\{\frac{e^{i\varphi}f''(\rho e^{i\varphi})\,|f'(\rho e^{i\varphi})|}{f'(\rho e^{i\varphi})}\Big\}\,d\rho \tag{4}$$

$$\leqq(\delta_{f''}+\varepsilon)\int_{r_0}^{r}\frac{2(\alpha+\rho)(1+\rho)^{\alpha-2}}{(1-\rho)^{\alpha+2}}\,d\rho=(\delta_{f''}+\varepsilon)\Big[\frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}-\frac{(1+r_0)^{\alpha-1}}{(1-r_0)^{\alpha+1}}\Big].$$

Отсюда

$$\lim_{r\to 1-0}\Big[\,|f'(re^{i\varphi_0})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\Big]\leqq \delta_{f''}+\varepsilon,$$

и, в силу произвольности ε, $\delta\leqq\delta_{f''}$.

Теперь перепишем (1) в виде

$$|f''(re^{i\varphi})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+2}}{2(\alpha+r)(1+r)^{\alpha-2}} \leqq |f'(re^{i\varphi})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} \leqq M(r, f')\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}. \tag{5}$$

Пусть для последовательности $z_n=r_ne^{i\theta_n}$, $r_n\uparrow 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\,|f''(z_n)|\,\frac{(1-r_n)^{\alpha+2}}{2(\alpha+r_n)(1+r_n)^{\alpha-2}}\Big]=\delta_{f''}.$$

Переходя в (5) к пределу вдоль последовательности z_n, получим $\delta_{f''}\leqq\delta$. Таким образом, $\delta_{f''}=\delta$. Аналогично доказывается, что

$$\varlimsup_{r\to 1-0}\left[\,|f''(re^{i\varphi_0})|\;\frac{(1-r)^{\alpha+2}}{2(\alpha+r)(1+r)^{\alpha-2}}\,\right]=\delta.$$

Обозначим $F(r)=\int\limits_{r_0}^{r} M(\rho,\ f'')d\rho$. Из (4) следует

$$|f'(re^{i\varphi_0})|-|f'(r_0e^{i\varphi_0})|\leqq F(r)\leqq(\delta+\varepsilon)\left[\frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}-\frac{(1+r_0)^{\alpha-1}}{(1-r_0)^{\alpha+1}}\right].$$

Умножая последнее неравенство на $\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ и устремляя r к 1, получим

$$\delta\leqq\varliminf_{r\to 1-0}\left[F(r)\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right]\leqq\varlimsup_{r\to 1-0}\left[F(r)\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right]\leqq\delta+\varepsilon.$$

В силу произвольности ε, существует $\lim\limits_{r\to 1-0}[F(r)(1-r)^{\alpha+1}]=\delta 2^{\alpha-1}$. Так как $F'(r)=M(r,\ f'')$ возрастает на $(0,\ 1)$, то применима теорема Харди и Литтльвуда, и существует $\lim\limits_{r\to 1-0}[M(r,\ f'')(1-r)^{\alpha+2}]=\delta 2^{\alpha-1}(\alpha+1)$ (этот факт можно получить и без использования теоремы Харди и Литтльвуда — как тривиальное следствие теоремы 4).

Утверждение $\lim\limits_{r\to 1-0}\left[\int\limits_0^r |f''(\rho e^{i\varphi_0})|\,d\rho\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right]=\delta$ следует из неравенства

$$|f'(re^{i\varphi_0})|-|f'(r_0\,e^{i\varphi_0})|=\int\limits_{r_0}^{r}\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{i\varphi_0}f''(\rho e^{i\varphi_0})\,|f'(\rho e^{i\varphi_0})|}{f'(\rho e^{i\varphi_0})}\right\}d\rho$$

$$\leqq\int\limits_{r_0}^{r}|f''(\rho e^{i\varphi_0})|\,d\rho\leqq F(r)$$

после умножения его на $(1-r)^{\alpha+1}/(1+r)^{\alpha-1}$ и перехода к пределу при $r\to 1-0$.

Переходим к доказательству утверждений относительно $f(z)$. Из (3) имеем

$$\text{(6)}\qquad \frac{1}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}\right](1-r^2)\,|f'(re^{i\varphi})|\leqq d(f(re^{i\varphi}),\ 0)\leqq l(f(re^{i\varphi}),\ 0).$$

Умножая это неравенство на $2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}$ и устремляя r к 1, получим

$$\delta\leqq\varliminf_{r\to 1-0}\left[2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}M(r,\ d(f(z),\ 0))\right]\leqq\varliminf_{r\to 1-0}\left[2\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}M(r,\ l(f(z),\ 0))\right].$$

С другой стороны, поскольку $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, r^0\in(0,\ 1)$ такое, что $\forall\, r>r^0$ и $\forall\,\varphi\in[0,\ 2\pi)$ $|f'(re^{i\varphi})|\leqq(\delta+\varepsilon)\frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}}$, то

$$\text{(7)}\qquad d(f(re^{i\varphi}),\ 0)\leqq l(f(re^{i\varphi}),\ 0)\leqq\int\limits_0^r|f'(\rho e^{i\varphi})|\,d\rho$$

$$\leqq c(r^0)+(\delta+\varepsilon)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{(1+\rho)^{\alpha-1}}{(1-\rho)^{\alpha+1}}\,d\rho=c_1(r^0)+\frac{\delta+\varepsilon}{2\alpha}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha},$$

где $c(r^0)$ и $c_1(r^0)$ зависят только от r^0. Отсюда следует

$$\overline{\lim_{r\to 1-0}}\,[2\alpha\,(\frac{1-r}{1+r})^{\alpha} M(r,\ d(f(z),\ 0))] \leqq \overline{\lim_{r\to 1-0}}\,[2\alpha\,(\frac{1-r}{1+r})^{\alpha} M(r,\ l(f(z),\ 0))] \leqq \delta+\varepsilon.$$

И, в силу произвольности ε, получаем соответствующее утверждение теоремы о $M(r,\ d(f(z),\ 0))$ и $M(r,\ l(f(z),\ 0))$. Заключение теоремы о поведении $d(f(re^{i\varphi_0}),\ 0)$ и $l(f(re^{i\varphi_0}),\ 0)$ при $r\to 1-0$ теперь немедленно следует из неравенства (6) при $\varphi=\varphi_0$ и факта: $l(f(re^{i\varphi_0}),\ 0)\leqq M(r,\ l(f(z),\ 0))$. Из (7) и теоремы о зажатой переменной получаем

$$\delta=\lim_{r\to 0-1}[2\alpha(\frac{1-r}{1+r})^{\alpha}\int_0^r |f'(\rho e^{i\varphi_0})|\,d\rho]=\lim_{r\to 1-0}[2\alpha\,(\frac{1-r}{1+r})^{\alpha}\max_{\varphi}\int_0^r |f'(\rho e^{i\varphi})|\,d\rho].$$

Наконец, заметим, что для любого $\varphi\in[0,\ 2\pi)$

$$|f(re^{i\varphi})|\leqq\int_0^r |f'(\rho e^{i\varphi})|\,d\rho\leqq\frac{\delta+\varepsilon}{2\alpha}(\frac{1+r}{1-r})^{\alpha}+c_1(r^0)$$

в прежних обозначениях. Отсюда, в силу произвольности ε, получаем неравенство

$$\overline{\lim_{r\to 1-0}}\,[2\alpha(\frac{1-r}{1+r})^{\alpha}|f(re^{i\varphi})|]\leqq\overline{\lim_{r\to 1-0}}\,[2\alpha(\frac{1-r}{1+r})^{\alpha}M(r,\ f)]\leqq\delta.$$

3) Пусть $\delta=1$ для $f_0(z)\in U_\alpha$. Преобразованием поворота $e^{i\varphi}f(ze^{-i\varphi})$ добьемся того, что $\varphi_0=0$. Так как $|f_0'(r)|\ \dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}$ не возрастает по r, то

$$|f_0'(r)|\frac{(1+r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\equiv 1,\quad r\in(0,\ 1).$$

Пусть этому тождеству, кроме функции $f_0(z)=\dfrac{1}{2\alpha}[(\dfrac{1+z}{1-z})^{\alpha}-1]$, удовлетворяет также $f_1(z)\in U_\alpha$. Тогда $f_1'(z)=f_0'(z)\,e^{i\theta(z)}$, где $\theta(z)$ — регулярная в Δ функция, вещественная на $[0,\ 1)$.

$$\operatorname{пор} f_1=\sup_{z\in\Delta}|-\bar z+\frac{1-|z|^2}{2}\ \frac{f_1''(z)}{f_1'(z)}|$$

$$\geqq|-r+\frac{1-r^2}{2}(\frac{2(\alpha+r)}{1-r^2}+i\theta'(r))|=\sqrt{\alpha^2+(\frac{1-r^2}{2}\ \theta'(r))^2}>\alpha,$$

если при каком-нибудь $r\in(0,\ 1)$ $\theta'(r)\neq 0$. Но $\operatorname{пор} f_1\leqq\alpha$. Следовательно, по теореме единственности, $\theta'(z)\equiv 0$ в Δ. Так как $\theta(0)=0$, то $\theta(z)\equiv 0$ и $f_1(z)\equiv f_0(z)$. Теорема доказана.

Определение. *Направлением интенсивного роста* (н. и. р.) *функции $f(z)$ будем называть каждое $\theta\in[0,\ 2\pi)$ такое, что*

$$\lim_{r\to 1-0}[\,|f'(re^{i\theta})|\ \frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}=\delta_\theta>0\,;$$

δ_θ *будем называть числом Хеймана функции* $f(z)$, *соответствующим* (н. и. р.) θ *функции* $f(z)$.

Из теоремы 1 следует, что направлению максимального роста (н. м. р.) функции $f(z)$ соответствует число Хеймана $\delta_0 = \max\limits_\theta \delta_\theta$; это δ_0 будем называть числом Хеймана функции $f(z)$. Таким образом, получается естественное разбиение U_α на дизъюнктные подклассы $U_\alpha(\delta)$, $\delta \in [0, 1]$; функциям из $U_\alpha(\delta)$ соответствует одно и то же число Хеймана δ.

В связи с линейной инвариантностью изучаемых здесь семейств интересно и, как будет показано в дальнейшем, важно для приложений иметь информацию о числах Хеймана функций $f_\theta(z, a)$, если $f(z) \in U_\alpha(\delta_0)$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in U_\alpha$, $f(z, a) = \dfrac{f\left(\frac{z+a}{1-\bar{a}z}\right) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)}$.

1) *Если* $f \in U_\alpha(0)$, *то* $f(z, a) \in U_\alpha(0)$ *при всех* $\alpha \in \Delta$.

2) *Если* $f \in U_\alpha(\delta_0)$, $\delta_0 \in (0, 1)$, *то для любого* $\delta \in [\delta_0, 1)$ *существует* $a \in \Delta$ *такое, что* $f(z, a) \in U_\alpha(\delta)$.

3) *Если* $f \in U_\alpha(\delta_0)$, $\delta_0 \in (0, 1)$ *и существует интервал, свободный от* (н. и. р.) $f(z)$, *то для любого* $\delta \in (0, 1)$ *существует* $a \in \Delta$ *такое, что* $f(z, a) \in U_\alpha(\delta)$.

Доказательство этой теоремы опирается на лемму, имеющую самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть* $f \in U_\alpha$, $a \in \Delta$. *При фиксированном вещественном* φ *обозначим* $R(r) = \left|\dfrac{re^{i\varphi}+a}{1+\bar{a}re^{i\varphi}}\right|$, $\gamma(r) = \arg\dfrac{re^{i\varphi}+a}{1+\bar{a}re^{i\varphi}}$, $re^{i\varphi} \neq a$.

1) *Чтобы* φ *было* (н. и. р.) *для* $f(z, a)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $e^{i\varphi} = \dfrac{e^{i\gamma}-a}{1-\bar{a}e^{i\gamma}}$, *где* γ — (н. и. р.) *функции* $f(z)$.

2) $$\lim_{r\to 1-0}\left[|f'(re^{i\gamma})|\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right] = \lim_{r\to 1-0}\left[|f'(R(r)e^{i\gamma(r)})|\frac{(1-R(r))^{\alpha+1}}{(1+R(r))^{\alpha-1}}\right],$$ *где* $e^{i\gamma} = \dfrac{e^{i\varphi}+a}{1+\bar{a}e^{i\varphi}}$.

Доказательство леммы 1. 1) Пусть φ — (н. и. р.) для $f(z, a)$. Тогда существует $\lim\limits_{r\to 1-0}\left[|f'(R(r)e^{i\gamma(r)})|\dfrac{(1-R(r))^{\alpha+1}}{(1+R(r))^{\alpha-1}}\right] = \delta > 0$, так как

$$f'(z, a) = \frac{f'\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)}{f'(a)(1-|a|^2)} \quad\text{и}\quad \lim_{r\to 1-0}\frac{1-r}{1-R(r)} = \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{R'(r)} = \frac{|1+\bar{a}e^{i\varphi}|^2}{1-|a|^2} > 0.$$

Заметим, что $R(r)$ возрастает на некотором интервале $(r_0, 1)$. Возьмем $r_0 < r < r_1 < 1$. По теореме 1,

$$|f'(R(r_1)e^{i\gamma(r_1)})|\frac{(1-R(r_1))^{\alpha+1}}{(1+R(r_1))^{\alpha-1}} \leq |f'(R(r)e^{i\gamma(r_1)})|\frac{(1-R(r))^{\alpha+1}}{(1+R(r))^{\alpha-1}}.$$

Устремляя здесь r_1 к 1, получим для всех $r \in (r_0, 1)$: $\delta \leq |f'(R(r)e^{i\gamma})| \dfrac{(1-R(r))^{\alpha+1}}{(1+R(r))^{\alpha-1}}$, где $e^{i\gamma} = \dfrac{e^{i\varphi}+a}{1+\bar{a}e^{i\varphi}}$. Следовательно,

$$\delta_*=\lim_{r\to 1-0}\left[\,|f'(re^{i\gamma})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\,\right]\geqq\delta, \tag{8}$$

т. е. γ — одно из (н. и. р.) $f(z)$, и необходимость доказана.

Обозначим $f_1(z)=f(z,\ a)$, $A=\{e^{i\eta}:\ \eta$ — (н. и. р.) для $f_1(z,\ -a)\}$, $B=\{\frac{e^{i\varphi}+a}{1+\bar{a}\,e^{i\varphi}}:\ \varphi$ — (н. и. р.) для $f_1(z)\}$, $C=\{e^{i\gamma}:\ \gamma$ — (н. и. р.) для $f(z)\}$. Из доказанной необходимости условия леммы следует $A\subset B\subset C$. Но $f_1(z,\ -a)\equiv f(z)$. Поэтому $A=C$, следовательно, $A=B=C$. Первое утверждение леммы доказано.

2) Если γ не является (н. и. р.) для $f(z)$, то из первого пункта леммы следует (здесь и далее сохраняем обозначения первого пункта)

$$\lim_{r\to 1-0}\left[\,|f'(re^{i\gamma})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\,\right]=\lim_{r\to 1-0}\left[\,|f'(R(r)e^{i\gamma(r)})|\,\frac{(1-R(r))^{\alpha+1}}{(1+R(r))^{\alpha-1}}\,\right]=0.$$

Пусть γ — (н. и. р.) $f(z)$. Из (8) имеем $\delta_*\geqq\delta>0$. Покажем, что $\delta_*\leqq\delta$. Обозначим

$$R_1(r)=\left|\frac{re^{i\gamma}-a}{1+\bar{a}re^{i\gamma}}\right|,\quad \delta_1=\lim_{r\to 1-0}\left[\,\left|f_1'\left(\frac{re^{i\gamma}-a}{1-\bar{a}re^{i\gamma}}\right)\right|\,\frac{(1-R_1(r))^{\alpha+1}}{(1+R_1(r))^{\alpha-1}}\,\right].$$

Так как $\frac{e^{i\gamma}-a}{1-\bar{a}\,e^{i\gamma}}=e^{i\varphi}$ то, променяя (8) к $f_1(z)$, получим

$$\lim_{r\to 1-0}\left[\,|f_1'(re^{i\varphi})|\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\,\right]\geqq\delta_1\ \Leftrightarrow,$$

$$\lim_{r\to 1-0}\left[\frac{|f'(R(r)e^{i\gamma(r)})|}{|f'(a)|\,.\,|1+\bar{a}re^{i\varphi}|^2}\,\frac{(1-R(r))^{\alpha+1}}{(1+R(r))^{\alpha-1}}\right].\lim_{r\to 1-0}\left(\frac{1-r}{1-R(r)}\right)^{\alpha+1}\geqq\delta_1$$

$$\Leftrightarrow\quad \delta\geqq\frac{\delta_1\,|f'(a)|\,(1-|a|^2)^{\alpha+1}}{|1+\bar{a}\,e^{i\varphi}|^{2\alpha}}\,.$$

С другой стороны,

$$\delta_1=\lim_{r\to 1-0}\left[\frac{|f'(re^{i\gamma})|}{|f'(a)|\,.\,\left|1+\bar{a}\,\frac{re^{i\gamma}-a}{1-\bar{a}\,re^{i\gamma}}\right|^2}\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right].\lim_{r\to 1-0}\left(\frac{1-R_1(r)}{1-r}\right)^{\alpha+1}$$

$$=\frac{\delta_*}{|f'(a)|\,.\,|1+\bar{a}\,e^{i\varphi}|^2}\left(\lim_{r\to 1-0}R_1'(r)\right)^{\alpha+1}=\frac{\delta_*|1+\bar{a}\,e^{i\varphi}|^{2\alpha}}{|f'(a)|\,(1-|a|^2)^{\alpha+1}}\,.$$

Следовательно, $\delta\geqq\delta_*$. Таким образом, $\delta=\delta_*$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть* $f\in U_\alpha$. *Для любого* $\varphi\in[0,\ 2\pi)$ *существует* $\delta(\varphi)\in[0,\ 1]$ *такое, что для любой окружности в широком смысле* Γ, *ортогональной* $\{|z|=1\}$ *в точке* $e^{i\varphi}$, $|f'(\xi)|\,\frac{(1-|\xi|)^{\alpha+1}}{(1+|\xi|)^{\alpha-1}}\to\delta(\varphi)$ *при* $\xi\to e^{i\varphi}$ $(\xi\in\Delta)$ *вдоль* Γ; $\delta(\varphi)$ *не зависит от* Γ.

Этот результат имеет место, в частности, и в классе $S\subset U_2$.

Заметим, что следствие 1 перестает быть верным, если в нем убрать требование ортогональности Γ к окружности $\{|z|=1\}$.

Действительно, $f_0(z)=\frac{1}{2\alpha}[(\frac{1+z}{1-z})^{\alpha}-1]\in U_\alpha(1)$. Если Γ_1 — отрезок из Δ, ортогональный окружности $\{|z|=1\}$ в точке $z=1$, то вдоль Γ_1 $|f_0'(\xi)|\frac{(1-|\xi|)^{\alpha+1}}{(1+|\xi|)^{\alpha-1}}\xrightarrow[\xi\to 1]{}1$. Если Γ_2 — отрезок из Δ, оканчивающийся в $z=1$ и образующий с Γ_1 угол β, то при $\xi\to 1$ вдоль Γ_2, $x=|1-\xi|$,

$$\lim[|f_0'(\xi)|\frac{(1-|\xi|)^{\alpha+1}}{(1+|\xi|)^{\alpha-1}}]=(\lim\frac{1-|\xi|}{-1|\xi|})^{\alpha+1}$$

$$=(\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x^2-2x\cos\beta+1}}{x})^{\alpha+1}=(\cos\beta)^{\alpha+1}\neq 1,$$

если $\beta\neq 0$. То есть число $\delta(\varphi)$ из следствия 1 может зависеть от угла между Γ и $\{|z|=1\}$.

Доказательство теоремы 2. 1) Это утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 1.

2) По теореме 1, для любого $\varphi\in[0,2\pi)$ существует $\lim\limits_{r\to 1-0}[|f'(re^{i\varphi})|\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}]=\delta(\varphi)$. Фиксируем φ, положим $z=\frac{re^{i\varphi}-a}{1-\bar a re^{i\varphi}}$, $|z|=R(r)$. Рассмотрим $\lim\limits_{r\to 1-0}[|f'(z,a)|\frac{(1-|z|)^{\alpha+1}}{(1+|z|)^{\alpha-1}}]=\delta^*(\varphi)$; здесь $z=\frac{re^{i\varphi}-a}{1-\bar a re^{i\varphi}}$,

$$\delta^*(\varphi)=\lim_{r\to 1-0}\frac{|f'(re^{i\varphi})|(1-r)^{\alpha+1}}{|f'(a)|\cdot|1+\bar a z|^2(1+r)^{\alpha-1}}\cdot\lim_{r\to 1-0}(\frac{1-R(r)}{1-r})^{\alpha+1}$$

$$=\frac{\delta(\varphi)}{|f'(a)|\,|1+\bar a\frac{e^{i\varphi}-a}{1-\bar a e^{i\varphi}}|^2}(\lim_{r\to 1-0}R'(r))^{\alpha+1}$$

$$=\frac{\delta(\varphi)(1-|a|^2)^{\alpha-1}}{|f'(a)|\cdot|1-\bar a e^{i\varphi}|^{2\alpha}}\leq\lim_{R(r)\to 1-0}[M(R(r),f'(z,a))\frac{(1-R(r))^{\alpha+1}}{(1+R(r))^{\alpha-1}}]=\delta_a$$

— число Хеймана для $f(z,a)$. Теперь в качестве φ возьмем φ_0 — (н. м. р.) $f(z)$. Положим $a=\rho e^{i\varphi_0}$, тогда

$$\frac{\delta_0(1-\rho^2)^{\alpha-1}}{|f'(\rho e^{i\varphi_0})|(1-\rho)^{2\alpha}}=\frac{\delta_0(1+\rho)^{\alpha-1}}{|f'(\rho e^{i\varphi_0})|(1-\rho)^{\alpha+1}}\leq\delta_a. \tag{9}$$

Покажем, что при $a=\rho e^{i\varphi_0}$ $\delta_a=\frac{\delta_0(1+\rho)^{\alpha-1}}{|f'(\rho e^{i\varphi_0})|(1-\rho)^{\alpha+1}}$.

По теореме 1, при фиксированном $a=\rho e^{i\varphi_0}$ существует $\varphi_1\in[0,2\pi)$ такое, что

$$\lim_{r\to 1-0}[\frac{|f'(\frac{re^{i\varphi_1}+a}{1+\bar a re^{i\varphi_1}})|}{|1+\bar a re^{i\varphi_1}|^2}\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}]=\delta_a.$$

Обозначим $\frac{re^{i\varphi_1}+a}{1+\bar a re^{i\varphi_1}}=R_1(r)e^{i\varphi(r)}$, $\varphi(r)$ — вещественное. Тогда

$$\delta_a \leq \lim_{r\to 1-0} \left[\frac{M(R_1(r), (f'(z))\,(1-R_1(r))^{\alpha+1}}{|f'(a)|\;|1+\bar{a}re^{i\varphi_1}|^2\,(1+R_1(r))^{\alpha-1}} \right] \lim_{r\to 1-0} \left(\frac{1-r}{1-R_1(r)} \right)^{\alpha+1}$$

$$= \frac{\delta_0\,|1+\bar{a}\,e^{i\varphi_1}|^{2\alpha}}{|f'(a)|\,(1-\rho^2)^{\alpha+1}} \leq \frac{\delta_0(1+\rho)^{\alpha-1}}{|f'(a)|\,(1-\rho)^{\alpha+1}}$$

и $\delta_a = \frac{\delta_0(1+\rho)^{\alpha-1}}{|f'(a)|\,(1-\rho)^{\alpha+1}}$, если $a=\rho e^{i\varphi_0}$. Тогда, по первому пункту теоремы 1, существует $\rho \in (0, 1)$, при котором δ_a принимает заданное значение из $[\delta_0, 1)$.

3) Пусть в интервале (x', x'') нет (н. и. р.) $f(z)$. Подберем $\eta>0$ так, что $x'+\eta=x_1<x_2=x''-\eta$. Если в секторе $\{z:\ z\in\Delta,\ x_1<\arg z<x_2\}$ $|f'(z)| = 0((1-|z|)^{\alpha-1})$, то, по теореме единственности Привалова [9, стр. 413—414], $f'(z)\equiv 0$, что невозможно. Следовательно, существует последовательность $a_n=\rho_n e^{i\theta_n}$, $\theta_n \in (x_1, x_2)$, $\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, $\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta_0 \in [x_1, x_2]$ такая, что $|f'(a_n)| = (1-\rho_n)^{\alpha-1}K_n$, $K_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Пусть φ_n — (н. м. р.) для $f(z, a_n)$, $\frac{re^{i\varphi_n}+a_n}{1+\bar{a}_n re^{i\varphi_n}} = R_n(r)e^{i\gamma_n(r)}$, $\gamma_n(r)$ — вещественная. Обозначим

$$e^{i\gamma_n} = \frac{e^{i\varphi_n}+a_n}{1+\bar{a}_n e^{i\varphi_n}}, \quad \delta_n^* = \lim_{r\to 1-0} \left[|f'(re^{i\varphi_n}, a_n)|\, \frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} \right],$$

$$\delta_n = \lim_{r\to 1-0} \left[|f'(re^{i\gamma_n})|\, \frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}} \right].$$

$$\delta_n^* = \lim_{r\to 1-0} \left[\frac{|f'(R_n(r)\,e^{i\gamma_n(r)})|\,\dfrac{(1-R_n(r))^{\alpha+1}}{(1+R_n(r))^{\alpha-1}}}{|f'(a_n)|\,|1+\bar{a}_n re^{i\varphi_n}|^2} \right] \left[\lim_{r\to 1-0} \frac{1-r}{1-R_n(r)} \right)^{\alpha+1}$$

$$= \frac{\delta_n|1+\bar{a}_n e^{i\varphi_n}|^{2\alpha}}{|f'(a_n)|\,(1-\rho_n^2)^{\alpha+1}} = \frac{\delta_n(1-\rho_n^2)^{\alpha-1}}{|f'(a_n)|\;|1-\rho_n e^{i(\gamma_n-\theta_n)}|^{2\alpha}} > 0,$$

по лемме 1. Из последовательности $\{a_n\}$ выберем подпоследовательность так, чтобы сходились соответствующие подпоследовательности $\{\delta_n\}$ и $\{\delta_n^*\}$ (все подпоследовательности обозначим, как и прежде).

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^* = \lim_{n\to\infty} \delta_n \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\rho_n)^{\alpha-1}}{K_n\,|1-\rho_n e^{i(\gamma_n-\theta_n)}|^{2\alpha}}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \delta_n \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\rho_n)^{\alpha-1}}{K_n\,|1-\rho_n e^{i\eta}|^{2\alpha}},$$

так как, по лемме 1, γ_n — (н. и. р.) функции $f(z)$ не принадлежит (x', x''). Поскольку $K_n\to\infty$, то $\delta_n^*\to 0$.

Пусть теперь δ — любое число из $(0, 1)$. Фиксируем n так, чтобы $\delta_n^*<\delta$. Из второго утверждения теоремы 2 следует: для $f_n(z)=f(z, a_n)\in U_\alpha(\delta_n^*)$ существует $a \in \Delta$ такое, что $f_n(z, a) \in U_\alpha(\delta)$. Очевидно, $f_n(z, a) \in \mathfrak{M}[f]$. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 и единственности (н. и. р.) для функций класса S (см. теорему A) немедленно получаем

Следствие 2. *Обозначим $S(\delta)$ подкласс функций из S, которым соответствует число Хеймана δ. Если $\delta>0$, то для любой $f \in S(\delta)$ и любого $\delta' \in (0, 1)$ существует $a \in \Delta$ такое, что $f(z, a) \in S(\delta')$.*

Таким образом, для получения информации о функциях из $S(\delta_0)$, $\delta_0 \in (0, 1)$ достаточно иметь соответствующую информацию о $S(\delta)$ с δ, сколь угодно близким к 1, и знать, как трансформируется эта информация при преобразованиях (1).

Полезно знать асимптотическое поведение функции $f(z) \in U_\alpha$, когда $z \in \Delta$, $z \to e^{i\theta}$ (θ — (н. и. р.) $f(z)$) в некотором угле из Δ с вершиной в $e^{i\theta}$. Такие вопросы В. К. Хейман рассматривал для функций $f(z)$, p-листных в среднем по окружности в Δ. Для таких функций он доказал [7, стр. 131—133]:

пусть θ — (н. м. р.) *для* $f(z)$, $z_n=1-1/n$, $z_n=r_ne^{i\theta}$ $(n \geq 1)$, $\varepsilon>0$, $\Delta_n(\varepsilon) =\{z: \varepsilon/n<|1-ze^{-i\theta}|<1/\varepsilon n, |\arg(1-ze^{-i\theta})|<\pi/2-\varepsilon\}$; $\delta_n=n^{-2p}f(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \delta = \lim\limits_{r\to 1-0}[|f(re^{i\theta})|(1-r)^{2p}]$ *(предел существует и конечен),* $f_n(z)=\delta_n(1-ze^{-i\theta})^{-2p}$; *тогда при* $n\to\infty$ $f(z)\backsim f_n(z)$, $f'(z)\backsim f'_n(z)$ *равномерно по* z *в* $\Delta_n(\varepsilon)$.

Более простое доказательство этого результата с использованием метода площадей для функций класса S было дано Г. И. Мелентьевой [5, стр. 136—139]. Теорема 2 позволяет просто доказать соответствующий результат в U_α.

Лемма 2. *Пусть семейство функций $g_\delta(z) \in U_\alpha(\delta)$ и $g_\delta(z) \underset{\delta\to 1}{\longrightarrow} g_1(z)$ равномерно внутри Δ, тогда при некотором вещественном θ $g_1(z)=f_\theta(z)$ — функция из теоремы 1.*

Доказательство. Пусть лемма неверна. Так как (см. [1]) U_α компактно в топологии равномерной сходимости внутри Δ, то $g_1(z) \in U_\alpha(\delta_0)$ и, по теореме 1, $\delta_0<1$. Зафиксируем $\varepsilon \in (0, (1-\delta_0/4)$. По теореме 1, существует $r(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $r \in (r(\varepsilon), 1)$ $M(r, g'_1)\dfrac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\delta_0<+\varepsilon$. Фиксируем $r_0 \in (r(\varepsilon), 1)$. Из равномерной сходимости следует существование такого $m \in (0, 1)$, что для всех $\delta \in (m, 1)$

$$|(M(r_0, g'_\delta)-M(r_0, g'_1))\frac{(1-r_0)^{\alpha+1}}{(1+r_0)^{\alpha-1}}|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$M(r_0, g'_\delta)\frac{(1-r_0)^{\alpha+1}}{(1+r_0)^{\alpha-1}}<\delta_0+2\varepsilon<\frac{1+\delta_0}{2}.$$

Выберем здесь $\delta>(1+\delta_0)/2$. По первому пункту теоремы 1,

$$\delta=\lim_{r\to 1-0}[M(r, g'_\delta)\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}]\leq M(r_0, g'_\delta)\frac{(1-r_0)^{\alpha+1}}{(1+r_0)^{\alpha-1}}<\frac{1+\delta_0}{2},$$

что противоречит выбору δ. Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть $f \in U_\alpha(\delta_0)$, $\delta_0>0$; θ — одно из (н. и. р.) $f(z)$, которому соответствует число Хеймана $\delta \in (0, \delta_0]$. Обозначим $\Phi(\xi)$*

$=\arg f'(\rho(\xi)e^{i\theta})$, *где* $\rho(\xi)=\sqrt{\frac{(1-r_0^2)^2}{4r_0^4 c^2(\xi)}-\frac{1}{r_0^2}}-\frac{1}{2c(\xi)}(1-\frac{1}{r_0^2})$, $r_0=\sin\eta$, $c(\xi)$ $=\mathrm{Re}\{\xi e^{-i\theta}\}-\mathrm{tg}\,\eta\,|Jm\{\xi e^{-i\theta}\}|$. *Тогда для каждого* $n=0, 1, 2, \ldots$ *и любого* $\eta\in(0, \pi/2)$ $\frac{f^{(n)}(\xi)}{f_\theta^{(n)}(\xi)}e^{-i\Phi(\xi)}\to\delta$ *равномерно в* $\Delta(R,\eta)=\{\xi\in\Delta: |\arg(1-\xi e^{-i\theta})|<\eta,$ $R<|\xi|<1\}$ *при* $R\to 1-0$, *т. е. для любых фиксированных* $n=0, 1, 2, \ldots$ *и* $\eta\in(0, \pi/2)$ *и любого* $\varepsilon>0$ *существует* $R_0<0$ *такое, что*

$$\left|\frac{f^{(n)}(\xi)}{f_\theta^{(n)}(\xi)}e^{-i\Phi(\xi)}-\delta\right|<\varepsilon \text{ в } \Delta(R_0, \eta).$$

Доказательство. Если при доказательстве второго утверждения теоремы 2 вместо φ_0 взять θ — (н. и. р.) $f(z)$, то (9) примет вид $\frac{\delta(1+\rho)^{\alpha-1}}{|f'(\rho e^{i\theta})|(1-\rho)^{\alpha+1}}$ $\le\delta_a$, $a=\rho e^{i\theta}$. Следовательно, $\delta_a\xrightarrow[\rho\to 1-0]{}1$ и, по лемме 2, любая равномерно сходящаяся внутри Δ последовательность $f_n(z)=f(z, \rho_n e^{i\theta})$ ($\rho_n\xrightarrow[n\to\infty]{}1-0$) сходится к $f_{\theta_1}(z)$ при некотором $\theta_1\in[0, 2\pi)$. Покажем, что $\theta_1=\theta$. Обозначим $R_n=\frac{r+\rho_n}{1+\rho_n r}$.

$$|f'_{\theta_1}(re^{i\theta})|=\lim_{n\to\infty}|f'_n(re^{i\theta})|=\lim_{n\to\infty}\frac{|f'(R_n e^{i\theta})|}{|f'(\rho_n e^{i\theta})|(1+\rho_n r)^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{|f'(R_n e^{i\theta})|\frac{(1-R_n)^{\alpha+1}}{(1+R_n)^{\alpha-1}}}{|f'(\rho_n e^{i\theta})|\frac{(1-\rho_n)^{\alpha+1}}{(1+\rho_n)^{\alpha-1}}(1+\rho_n r)^2}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1-\rho_n}{1-R_n}\right)^{\alpha+1}$$

$$=\frac{\delta}{\delta(1+r)^2}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha+1}\xrightarrow[r\to 1-0]{}\infty,$$

что возможно только при $\theta_1=\theta$. Тогда, в силу (2), к $f'(z, \rho e^{i\theta})$ при $\rho\to 1-0$, применима теорема Витали, и $f'(z, \rho e^{i\theta})\xrightarrow[\rho\to 1-0]{}f'_\theta(z)$ равномерно внутри Δ. В частности, для любого фиксированного $r_0\in(0, 1)$ равномерно в круге $\{|z|\le r_0\}$

$$\frac{f'\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)}{f'(\rho e^{i\theta})(1+\rho e^{-i\theta}z)^2}\xrightarrow[\rho\to 1-0]{}\frac{(1+ze^{-i\theta})^{\alpha-1}}{(1-ze^{-i\theta})^{\alpha+1}};$$

следовательно, функции

$$\frac{f'\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)}{f'(\rho e^{i\theta})} \text{ и } (1+\rho e^{-i\theta}z)^2\frac{(1+ze^{-i\theta})^{\alpha-1}}{(1-ze^{-i\theta})^{\alpha+1}}=\frac{f'_\theta\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)}{f'_\theta(\rho e^{i\theta})}$$

равномерно в $\{|z|\le r_0\}$ сходятся к одной и той же регулярной функции при $\rho\to 1-0$, т. е. равномерно по z в $\{|z|\le r_0\}$:

$$\frac{f'\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)}{f'(\rho e^{i\theta})}-\frac{f'_\theta\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)}{f'_\theta(\rho e^{i\theta})}\xrightarrow[\rho\to 1-0]{}0. \tag{10}$$

Функция $\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}$ однолистно отображает круг $\{|z|\leqq r_0\}$ на круг с центром $c(r_0)=e^{i\theta}\rho\frac{1-z_0^2}{1-\rho^2 r_0^2}$ и радиусом $r_*(r_0)=\frac{r_0(1-\rho^2)}{1-\rho^2 r_0^2}$. Поэтому $\frac{f'(\xi)}{f_\theta'(\xi)}\frac{f_\theta'(\rho e^{i\theta})}{f'(\rho e^{i\theta})}\xrightarrow[\rho\to 1-0]{}1$ равномерно в круге $K_\rho(r_0)=\{|\xi-c(r_0)|\leqq r_*(r_0)\}$. Или, обозначив $\Phi(\rho)=\arg f'(\rho e^{i\theta})$, получим $\frac{f'(\xi)}{f_\theta'(\xi)}e^{-i\Phi(\rho)}\xrightarrow[\rho\to 1-0]{}\delta$ равномерно в $K_\rho(r_0)$, т. е. $\forall\varepsilon>0$ $\exists R_1\in(0,1)$ такое, что для всех $\rho\in(R_1,1)$

$$|\frac{f'(\xi)}{f_\theta'(\xi)}e^{-i\Phi(\rho)}-\delta|<\varepsilon, \tag{11}$$

$\xi\in K_\rho(r_0)$. Если 2β — угол с вершиной в точке $e^{i\theta}$ и сторонами, касающимися $K_\rho(r_0)$, то

$$\sin\beta=\frac{r_*(r_0)}{1-|c(r_0)|}=\frac{r_0(1+\rho)}{1+\rho r_0^2}=\psi(\rho),$$

$\psi(\rho)$ возрастает с ростом ρ. Поэтому при $\rho\in(R_1,1)$ совокупность кругов $K_\rho(r_0)$ заполняет некоторую подобласть Δ, содержащую $\Delta(R,\eta)$ при некоторых R и η. В качестве η можно взять $\arcsin r_0$, т. к. $\psi(\rho)$ возрастает. То есть η можно брать сколь угодно близким к $\pi/2$, если r_0 достаточно близко к 1. Таким образом, (11) выполнено в $\Delta(R,\eta)$, где η можно считать любым заданным числом из $(0,\pi/2)$, R зависит от ε. При этом каждому $\xi\in\Delta(R,\eta)$ соответствует некоторое $\Phi=\Phi(\rho)$ (не единственное), где ρ определяется кругом $K_\rho(r_0)$, содержащим ξ. В качестве $K_\rho(r_0)$ здесь возьмем такой круг, чтобы ξ лежало на его радиусе, ортогональном к одной из сторон сектора $\Delta(R,\eta)$. Вычисления показывают, что в этом случае $|c(r_0)|=\mathrm{Re}\{\xi e^{-i\theta}\}-\mathrm{tg}\,\eta\,|\,\mathrm{Jm}\{\xi e^{-i\theta}\}\,|$. Так как $|c(r_0)|=\rho\frac{1-r_0^2}{1-\rho^2 r_0^2}$, то

$$\rho=\rho(\xi)=\sqrt{\frac{(1-r_0^2)^2}{4r_0^4|c(r_0)|^2}-\frac{1}{r_0^2}}-\frac{1}{2|c(r_0)|}\left(1-\frac{1}{r_0^2}\right),$$

где $r_0=\sin\eta$. Тем самым доказано утверждение теоремы в случае $n=1$.

Переходим к случаю $n=0$. Из (10) получаем, что в круге $\{|z|\leqq r_0\}$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N>0$ такое, что для всех $\rho\in(N,1)$

$$\left|\frac{\left(f\left(\frac{z+a}{1+\bar a z}\right)\right)_z'}{f'(a)(1-\rho^2)}-\frac{\left(f_\theta\left(\frac{z+a}{1+\bar a z}\right)\right)_z'}{f_\theta'(a)(1-\rho^2)}\right|<\varepsilon\quad (a=\rho e^{i\theta}).$$

Интегрирование по отрезку $[0,z]$ в комплексной плоскости дает

$$\left|\frac{f\left(\frac{z+a}{1+\bar a z}\right)-f(a)}{f'(a)\,(1-\rho^2)}-\frac{f_\theta\left(\frac{z+a}{1+\bar a z}\right)-f_\theta(a)}{f'(a)\,(1-\rho^2)}\right|<\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\frac{f\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)-f(\rho e^{i\theta})}{f'(\rho e^{i\theta})\ (1-\rho^2)}-\frac{f_\theta\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)-f_\theta(\rho e^{i\theta})}{f_\theta'(\rho^{i\theta})\ (1-\rho^2)}\xrightarrow[\rho\to1-0]{}0 \tag{12}$$

равномерно в $\{|z|\leq r_0\}$, причем $\dfrac{f_\theta\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)-f_\theta(\rho e^{i\theta})}{f_\theta'(\rho e^{i\theta})\ (1-\rho^2)}\equiv f_\theta(z)$.

Покажем, что существует $\lim\limits_{\rho\to1-0}[2\alpha\,|f(\rho e^{i\theta})|\,(\frac{1-\rho}{1+\rho})^\alpha]=\delta$. В теореме 1 доказано $\varlimsup\limits_{\rho\to1-0}[2\alpha\,|f(\rho e^{i\theta})|\,(\frac{1-\rho}{1+\rho})^\alpha]\leq\delta$, если θ — (н. м. р.) $f(z)$. Очевидно, доказательство остается верным и в случае, когда θ — любое (н. и. р.) $f(z)$, а δ — соответствующее ему число Хеймана. Покажем, что $\lim\limits_{\rho\to1-0}[2\alpha\,|f(\rho e^{i\theta})|$ $(\frac{1-\rho}{1+\rho})^\alpha]=\delta$.

Пусть это не так, и существует последовательность $\rho_n\to1-0$ такая, что $2\alpha\,|f(\rho_n e^{i\theta})|\,(\frac{1-\rho_n}{1+\rho_n})^\alpha\xrightarrow[n\to\infty]{}\delta_1<\delta$. Фиксируем $r_1\in(0,\ 1)$. Обозначим $R_n=\dfrac{-r_1+\rho_n}{1-r_1\rho_n}$, $z_1=-r_1e^{i\theta}$, $a_n=\rho_ne^{i\theta}$. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\rho_n}{1-R_n}=\dfrac{1-r_1}{1+r_1}$. Будем считать, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}[2\alpha\,|f(R_ne^{i\theta})|\,(\frac{1-R_n}{1+R_n})^\alpha]=\delta_2$ (если предел не существует, перейдем к рассмотрению нужной подпоследовательности ρ_n). По той же причине будем считать, что имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(\frac{z_1+a_n}{1+\bar a_n z_1}\right)-f(a_n)}{f'(a_n)\ (1-\rho_n^2)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(R_ne^{i\theta})\left(\frac{1-R_n}{1+R_n}\right)^\alpha\left(\frac{1-\rho_n}{1-R_n}\right)^\alpha-f(a_n)\left(\frac{1-\rho_n}{1+\rho_n}\right)^\alpha}{f'(a_n)\ \frac{(1-\rho_n)^{\alpha+1}}{(1+\rho_n)^{\alpha-1}}}\right]=\frac{\delta_2e^{i\psi_2}\left(\frac{1-r_1}{1+r_1}\right)^\alpha-\delta_1e^{i\psi_1}}{2\alpha\,\delta e^{i\psi_0}};$$

здесь ψ_0, ψ_1 и ψ_2 — некоторые вещественные числа. Если здесь в выражении под знаком предела заменить $f(z)$ на $f_\theta(z)$, предел будет равен $f_\theta(z_1)$ $=\dfrac{e^{i\theta}}{2\alpha}[(\frac{1-r_1}{1+r_1})^\alpha-1]$. Из (12) получаем

$$\left|\frac{\delta_1}{\delta}-\frac{\delta_2}{\delta}e^{i\psi}\left(\frac{1-r_1}{1+r_1}\right)^\alpha\right|=1-\left(\frac{1-r_1}{1+r_1}\right)^\alpha,\quad \psi=\psi_2-\psi_1. \tag{13}$$

Здесь δ_1 не зависит от r_1, а r_1 — произвольное число из $(0, 1)$. Переходя в (13) к пределу при $r_1\to1-0$, получим $\delta_1=\delta$. Причем, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)(1-\rho_n^2)}$ $=\dfrac{1}{2\alpha}e^{i(\psi_1-\psi_0)}=\dfrac{1}{2\alpha}e^{i\theta}$, по (12). Поэтому (12) равносильно:

$$\lim_{\rho\to 1-0}\left[\frac{f\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)}{f'(\rho e^{i\theta})(1-\rho^2)}-\frac{f_\theta\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)}{f_\theta'(\rho e^{i\theta})(1-\rho^2)}\right]=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{f(\xi)}{f_\theta(\xi)}\,\frac{f_\theta'(\rho e^{i\theta})}{f'(\rho e^{i\theta})}\xrightarrow[\rho\to 1-0]{} 1$$

равномерно в $K_\rho(r_0)$ Отсюда, как и в случае $f'(z)$, получим $\frac{f(\xi)}{f_\theta(\xi)}\,e^{-i\Phi(\xi)}\to\delta$ равномерно в $\Delta(R,\eta)$ при $R\to 1-0$; $\Phi(\xi)$ здесь то же, что и в случае $f'(z)$.

Осталось доказать теорему для $n\geqq 2$. Будем последовательно дифференцировать (10) по z с последующим умножением результата на $(1+\bar{a}z)^2$, $a=\rho e^{i\theta}$. После осуществления этой операции $n-1$ раз получим

$$\frac{f^{(n)}\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)(1-\rho^2)^{n-1}}{f'(\rho e^{i\theta})}-\frac{f_\theta^{(n)}\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)(1-\rho^2)^{n-1}}{f_\theta'(\rho e^{i\theta})}\xrightarrow[\rho\to 1-0]{} 0$$

равномерно в круге $\{|z|\leqq r_0\}$, причем, $\dfrac{f_\theta^{(n)}\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)(1-\rho^2)^{n-1}}{f_\theta'(\rho e^{i\theta})}$ ограничена и

отделена от нуля при $\rho\to 1-0$ в круге $\{|z|\leqq r_0\}$, так как $\dfrac{f_\theta'\left(\frac{z+\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{-i\theta}z}\right)}{f_\theta'(\rho e^{i\theta})}$ $=(1+\rho e^{-i\theta}z)^2\,\dfrac{(1+ze^{-i\theta})^{\alpha-1}}{(1-ze^{-i\theta})^{\alpha+1}}\cdot$ Поэтому $\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{f_\theta^{(n)}(\xi)}\,\dfrac{f_\theta'(\rho e^{i\theta})}{f'(\rho e^{i\theta})}\xrightarrow[\rho\to 1-0]{} 1$ равномерно в $K_\rho(r_0)$. Далее, как и в случае $n=1$, приходим к выводу, что $\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{f_\theta^{(n)}(\xi)}\,e^{-i\Phi(\xi)}\to\delta$ равномерно в $\Delta(R,\eta)$ при $R\to 1-0$; $\Phi(\xi)$ — из условия теоремы. Теорема 3 доказана.

Замечание. В ходе доказательства теоремы 3, в частности, показано: если φ_0 — (н. м. р.) $f(z)$, то существует предел $\lim\limits_{r\to 1-0}[2\alpha(\frac{1-r}{1+r})^\alpha|f(re^{i\varphi_0})|]=\delta_0$.

Отсюда и из теоремы 1 следует существование $\lim\limits_{r\to 1-0}[2\alpha(\frac{1-r}{1+r})^\alpha M(r,f)]=\delta_0$.

Остановимся на характеристике множества различных (н. и. р.) для $f(z)\in U_\alpha$. Теорема А утверждает, что в классе $S\subset U_2$ каждой функции с положительным числом Хеймана соответствует единственное (н. и. р.) — (н. м. р.) этой функции. Для U_α этот факт легко доказывается в случае $\alpha=1$. Действительно, так как U_1 — класс выпуклых функций, то единственность (н. и. р.) для $f(z)\in U_1$ следует из известной связи между звездообразными функциями $g(z)$ и выпуклыми $f(z)$ $(zf'(z)=g(z))$ и единственности (н. и. р.) для $g(z)$.

В общем случае можно утверждать, что множество (н. и. р.) для $f(z)\in U_\alpha$ не более чем счетно. Действительно, из теоремы 3 следует: если θ — (н. и. р.) $f(z)$, то в Δ существует пара кривых Γ_1 и Γ_2, ведущих в $e^{i\theta}$ таких, что $f(z^1)2\alpha(\frac{1-|z'|}{1+|z'|})^\alpha\to a'$ при $z'\to e^{i\theta}$ вдоль Γ_1 и $f(z'')2\alpha(\frac{1-|z''|}{1+|z''|})^\alpha$ $\to a''\neq a'$ при $z''\to e^{i\theta}$ вдоль Γ_2, т. е. $e^{i\theta}$ — точка неопределенности функции

$f(z)2\alpha(\frac{1-|z|}{1+|z|})^{\alpha}$. А, по теореме Бейджмила [10, стр. 74], множество таких точек не более чем счетно.

В качестве еще одного приложения теоремы 3 получим аналог теоремы 1 для производных $f^{(n)}(z)$ функций из $U_\alpha(\delta_0)$, $\delta_0>0$, в случае $n\geq 2$.

Теорема 4. *Пусть $f\in U_\alpha(\delta_0)$, $\delta_0>0$; θ — (н. и. р.) функции $f(z)$, ему соответствует число Хеймана $\delta>0$. Тогда для каждого $n=2, 3, 4, \ldots$ существует*

$$\lim_{r\to 1-0}[|f^{(n)}(re^{i\theta})|(1-r)^{\alpha+n}]=\delta 2^{\alpha-1}(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1).$$

Доказательство. Все коэффициенты Тейлора функции $\ln(\frac{1+z}{1-z})$ положительны. Следовательно, положительны все коэффициенты Тейлора функции $\exp[\alpha\ln(\frac{1+z}{1-z})]=(\frac{1+z}{1-z})^{\alpha}$. Поэтому производные любого порядка от функции $(\frac{1+r}{1-r})^{\alpha}$ возрастают на $(0, 1)$. Обозначим

$$g'(r)=\left(\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{\alpha}\right)'=\frac{(1+r)^{\alpha-1}}{(1-r)^{\alpha+1}};\quad \lim_{r\to 1-0}[g'(r)(1-r)^{\alpha+1}]=2^{\alpha-1}.$$

Применяя последовательно теорему Харди и Литтльвуда, получим

$$\lim_{r\to 1-0}[g^{(n)}(r)(1-r)^{\alpha+n}]=2^{\alpha-1}(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1).$$

По теореме 3, $|\frac{f^{(n)}(re^{i\theta})}{f_\theta^{(n)}(re^{i\theta})}\xrightarrow[r\to 1-0]{}\delta\Leftrightarrow\frac{|f^{(n)}(re^{i\theta})}{g^{(n)}(r)}\xrightarrow[r\to 1-0]{}\delta$. Отсюда получаем утверждение теоремы 4.

В [11] было доказано, что для любой функции $f_0(z)\in S(\delta_0)$ и любого $\delta\in[0, \delta_0]$ существует последовательность $f_n(z)\in S(\delta)$ такая, что $f_n(z)\xrightarrow[n\to\infty]{}f_0(z)$ равномерно внутри Δ. Аналогичный результат верен и в U_α.

Теорема 5. *Для любой функции $f(z)\in U_\alpha(\delta_0)$ и любого $\delta\in[0, \delta_0]$ существует семейство функций $\psi(z|\lambda)\in U_\alpha(\delta)$, $\lambda\in(0, 1)$ — такое, что $\psi(z|\lambda)\xrightarrow[\lambda\to 0]{}f(z)$ равномерно внутри Δ.*

Доказательство. В случае $\delta=\delta_0$ $\psi(z|\lambda)=f(z)$ для всех λ. В случае $\delta=0$ $\psi(z|\lambda)=\frac{1}{1-\lambda}f((1-\lambda)z)$.

Пусть $\delta\in(0, \delta_0)$. Заметим, что при всех $\lambda\in(0, 1)$ $\psi(z|\lambda)\in U_\alpha$, если для $\lambda\in(0, 1)$ $f(z|\lambda)\in U_\alpha$ и $\psi'_z(z|\lambda)=(f'(z))^{1-\lambda}(f'_z(z|\lambda))^{\lambda}$.

Для каждого $\lambda\in(0, 1)$ подберем функцию $f(z, \lambda)\in U_\alpha$ так, чтобы

а) число Хеймана для $f(z|\lambda)$ было равно $\delta(\lambda)=\delta_0(\frac{\delta}{\delta_0})^{1/\lambda}$;

б) (н. м. р.) функции $f(z|\lambda)$ совпадало с (н. м. р.) $f(z)$ (этого всегда можно достичь, применив преобразование поворота). Такое семейство функций $f(z|\lambda)$ существует, т. к., например, функция $f_0(z)$ из теоремы 1 принадлежит U_α, имеет единственное (н. и. р.); и, по теореме 2, существуют $a(\lambda)\in\Delta$ такие, что числа Хеймана для $f_0(z, a(\lambda))$ равны $\delta(\lambda)$.

При таком выборе функций $f(z|\lambda)$ числа Хеймана для $\psi(z|\lambda)$ будут равны $(\delta_0)^{1-\lambda}(\delta(\lambda))^{\lambda}=\delta$, т. е. $\psi(z|\lambda)\in U_\alpha(\delta)$ для всех $\lambda\in(0, 1)$. Из (2) и определения $\psi(z\,|\,\lambda)$ следует, что $\psi(z\,|\,\lambda) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} f(z)$ равномерно на любом компакте из Δ. Теорема доказана.

Следствие 4. *Если* $f(z)=\sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n z^n \in U_\alpha$, $c_n^*(\delta)=\sup\limits_{f\in U_\alpha(\delta)} |c_n|$, *то* $c_n^*(\delta)$ $(0\leqq\delta\leqq 1)$ — *невозрастающая функция.*

Замечание. Справедлива и более общая формулировка теоремы 5. Именно: утверждение $\psi(z\,|\,\lambda)\in U_\alpha(\delta)$ с фиксированным δ можно заменить на утверждение $\psi(z\,|\,\lambda)\in U_\alpha(\delta^*(\lambda))$, где $\delta^*(\lambda)$, $(0\leqq\delta^*(\lambda)\leqq\delta^0)$ — любая функция, заданная на $(0,\ 1)$. Чтобы доказать это, надо при доказательстве теоремы 5 взять $\delta(\lambda)=\delta_0\left(\frac{\delta^*(\lambda)}{\delta_0}\right)^{1/\lambda}$.

Отметим, что при $\delta_1\in(\delta_0,\ 1)$ и любой функции $f(z)\in U_\alpha(\delta_0)$ не существует последовательности функций $f_n(z)\in U_\alpha(\delta_1)$ такой, что $f_n(z)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(z)$ равномерно внутри Δ.

Действительно, пусть это не так. По теореме 1, существует $r_0\in(0,\ 1)$ такое, что

$$M(r_0,\ f')\,\frac{(1-r_0)^{\alpha+1}}{(1+r_0)^{\alpha-1}}<\delta_0+\frac{\delta_1-\delta_0}{3}.$$

Подберем $\varepsilon>0$ и натуральное число n так, что

$$\varepsilon\,\frac{(1-r_0)^{\alpha+1}}{(1+r_0)^{\alpha-1}}<\frac{\delta_1-\delta_0}{3},\quad |M(r_0,\ f_n')-M(r_0,\ f')|<\varepsilon.$$

Тогда

$$M(r_0,\ f_n')\,\frac{(1-r_0)^{\alpha+1}}{(1+r_0)^{\alpha-1}}<M(r_0,\ f')\,\frac{(1-r_0)^{\alpha+1}}{(1+r_0)^{\alpha-1}}+\frac{\delta_1-\delta_0}{3}<\delta_0+\frac{2}{3}(\delta_1-\delta_0).$$

Отсюда и из теоремы 1 следует

$$\lim_{r\to 1-0}\left[M[(r,\ f_n')\,\frac{(1-r)^{\alpha+1}}{(1+r)^{\alpha-1}}\right]<\delta_0+\frac{2}{3}(\delta_1-\delta_0)<\delta_1;$$

противоречие.

Для функций $f(z)\in S$ Н. А. Широковым [12] доказана следующая

Теорема В. *Пусть функция* $\varepsilon(r)>0$ *на* $[0,\ 1)$, $\varepsilon(r)\xrightarrow[r\to 1-0]{} 0$. *Для любого* $\delta\in[0,\ 1)$ *существует функция* $f(z)\in S(\delta)$ *такая, что*

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{M(r,\ f)(1-r)^2-\delta}{\varepsilon(r)}=\infty. \tag{14}$$

Таким образом, теорема В утверждает, что при $r\to 1-0$ величина $M(r,\ f)(1-r)^2$ может стремиться к δ сколь угодно медленно, и нельзя оценить в $S(\delta)$ скорость убывания $[M(r,\ f)(1-r)^2-\delta]$. Из теоремы В легко получается соответствующий результат для U_α, $\alpha\geqq 2$.

Теорема 6. *Пусть* $\alpha\geqq 2$. *Для любой функции* $\varepsilon(r)>0$, $r\in[0,\ 1)$, $\varepsilon(r)\xrightarrow[r\to 1-0]{}$ *и любого* $\delta\in[0,\ 1)$ *существует* $f(z)\in U_\alpha(\delta)$ *такая, что*

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{2\alpha M(r,\ f)\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\alpha}-\delta}{\varepsilon(r)}=\infty.$$

Доказательство. При доказательстве теоремы В искомая функция строилась в виде $\psi_2(z)=\frac{f_2(w(z))}{w'(0)}\in S$, где

$$w(z)=\frac{\frac{2\rho-1}{\rho}z}{1-\frac{1-\rho}{\rho}z},\quad \rho\in(\frac{1}{2},\ 1],\ f_2(z)=\frac{\varphi(1)}{4}\left[\left(\frac{\varphi(1)+\varphi(z)}{\varphi(1)-\varphi(z)}\right)^2-1\right],$$

$$\varphi(z)=\int_0^z \exp\left[-\int_{-\pi}^{\pi}\log(1-se^{it})p(t)dt\right]ds\in K, \tag{15}$$

где K — класс выпуклых функций, $p(t)$ — четная неотрицательная суммируемая на $[-\pi,\ \pi]$ убывающая на $[0,\ \pi]$ функция, $\int_{-\pi}^{\pi}p(t)dt=2$. При этих условиях $|\varphi(z)|\leq\varphi(|z|)$, а при некоторых дополнительных предположениях о $p(t)$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{r\to1-0}\varphi(r)=\varphi(1)=a$, $\lim\limits_{r\to1-0}\frac{\varphi(1)-\varphi(r)}{1-r}=b$. В [12] доказано, что для любой бесконечно малой $\varepsilon(r)\xrightarrow[r\to1-0]{}0$ можно подобрать функцию $p(t)$, удовлетворяющую упомянутым выше условиям так, чтобы b было сколь угодно близко к 1, $1<a<b$, и при каждом $\rho\in(1/2,\ 1]$ для $\psi_2(z)$ выполнялось (14) с числом Хеймана для $\psi_2(z)$, равным

$$\delta_2=\lim_{r\to1-0}[M(r,\ \psi_2)(1-r)^2]=\frac{a^3}{w'(0)}\lim_{r\to1-0}\left(\frac{1-r}{a-\varphi(w(r))}\right)^2=\frac{2\rho-1}{\rho}\ \frac{a^3}{b^2}.$$

Пусть $\varepsilon(r)$ из условия теоремы 6. Не умаляя общности, можно считать что $\frac{(1-r)^2}{\varepsilon(r)}\xrightarrow[r\to1-0]{}0$; следовательно, $\frac{(1-r)^\alpha}{\varepsilon(r)}\to0$ при $r\to1-0$. При доказательстве теоремы 6 нужную функцию также будем искать в виде $\psi_\alpha(z)=\frac{f_\alpha(w(z))}{w'(0)}$, где $f_\alpha(z)=\frac{\varphi(1)}{2\alpha}\left[\left(\frac{\varphi(1)+\varphi(z)}{\varphi(1)-\varphi(z)}\right)^\alpha-1\right]$, $\varphi(z)$ и $w(z)$ — прежние. Функция $\frac{\varphi(w(z))}{\varphi(1)}$ однолистно отображает Δ на подобласть Δ. Поммеренке [1] показал, что для любой функции $f\in U_\alpha$ и любой регулярной и однолистной в Δ функции $\omega(z)$, $|\omega(z)|<1$,

$$\frac{f(\omega(z))-f(\omega(0))}{f'(\omega(0))\omega'(0)}\in U_\beta,\quad \beta=\max(\alpha,\ 2).$$

Следовательно, $\psi_\alpha(z)\in U_\alpha$, так как $\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^\alpha-1\right]\in U_\alpha$.

Пусть $\delta\in(0,\ 1)$. В (15) подберем $p(t)$ так, чтобы 1) $\frac{a^{\alpha+1}}{b^\alpha}>\delta$ (это возможно, так как число b можно взять сколь угодно близким к 1), 2) при каждом $\rho\in(1/2,1]$ было выполнено (14) соответствующей функции $\psi_2(z)$ с числом Хеймана $\delta_2=\frac{2\rho-1}{\rho}\ \frac{a^3}{b^2}$. Подберем $\rho_0\in(1/2,\ 1)$ так, чтобы $\frac{a^{\alpha+1}}{b^\alpha}\left(\frac{2\rho_0-1}{\rho_0}\right)^{\alpha-1}=\delta$. Тогда

$$\lim_{r\to1-0}\left[2\alpha M(r,\ \psi_\alpha)\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha\right]=\frac{a\rho_0}{2\rho_0-1}\lim_{r\to1-0}\left[\frac{a+\varphi(w(r))}{a-\varphi(w(r))}\ \frac{1-r}{1+r}\right]^\alpha \tag{16}$$

$$=\frac{a^{\alpha+1}}{b^\alpha}\left(\frac{2\rho_0-1}{\rho_0}\right)^{\alpha-1}=\delta.$$

Таким образом, при выбранных $p(t)$ и ρ_0 функция $\psi_\alpha(z) \in U_\alpha(\delta)$, а соответствующая функция $\psi_2(z)$ удовлетворяет (14), т. е.

$$\frac{\frac{a\rho_0}{4(2\rho_0-1)}\left(\frac{a+\varphi(w(r))}{a-\varphi(w(r))}\right)^2(1-r)^2-\delta^2}{\varepsilon(r)} \xrightarrow[r\to 1-0]{} \infty.$$

Для доказательства теоремы 6 в случае $\delta \in (0, 1)$ остается заметить, что

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{\frac{a\rho_0}{2\rho_0-1}\left(\frac{a+\varphi(R)}{a-\varphi(R)}\right)^\alpha\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha-\delta}{\frac{a\rho_0}{2\rho_0-1}\left(\frac{a+\varphi(R)}{a-\varphi(R)}\right)^2\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2-\delta_2} = \lim_{X\to C} \frac{X^\alpha-e^\alpha}{X^2-C^2} > 0;$$

здесь $R = w(r)$, $X = \frac{a+\varphi(R)}{a-\varphi(R)} \frac{1-r}{1+r}$, $C = \frac{a}{b} \frac{2\rho_0-1}{\rho_0}$.

Переходим к случаю $\delta = 0$. В [12] доказано, что функцию $p(t)$ в (15) можно подобрать так, что $b(r) = \frac{\varphi(1)-\varphi(r)}{1-r} \xrightarrow[r\to 1-0]{} \infty$, $a < \infty$ (отсюда следует $M(r, f_2)(1-r)^2 \xrightarrow[r\to 1-0]{} 0$) и $\lim\limits_{r\to 1-0} \frac{(M(r, f_2)(1-r)^2)^{\alpha/2}}{\varepsilon(r)} = \infty$ (в качестве бесконечно малой $\varepsilon(r)$ взяли $\varepsilon^{2/\alpha}(r)$). При таком выборе $p(t)$ функция $f_\alpha(z) \in U_\alpha(0)$ (см. (16)) причем

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{a\left(\frac{a+\varphi(r)}{1+r}\right)^\alpha\left(\frac{1-r}{a-\varphi(r)}\right)^\alpha}{\left[\frac{a}{4}(a+\varphi(r))^2\left(\frac{1-r}{a-\varphi(r)}\right)^2\right]^{\alpha/2}} = a^{1-\frac{\alpha}{2}} > 0.$$

Поэтому для выбранной функции $p(t)$

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{2\alpha M(r, f_\alpha)\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha}{\varepsilon(r)} = \infty.$$

Теорема 6 доказана.

Таким образом, изучение классов конформных отображений, основанное на их линейной инвариантности, не только позволяет получить обобщения ранее известных результатов на более широкие классы функций, но и новые результаты, и новые, подчас более простые, доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ch. Pomerenke. Linear- invariante Familien analytischer Funktionen, I. *Math. Ann.*, 155, 1964, 108—154.
2. V. Paatero. Über die konforme Abbildungen von Gebieten deren Ränder von beschränkter Drehung sind. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I*, 1931, № 33, 1—78.
3. В. В. Старков. О некоторых линейно-инвариантных семействах функций, имеющих интегральное представление. *Изв. вузов математика*, 1983, № 5, 82—85.
4. A. Goodman. On close to convex functions of higher order. *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös. Sect. Math.*, 15, 1972, 17-30.
5. Н. А. Лебедев. Принцип площадей в теории однолистных функций. Москва, 1975.

6. И. М. Милан. Однолистные функции и ортонормированные системы. Москва, 1971.
7. В. К. Хейман. Многолистные функции. Москва, 1960.
8. Г. Харди. Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
9. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва, 1966.
10. К. Носиро. Предельные множества. Москва, 1963.
11. В. В. Старков. О подклассах S_α однолистных функций. *Вестник ЛГУ*, 1976, № 7, 82—87.
12. Н. А. Широков. О теореме регулярности Хеймана. *Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР*, **24**, 1972, 182—200.

Адрес:
После августа 1984 г.
СССР 185018
г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33,
Петрозаводский университет,
физико-математический факультет,
Старков Виктор Васильевич

До августа 1984 г.
Болгария 1090
София, Институт математики
Болгарской АН,
Старков В. В.