Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЛЮБОЙ ГРАФ РАМСЕЯ БЕЗ 5-КЛИК ИМЕЕТ БОЛЬШЕ 11 ВЕРШИН

НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ, НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ

Обыкновенный граф G называем графом Рамсея, если при любом разбиении $E(G)=E_1\cup E_2$ множества его ребер $E(G)$ в объединении двух дизъюнктных множеств E_1 и E_2 имеется треугольник графа, все ребра которого принадлежат одному и тому же из множеств E_i. В статье доказано утверждение, сформулированное в ее заглавии.

1. Введение. Упорядоченная пара $G=(V(G), E(G))$, где $V(G)$ — конечное множество, а $E(G)$ — некоторая совокупность его двуэлементных подмножеств, называется обыкновенным графом; элементы множества $V(G)$ — вершины графа, а элементы множества $E(G)$ — ребра графа. Если $v_i\in V(G)$ и $\{v_1, v_2\}\in E(G)$, будем говорить, что вершины v_1 и v_2 смежны, а ребро $\{v_1, v_2\}$ будем обозначать еще через $[v_1, v_2]$. Множество вершин $v_1, v_2, \dots, v_p$ назовем p-кликой (респ. p-антикликой), если любые две из них смежны (респ. несмежны). Совокупность трех ребер 3-клики $\{v_1, v_2, v_3\}$ называем треугольником и отмечаем через $[v_1, v_2, v_3]$.

В этой статье рассматриваем только обыкновенные графы и поэтому будем называть их коротко графами. Обратимое отображение $h: V(G_1)\xrightarrow{\text{на}} V(G_2)$, где G_1 и G_2 — графы, называется изоморфизмом, а графы G_1 и G_2 – изоморфными, если $\{h(v_1), h(v_2)\}\in E(G_2)$ тогда и только тогда, когда $\{v_1, v_2\}\in E(G_1)$. Изоморфных графов отличать не будем. Граф G_1 называется подграфом графа G_2, если $V(G_1)\subset V(G_2)$ и $E(G_1)\subset E(G_2)$.

Хорошо известно и просто доказывается, что если граф G содержит 6-клику, он является графом Рамсея. В [1] был построен пример графа Рамсея без 5-клик с 16 вершинами, а позже, в [2], с 15 вершинами. В [3] доказано, что любой граф Рамсея без 5-клик имеет больше 10 вершин. Здесь усилим этот результат, как это указано в заглавии (см. теорему). Основную роль при этом играет лемма 15 (см. п. 7), в которой построены те из 11-вершинных графов без 3-клик и без 5-антиклик, которые не имеют подграфов такого же типа. В двух последних дополнительных пунктах доказывается, что нет 12-вершинных и 13-вершинных графов Рамсея без 5-клик, но и без 3-антиклик.

Более подробную информацию об исследованиях в этой области можно найти в [4] и [7].

2. О 6-вершинных графах без 3-клик и 4-антиклик. Упорядоченную r-орку $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ различных вершин графа G назовем r-циклом, если $\{v_i, v_{i+1}\}\in E(G)$ при $i=1, 2, \dots, r-1$ и $\{v_r, v_1\}\in E(G)$. Ребра $[v_i, v_{i+1}]$ и $[v_r, v_1]$ называются ребрами цикла.

Лемма 1. *Кроме графов на рис. 1, нет других 6-вершинных 6-реберных графов без 3-клик и без 4-антиклик.*

Доказательство. Пусть G — 6-вершинный 6-реберный граф без 3-клик и без 4-антиклик. Ясно, что граф G не имеет 3-циклов. Если G имеет 5-цикл, тогда очевидно G изоморфен графу на рис. 1.а, а если имеет 6-цикл — графу на рис. 1.в. В случае, когда G имеет 4-цикл, тогда совер-

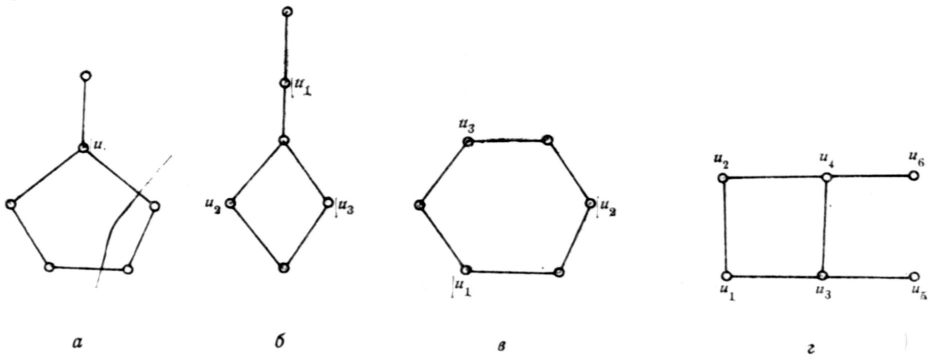


Рис. 1. Все 6-вершинные 6-реберные графы без 3-клик и без 4-антиклик

шенно легко сообразить, что G изоморфен или графу на рис. 1.б, или графу на рис. 1.г. Если допустить, что G не имеет никаких циклов, тогда легко достичь противоречия, что число его ребер не превосходит 5.

Лемма 1 доказана.

3. О 7-вершинных графах без 3-клик и 4-антиклик. Будем говорить, что $\chi(G) \leq S$, если существует разбиение $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_s$, где V_i — антиклики. Таким образом число $\chi(G)$ вполне определенно; называется хроматическим числом графа G. Хорошо известно следующее простое предложение (см. напр. [5], стр. 60):

Лемма 2. *$\chi(G) \geq 3$ тогда и только тогда, когда G имеет r-цикл с нечетным r.*

Число ребер графа G, содержащих вершину v, обозначим через $d_G(v)$ (короче $d(v)$) и назовем степенью вершины v (в графе G).

Лемма 3. *Кроме графов на рис. 2, нет других 7-вершинных графов без 3-клик и без 4-антиклик.*

Доказательство. Пусть G — 7-вершинный граф без 3-клик и без 4-антиклик. Так как в G нет 4-антиклик, то очевидно $\chi(G) \geq 3$ и, согласно лемме 2, в G имеется r-цикл с нечетным r. Очевидно $r > 3$. Если в G нет 5-циклов, тогда, оч видно, G изоморфен графу на рис. 2.б. Поэтому будем считать, что в G есть 5-цикл $(v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$. Обозначим через v_1 и v_2 вершины, не входящие в этом 5-цикл, и предположим, что они несмежны. Если допустить, что v_1 и v_2 несмежны вершинам цикла, то в G будет 4-антиклика. Поэтому можно считать, что v_1 смежна вершине v_3. Тогда v_1 несмежна вершинам v_4 и v_7 и, следовательно, v_2 смежна хотя бы одной из них (иначе в G будет 4-антиклика). Можно считать, что v_2 смежна v_4. Если v_1 и v_2 несмежны v_5 и v_7, то в G будет 4-антиклика. Поэтому можно считать, что v_1 смежна v_5. Тогда $(v_1, v_5, v_6, v_7, v_3)$ — 5-цикл, а вершины, v_2 и v_4, не входящие в него, смежны между собой.

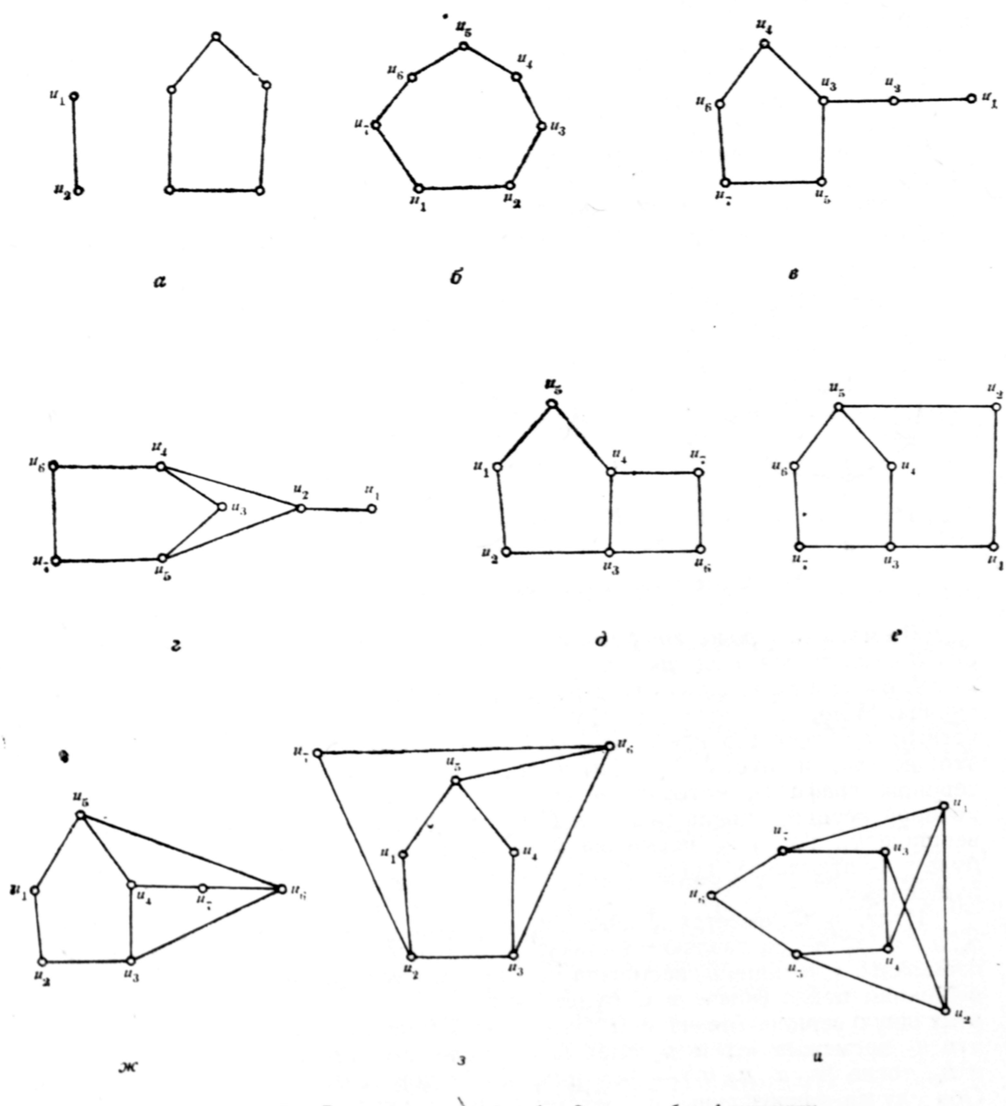


Рис. 2. Все 7-вершинные графы без 3-клик и без 4-антиклик

Итак, поначалу можно считать, что обе вершины v_1 и v_2 вне 5-цикла $(v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$ смежны между собой, т. е. G содержит в качестве подграфа граф на рис. **2. а**.

Если $d_G(v_1) = d_G(v_2) = 1$, тогда граф G изоморфен графу на рис. **2. а**.

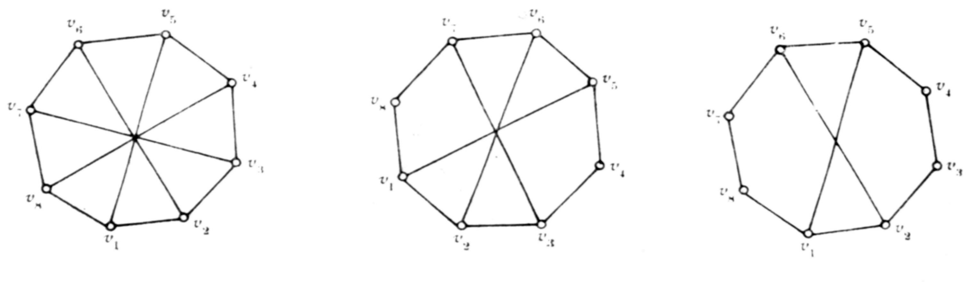
Если $d_G(v_1) + d_G(v_2) = 3$, тогда G изоморфен графу на рис. **2. в**.

Если $d_G(v_1)+d_G(v_2)=4$, тогда G изоморфен некоторому из графов на рис. **2. г**, **2. д** или **2. е**.

Если $d_G(v_1)+d_G(v_2)=5$, тогда ясно, что G изоморфен некоторому из графов на рис. **2. ж** или **2. з**.

Наконец, если $d_G(v_1)+d_G(v_2)=6$, тогда G изоморфен графу на рис. **2. и**. Лемма 3 доказана.

4. О 8-вершинных графах без 3-клик и 4-антиклик и о 9-вершинных графах без 3-клик. Доказательство следующего утверждения можно найти в [7], однако, по-видимому, оно сделано еще в [11]. Здесь приведем новое, совершенно короткое и элементарное доказательство.



а *б* *в*

Рис. 3. Все 8-вершинные графы без 3-клик и без 4-антиклик

Лемма 4. *Кроме графов на рис. 3, нет других 8-вершинных графов без 3-клик и без 4-антиклик.*

Доказательство. Пусть G — 8-вершинный граф без 3-клик и 4-антиклик. Ясно, что $\chi(G)\geqq 3$. Согласно лемме 2, в G имеется r-цикл с нечетным r. Очевидно $r>3$. Докажем, что в G есть 5-цикл. Допустим, что это не так, и пусть $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$ — 7-цикл, а u_8 — единственная вершина графа G, которая не содержится в нем. Очевидно u_8 смежна некоторой вершине цикла (иначе в G будет 4-антиклика) — пусть она смежна вершине u_1. Тогда u_8 несмежна u_2 и u_7 и, значит, смежна u_4 (иначе в G будет 4-антиклика). Тогда $(u_8, u_1, u_2, u_3, u_4)$ — 5-цикл, что противоречит допущенному.

Итак, в G имеется 5-цикл $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$. Остальные три вершины u_6, u_7 и u_8 не составляют 3-клику, и поэтому можно считать, что u_6 и u_7 несмежны. Очевидно u_7 несмежна некоторым двум, несмежным между собою вершинам цикла (иначе в G будет 3-клика). Тогда u_6 смежна некоторой из этих двух вершин (иначе в G будет 4-антиклика). Поэтому можно считать, что u_7 несмежна u_1, и u_6 смежна u_1. Если допустить, что u_7 несмежна u_2 и u_5, тогда $\{u_6, u_7, u_2, u_5\}$ — 4-антиклика. Следовательно, u_7 смежна u_2 или u_5. Оба случая равнозначны, и поэтому будем считать, что u_7 смежна u_2.

Так как $\{u_3, u_5, u_6, u_7\}$ не является 4-антикликой, то u_5 смежна u_7 или u_3 смежна u_6; из-за симметрии будем считать, что u_5 смежна u_7. В G не могут быть вершины степени 4 и, следовательно, $d(u_2)<4$ и $d(u_5)<4$. Тогда u_2 и u_5 несмежны u_6 и u_8, и так как в G нет 4-антиклик, то u_6 и u_8 смежны между собой. Вершины u_7 и u_8 смежны, потому что иначе $\{u_1, u_3, u_7, u_8\}$ или $\{u_1, u_4, u_7, u_8\}$ будет 4-антикликой.

Таким образом доказано, что G содержит в качестве подграфа граф на рис. **3. в.** Легко сообразить в таком случае, что граф G изоморфен некоторому из графов на рис. 3.

Лемма 4 доказана.

В дальнейшем нам будет нужна и следующая хорошо известная (см. напр. [7, стр. 105])

Лемма 5. *Любой 9-вершинный граф без 3-клик содержит 4-антиклику.*

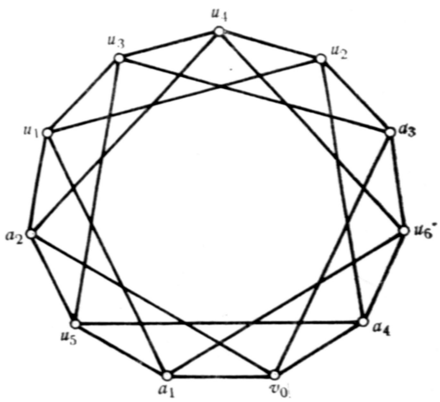


Рис. 4. Единственный 11-вершинный граф без 3-клик и без 5-антиклик с $d(v)=4$ для любой вершины v

5. Существует единственный 11-вершинный граф без 3-клик и без 5-антиклик, все вершины которого имеют степень 4. Для вершины v графа G через $A_G(v)$ (короче $A(v)$), респ. $\overline{A}_G(v)$ (короче $\overline{A}(v)$), обозначим совокупность всех других вершин, смежных, соотв. несмежных, вершине v. Если M — множество вершин графа G, через $\langle M\rangle$ обозначим подграф графа G, для которого $V(\langle M\rangle)=M$ и $E(\langle M\rangle)$ состоит из тех ребер графа G, обе вершины которых находятся в M.

Приведем следующее необходимое, однако совершенно элементарное предложение.

Лемма 6. *Если 11-вершинный граф G не имеет 3-клик и 5-антиклик, тогда $2\leqq d(v)\leqq 4$ для любой его вершины v.*

Доказательство. Множество $A(v)$ — антиклика, так как в G нет 3-клик. Следовательно, $d(v)\leqq 4$. Подграф $\langle\overline{A}(v)\rangle$ не имеет 3-клик и 4-антиклик и, согласно лемме 5, число его вершин не больше 8. Это показывает, что $d(v)\geqq 2$.

Лемма 6 доказана.

В настоящем пункте основным является следующее предложение:

Лемма 7. *Кроме графа на рис. 4, нет других 11-вершинных графов без 3-клик и без 5-антиклик, все вершины которых имеют степень 4.*

Доказательство. Пусть G — 11-вершинный граф без 3-клик и без 5-антиклик с $d(v)=4$ для любой вершины v. Возьмем произвольную вершину v_0 этого графа. Подграф $\langle\overline{A}(v_0)\rangle$ имеет 6 вершин. Обозначим через e число ребер этого подграфа, а через l — число тех ребер графа G, любое из которых имеет ровно одну вершину в $\overline{A}(v_0)$ и, следовательно, ровно одну вершину в $A(v_0)$. Очевидно $l=4.3=12$. Легко сообразить, что

$$24=6.4=\sum_{v\in\overline{A}(v_0)} d_G(v)=2e+l,$$

и, следовательно, $e=6$.

Итак, подграф $\langle\overline{A}(v_0)\rangle$ — 6-вершинный 6-реберный граф без 3-клик и без 4-антиклик. Согласно лемме 1, граф $\langle\overline{A}(v_0)\rangle$ изоморфен некоторому из графов на рис. 1. Рассмотрим отдельно все возможные случаи.

I. $\langle\overline{A}(v_0)\rangle$ — граф на рис. **1. а.**

Вершина u (см. рис. 1. а) смежна некоторой вершине a из $A(v_0)$. Вершина a смежна еще двум вершинам из $\bar{A}(v_0)$, что, очевидно, невозможно.

II. $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ — граф на рис. **1. б**.

Вершина u_1 (см. рис. 1. б) смежна ровно двум вершинам a_1 и a_2 из $A(v_0)$. Вершина $a_i (i=1, 2)$ смежна двум вершинам из $\bar{A}(v_0)$; очевидно это вершины u_2 и u_3. Тогда вершины u_1, u_2 и u_3 несмежны остальным двум вершинам a_3 и a_4 из $A(v_0)$ и, следовательно, составляют вместе с ними 5-антиклику, что невозможно.

III. $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ — граф на рис. **1. в**.

Вершина u_1 (см. рис. 1. в) смежна ровно двум вершинам a_1 и a_2 из $A(v_0)$. Вершина $a_i (i=1, 2)$ смежна, кроме вершины u_1, еще двум вершинам из $\bar{A}(v_0)$ и, очевидно, это вершины u_2 и u_3. Тогда вершины u_1, u_2 и u_3 несмежны остальным двум вершинам a_3 и a_4 из $A(v_0)$ и, следовательно, составляют вместе с ними 5-антиклику, что невозможно.

IV. $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ — граф на рис. **1. г**.

Вершина u_1 (см. рис. 1. г) смежна ровно двум вершинам a_1 и a_2 из $A(v_0)$. Вершина u_2 смежна остальным двум вершинам a_3 и a_4 из $A(v_0)$. Вершина u_3 смежна ровно одной из вершин a_i, и так как она очевидно несмежна вершинам a_1 и a_2, то можно считать, что смежна вершине a_3. Аналогично можно считать, что u_4 смежна a_2. Теперь ясно, что u_5 несмежна a_3 и, следовательно, смежна вершинам a_1, a_2 и a_4, а u_6 смежна вершинам a_1, a_3 и a_4.

Граф G оказывается изоморфным графу на рис. 4.

Лемма 7 доказана.

6. Любой минимальный 11-вершинный граф без 3-клик и без 5-антиклик имеет вершину степени 2. Если $[u, v]$ — ребро графа G, через $G-[u, v]$ обозначим тот подграф графа G, который имеет те же самые вершины, что и граф G, и те же самые ребра, за одним единственным исключением — ребро $[u, v]$.

Граф G назовем минимальным графом (без 3-клик и без 5-антиклик), если он не имеет 3-клик и 5-антиклик, однако любой его подграф $G-[u, v]$, где $[u, v]\in E(G)$, имеет хотя бы одну 5-антиклику.

Следующее предложение доказывается абсолютно элементарно.

Лемма 8. *Граф G минимален тогда и только тогда, когда не содержит 3-клик, и $\bar{A}(u)\cap\bar{A}(v)$ содержит 3-антиклику единственно в случае, когда вершины u и v смежны.*

Лемма 9. *Всякий 11-вершинный минимальный граф имеет вершину степени меньше 4.*

Доказательство леммы 9. Пусть G — 11-вершинный минимальный граф. Согласно лемме 6, для любой вершины v графа имеют место неравенства $2\leq d(v)\leq 4$. Если допустить, что утверждение неверно, тогда $d(v)=4$ для любой вершины v и, согласно лемме 7, граф G изоморфен графу на рис. 4. Это, однако, является противоречием, так как граф на рис. 4 неминимален. Действительно, $\bar{A}(v_0)\cap\bar{A}(a_4)=\{u_1, u_3, u_4\}$, а это множество не является 3-антикликой, хотя и вершины v_0 и a_4 смежны.

Лемма 9 доказана.

Теперь уже можно доказать и основное утверждение этого пункта

Лемма 10. *Любой 11-вершинный минимальный граф имеет хотя бы одну вершину степени 2.*

Доказательство. Пусть G — 11-вершинный минимальный граф. Допустим, что утверждение неверно. Согласно этому допущению и лемме 6, неравенства $3 \leqq d(v) \leqq 4$ выполнены для любой вершины v графа G. Согласно лемме 9, имеется вершина v_0, для которой $d(v_0)=3$. Тогда $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ является 7-вершинным графом без 3-клик и без 4-антиклик и, согласно лемме 3, он изоморфен некоторому из графов на рис. 2. Положим $A(v_0)=\{a_1, a_2, a_3\}$ и последовательно рассмотрим все возможные случаи, которые представляются, чтобы достичь в любом из них до противоречия.

I. $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ — граф на рис. **2. а**.

Любая из вершин u_1, u_2 смежна хотя бы двум вершинам a_i, что невозможно.

II. $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ — граф на рис. **2. б**.

Любая из вершин u_i смежна некоторой из вершин u_i. Следовательно, некоторая из вершин a_i смежна хотя бы трем из вершин u_i; пусть, например, a_1 смежна u_1, u_3 и u_6. Тогда a_1 несмежна u_4 и u_5 и, следовательно, u_4 смежна, например, a_2, а u_5 смежна a_3. Согласно лемме 8, множество $\bar{A}(a_1) \cap \bar{A}(u_1)$ содержит 3-антиклику. Очевидно $\bar{A}(a_1) \cap \bar{A}(u_1) \subset \{u_4, u_5, a_2, a_3\}$, так что $\{u_4, u_5, a_2, a_3\}$ содержит 3-антиклику. Последнее, очевидно, неверно.

III. $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ — граф на рис. **2. в**.

Можно считать, что u_1 смежна a_1 и a_2, а u_2 смежна a_3. Согласно лемме 8, множество $\bar{A}(u_2) \cap \bar{A}(u_3)$ содержит 3-антиклику. Однако $\bar{A}(u_2) \cap \bar{A}(u_3) \subset \{u_6, u_7, a_1, a_2, v_0\}$ и, следовательно, множество $\{u_6, u_7, a_1, a_2, v_0\}$ содержит 3-антиклику. Эта 3-антиклика может быть только $\{a_1, a_2, u_6\}$ или $\{a_1, a_2, u_7\}$. По причине симметрии можно считать, что $\{a_1, a_2, u_7\}$ — 3-антиклика. Тогда u_7 смежна a_3 и, следовательно, u_6 смежна a_1 или a_2. Оба случая равнозначны, и поэтому можно считать, что u_6 смежна a_1. Тогда u_4 несмежна a_1, и если допустить, что u_4 несмежна a_2, тогда $\{a_1, a_2, u_2, u_4, u_7\}$ будет 5-антикликой. Следовательно, u_4 смежна a_2. Вершина u_5 смежна некоторой из вершин a_i. Однако $\bar{A}(u_5) \cap \bar{A}(a_1) \subset \{u_2, u_4, a_2, a_3\}$, $\bar{A}(u_5) \cap \bar{A}(a_2) \subset \{u_2, u_6, a_1, a_3\}$, $\bar{A}(u_5) \cap \bar{A}(a_3) \subset \{u_1, u_4, u_6, a_1, a_2\}$, и так как никакое из множеств $\{u_2, u_4, a_2, a_3\}$, $\{u_2, u_6, a_1, a_3\}$ и $\{u_1, u_4, u_6, a_1, a_2\}$ не содержит 3-антиклику, то $\bar{A}(u_5) \cap \bar{A}(\boldsymbol{a}_i)$ не содержит 3-антиклику, что противоречит лемме 8.

IV. $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ — граф на рис **2. г**.

Хотя бы одна из вершин u_4, u_5 смежна некоторой вершине a_i (иначе $\{u_4, u_5, a_1, a_2, a_3\}$ будет 5-антикликой). Пусть u_5 смежна a_3 и, следовательно, несмежна a_1 и a_2. Согласно лемме 8, $\bar{A}(u_2) \cap \bar{A}(u_5)$ содержит 3-антиклику; она может быть только $\{u_6, a_1, a_2\}$. Следовательно, u_6 несмежна a_1 и a_2 и, кроме того, a_1 несмежна u_2. Так как u_6 несмежна a_1 и a_2, она смежна a_3. Тогда u_7 несмежна a_3 и, значит, смежна некоторой из вершин a_1, a_2; из-за симметрии можно считать, что u_7 смежна a_2.

Докажем, что a_1 несмежна хотя бы одной из вершин u_1, u_3. Допустим, что это не так, т. е. что a_1 смежна u_1 и u_3. Тогда $\bar{A}(u_1) \cap \bar{A}(a_2) \subset \{a_3, u_5, u_3, u_4, u_6\}$ и $\bar{A}(u_1) \cap \bar{A}(a_3) \subset \{a_2, u_7, u_3, u_4\}$. Множества $\{a_3, u_5, u_3, u_4, u_6\}$ и $\{a_2, u_7, u_3, u_4\}$ не содержат 3-антиклики и, следовательно, множества $\bar{A}(u_1) \cap \bar{A}(a_2)$ и $\bar{A}(u_1) \cap \bar{A}(a_3)$ не содержат 3-антиклики. Согласно лемме 8, вершина u_1 несмежна ни вершине a_2, ни вершине a_3, и, следовательно, $d_G(u_1)=2$, что является противоречием.

Таким образом доказано, что a_1 несмежна хотя бы одной из вершин u_1, u_3. Выше доказано, что a_1 несмежна u_2, u_5 и u_6. Теперь докажем, что a_1 несмежна вершине u_4. Если допустить, что a_1 смежна u_4, тогда $\bar{A}(u_2)\cap\bar{A}(u_4)\subset\{u_7, a_2, a_3, v_0\}$, и так как $\{u_7, a_2, a_3, v_0\}$ не содержит 3-антиклику, то $\bar{A}(u_2)\cap\bar{A}(u_4)$ не содержит 3-антиклику, что противоречит лемме 8. Следовательно, a_1 несмежна u_4. Если допустить, что a_1 несмежна u_7, тогда a_1 смежна u_1 и u_3 (так как $d_G(a_1)\geqq 3$), а это неверно, как уже доказано немного выше. Следовательно, a_1 смежна u_7.

Вершина u_3, очевидно, несмежна a_3 и, значит, смежна некоторой из вершин a_1, a_2; обозначим ее через a_k, а другую — через a_l. Докажем, что a_k несмежна вершине u_1. Допустим противное. Так как a_k смежна u_1 и u_3, а, как уже знаем, a_1 несмежна хотя бы одной из этих двух вершин, то $a_k\neq a_1$ и, следовательно, $a_k=a_2$, $a_l=a_1$. Очевидно $\bar{A}(u_1)\cap\bar{A}(a_1)\subset\{a_3, u_6, u_4, u_3, u_5\}$ и $\bar{A}(u_1)\cap\bar{A}(a_3)\subset\{a_1, u_7, u_3, u_4\}$. Множества $\{a_3, u_6, u_4, u_3, u_5\}$ и $\{a_1, u_7, u_3, u_4\}$ не содержат 3-антиклику. Следовательно, множества $\bar{A}(u_1)\cap\bar{A}(a_1)$ и $\bar{A}(u_1)\cap\bar{A}(a_3)$ не содержат 3-антиклику. Согласно лемме 8, u_1 несмежна a_1 и a_3, так что $d_G(u_1)=2$ — противоречие. Таким образом установлено, что a_k несмежна u_1.

Вершина u_1 смежна вершине a_l, так как $d_G(u_1)\geqq 3$. Теперь $\bar{A}(u_1)\cap\bar{A}(a_3)\subset\{u_7, a_k, u_3, u_4\}$. Множество $\{u_7, a_k, u_3, u_4\}$ не содержит 3-антиклику и, следовательно, $\bar{A}(u_1)\cap\bar{A}(a_3)$ не содержит 3-антиклику. Согласно лемме 8, u_1 несмежна a_3. Так как u_1 несмежна и a_k, то $d_G(u_1)=2$ — противоречие.

V. $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ — граф на рис. **2. д.**

Можно считать, что u_6 смежна a_1, а u_7 смежна a_3. Согласно лемме 8, $\bar{A}(u_4)\cap\bar{A}(u_7)$ содержит 3-антиклику; она может быть только $\{u_1, a_1, a_2\}$ или $\{u_2, a_1, a_2\}$. Следовательно, a_2 несмежна u_4 и u_7. Аналогично получаем, что a_2 несмежна u_3 и u_6. Следовательно, a_2 смежна u_2 и u_5 (так как $d_G(a_2)\geqq 3$). Тогда $\{u_2, a_1, a_2\}$ не 3-антиклика и, следовательно, $\{u_1, a_1, a_2\}$ — 3-антиклика, так что u_1 несмежна a_1. Аналогично, u_1 несмежна a_3. Очевидно u_1 несмежна a_2. Следовательно, $d_G(v_1)=2$ — противоречие.

VI. $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ — граф на рис. **2. е.**

Можно считать, что u_1 смежна a_1, а u_2 смежна a_2. Согласно лемме 8, $\bar{A}(u_1)\cap\bar{A}(u_3)$ содержит 3-антиклику. Эта 3-антиклика содержит a_2 и a_3. Следовательно, u_3 несмежна a_2 и a_4. Аналогично получаем, что u_5 несмежна a_1 и a_3. Тогда $\{a_1, a_2, a_3, u_3, u_5\}$ — 5-антиклика, что является противоречием.

VII. $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ — граф на рис. **2. ж.**

Можно считать, что u_1 смежна a_1 и u_2 смежна a_2. Согласно лемме 8 $\bar{A}(u_5)\cap\bar{A}(u_6)$ содержит 3-антиклику. Эта 3-антиклика, очевидно, содержит a_3. Следовательно, a_3 несмежна u_5 и u_6. Аналогично, a_3 несмежна u_3. Согласно лемме 8, $\bar{A}(u_4)\cap\bar{A}(u_7)$ содержит 3-антиклику. Эта 3-антиклика очевидно, содержит a_3. Следовательно, a_3 несмежна u_4 и u_7. Вершина a_3 несмежна одновременно вершинам u_1 и u_2, так что $d_G(a_3)\leqq 2$, что является противоречием.

VIII. $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ — граф на рис. **2. з.**

Хотя бы одна из вершин u_3, u_5 смежна некоторой из вершин a_i, иначе $\{u_3, u_5, a_1, a_2, a_3\}$ будет 5-антикликой; пусть, например, u_5 смежна a_1. Согласно лемме 8, $\bar{A}(u_5)\cap\bar{A}(u_6)$ содержит 3-антиклику. Эта 3-антиклика, очевидно, $\{u_2, a_2, a_3\}$. Вершина a_1 смежна u_2, иначе $\{a_1, a_2, a_3, u_2, u_6\}$ будет 5-антикликой. Согласно лемме 8, $\bar{A}(u_2)\cap\bar{A}(u_7)$ содержит 3-антиклику, а она, очевидно, содержит a_2 и a_3. Следовательно, a_2 и a_3 несмежны u_7. Вершина u_7, очевидно, несмежна a_1. Получаем $d_G(u_7)=2$ — противоречие.

IX. $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ — граф на рис. **2. и**.

Можно считать, что u_6 смежна a_1. Тогда a_1 несмежна u_5 и u_7 и, следовательно, смежна хотя бы одной из вершин u_1, u_2, u_3, u_4. Эти четыре вершины играют абсолютно симметричную роль, и поэтому можно считать, что a_1 смежна u_4. Согласно лемме 8, $\bar{A}(u_4)\cap\bar{A}(u_5)$ содержит 3-антиклику. Эта 3-антиклика может быть только $\{a_2, a_3, u_7\}$. Тогда $\{a_1, a_2, a_3, u_5, u_7\}$ — 5-антиклика, что является противоречием.

Лемма 10 доказана.

7. Минимальные 11-вершинные графы без 3-клик и 5-антиклик. Докажем, что, кроме графов на рис. 5, нет других 11-вершинных минимальных графов (без 3-клик и без 5-антиклик). Начнем со следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 11. *На рис. 5 изображены 6 неизоморфных минимальных 11-вершинных графов.*

Доказательство предоставляем читателю.

Лемма 12. *Если v_0 — вершина степени 2 минимального 11-вершинного графа G, тогда подграф $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ изоморфен графу на рис. 3.б или графу на рис. 3.в.*

Доказательство. Так как $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ — 8-вершинный граф без 3-клик и без 4-антиклик, то он изоморфен некоторому из графов на рис. 3. Допустим, что $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ — граф на рис. **3. а**. Через a и b обозначим вершины, смежные вершине v_0, Согласно лемме 6, можно считать, что a смежна v_1 (см. рис. **3. а**). Согласно лемме 8, $\bar{A}(v_1)\cap\bar{A}(v_5)$ содержит 3-антиклику, что, очевидно, невозможно.

Лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Если v_0 — вершина степени 2 минимального 11-вершинного графа G и подграф $\langle\bar{A}(v_0)\rangle$ изоморфен графу на рис. 3.б, тогда G изоморфен графу на рис. 5.а или графу на рис. 5.б.*

Доказательство. Через a и b обозначим вершины, смежные вершине v_0. Сначала докажем, что a и b несмежны никакой из вершин v_1, v_3, v_5, v_7 (см. рис. **3. б**). Допустим, что это не так, и пусть a смежна v_3. Согласно лемме 8, $\bar{A}(v_3)\cap\bar{A}(v_7)$ содержит 3-антиклику, однако это, очевидно, неверно.

Вершина v_2 смежна некоторой из вершин a, b, иначе $\{a, b, v_2, v_5, v_7\}$ будет 5-антикликой. Аналогично, v_6 смежна некоторой из вершин a, b. Поэтому можно считать, что v_2 смежна b, а v_6 смежна a.

Вершина v_4 смежна некоторой из вершин a, b, иначе $\{v_1, v_7, v_4, a, b\}$ будет 5-антикликой. Аналогично, v_8 смежна некоторой из вершин a, b. Если v_4 и v_8 одновременно смежные вершине a (или b), тогда G изоморфен графу на рис. **5. б**. Если v_4 и v_8 несмежны одновременно одной из вершин a, b, тогда v_4 смежна a, а v_8 смежна b или, наоборот, v_4 смежна b, а v_8 смежна a. В обоих случаях G изоморфен графу на рис. **5. а**.

Лемма 13 доказана.

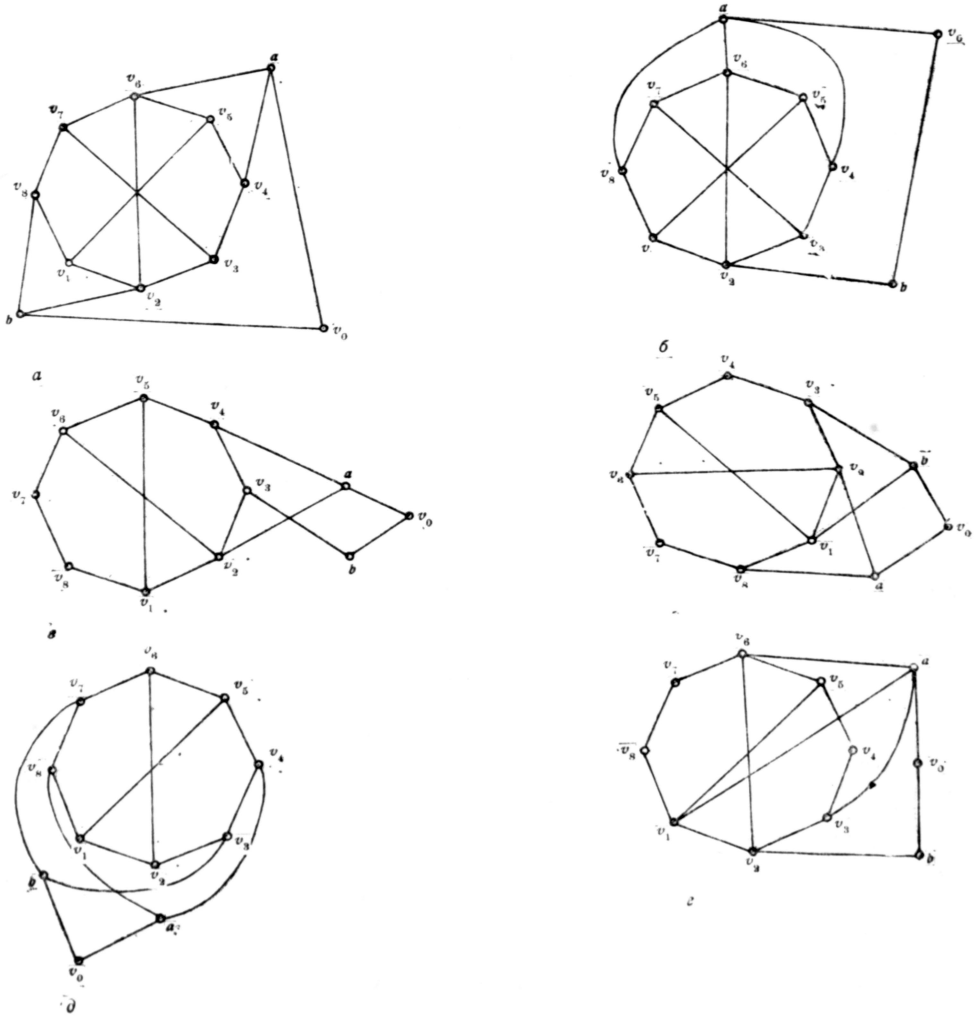


Рис. 5. Все минимальные 11-вершинные графы без 3-клик и 5-антиклик

Лемма 14. *Если v_0 — вершина минимального 11-вершинного графа G у которой есть смежная вершина степени 4, и подграф $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ изоморфен графу на рис 3.в, то G изоморфен графу на рис. 5.е.*

Доказательство. Очевидно $d_G(v_0)=2$. Пусть a и b — вершины, смежные вершине v_0 и $d_G(a)=4$. Очевидно a смежна хотя бы одной из вершин v_1, v_2, v_5, v_6 (см. рис. 3.в). Можно считать, что a смежна вершине v_1. Докажем, что a смежна и v_6. Допустим, что a несмежна v_6. Так как a несмежна v_2, v_5 и v_8, то она смежна v_7 и одной из вершин v_3, v_4; обозначим ее через v_i, а другую — через v_j. Согласно лемме 8, $\bar{A}(a) \cap \bar{A}(v_1)$ содержит 3-антиклику, и она, очевидно, $\{v_6, v_j, b\}$. Вершина b смежна v_8, потому что иначе $\{a, b, v_6, v_8, v_j\}$ будет 5-антикликой. Согласно лемме 8, $\bar{A}(a) \cap \bar{A}(v_i)$ содержит 3-антиклику, однако это, очевидно, неверно. Таким образом доказано, что a смежна v_6,

Итак, a смежна v_1 и v_6. Так как a несмежна v_7, v_8, v_2, v_5 и $d_G(a) = 4$, то a смежна некоторой из вершин v_3, v_4. По причине симметрии можно считать, что a смежна v_3. Вершина b несмежна хотя бы одной из вершин v_7, v_8; обозначим ее через u. Вершина b несмежна хотя бы одной из вершин v_4, v_5; обозначим ее через v. Если допустить, что b несмежна v_2, тогда $\{u, v, v_2, a, b\}$ будет 5-антикликой. Следовательно, b смежна v_2 и значит G содержит в качестве подграфа граф на рис **5. е**. Согласно лемме 11, G изоморфен графу на рис. **5. е**.

Лемма 14 доказана.

Следующее предложение является основным в настоящем пункте. В доказательстве используется существенным образом все доказанное в предшествующем изложении.

Лемма 15. *Кроме графов на рис. 5, нет других минимальных 11-вершинных графов (без 3-клик и без 5-антиклик).*

Доказательство. Пусть G — 11-вершинный минимальный граф. Согласно лемме 10 граф, G имеет вершину степени 2. Пусть v — вершина степени 2. Согласно лемме 12, $\langle \bar{A}(v) \rangle$ изоморфен графу на рис. **3. б** или графу на рис. **3. в**. В первом случае (см. лемму 13) G изоморфен графу на рис. **5. а** или графу на рис. **5. б**.

Поэтому в дальнейшем будем считать, что для любой вершины v степени 2 графа G подграф $\langle \bar{A}(v) \rangle$ изоморфен графу на рис. **3. в**.

Если в G имеется вершина степени 4, смежная некоторой вершине v степени 2, тогда, согласно лемме 14, G изоморфен графу на рис. **5. е**.

Поэтому в дальнейшем будем считать, что у вершин степени 2 нет смежных вершин степени 4.

Пусть v_0 — вершина степени 2 и a и b — смежные ей вершины. Тогда граф $\langle \bar{A}(v_0) \rangle$ изоморфен графу на рис. **3. в**. Если допустить, что a и b несмежны ни одной из вершин v_1, v_2, v_5, v_6, тогда легко убедиться, что G изоморфен графу на рис. **5. д**. Действительно, любая из вершин v_3, v_4, v_7, v_8 смежна некоторой из вершин a, b, потому что, если, например, v_3 несмежна ни a, ни b, тогда $\{v_3, v_1, v_6, a, b\}$ будет 5-антикликой. Без ограничения общности можно считать, что v_3 смежна b. Тогда v_4 смежна a. Если v_7 смежна b, то v_8 смежна a и G изоморфен графу на рис. **5. д**. Если v_7 смежна a, тогда v_8 смежна b и меняя местами v_7 и v_8 и одновременно с этим v_6 и v_1, снова убеждаемся, что G изоморфен графу на рис. **5. д**. Поэтому будем считать, что, например, a смежна v_2. Тогда b смежна v_3, потому что иначе v_3 будет вершиной степени 2, у которой есть смежная вершина степени 4. Если a смежна v_4, тогда граф на рис. **5. в** является подграфом графа G, и так как G минимален, а граф на рис **5. в** (согласно лемме 11) не имеет 3-клик и 5-антиклик, то G изоморфен этому графу. Поэтому будем считать, что a несмежна v_4. Вершина b смежна некоторой из вершин v_1, v_6, потому что иначе $\{a, b, v_1, v_4, v_6\}$ будет 5-антиклика. Если b смежна v_1, тогда a смежна v_8, потому что иначе v_8 будет вершиной степени 2, у которой есть смежная вершина степени 4. Теперь G изоморфен графу на рис. **5. г**. Если

b несмежна v_1, а смежна v_6, тогда v_7 смежна a, иначе v_7 будет вершиной степени 2, у которой есть смежная вершина степени 4. Снова оказывается, что G изоморфен графу на рис. **5. г**, потому что можно поменять местами v_1 и v_6, причем поменяются местами и v_7 и v_8.

Доказательство леммы 15 завершено.

8. Не существует 11-вершинный граф Рамсея без 5-клик и без 3-антиклик. Пусть G — обыкновенный граф. Через $\overline{G}$ обозначим его дополнительный граф, т. е. $V(\overline{G})=V(G)$ и две вершины смежны в $\overline{G}$ точно тогда, когда они несмежны в G.

Пусть G — 11-вершинный граф без 3-антиклик и без 5-клик. Тогда $\overline{G}$ не имеет 3-клик и 5-антиклик и, следовательно, содержит в качестве подграфа некоторый 11-вершинный минимальный граф. Все такие графы нам известны из леммы 15. Обозначим их в порядке, в котором встречаются на рис. 5, через Γ_i. Упомянутый только что граф G будет подграфом некоторого $\overline{\Gamma}_i$. Если допустить, что G — граф Рамсея, таким должен быть и $\overline{\Gamma}_i$. Однако здесь докажем следующее предложение.

Лемма 16. *Никакой из графов $\overline{\Gamma}_i$, дополнительных к графам Γ_i на рис. 5, не является графом Рамсея.*

Лемма 16 вместе с предшествующими ей рассуждениями, доказывают верность следующего утверждения.

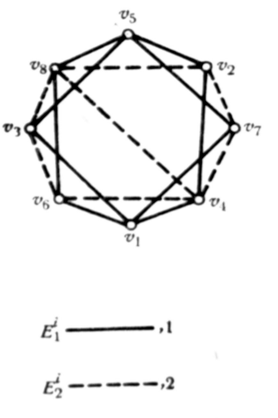


Рис. 6. Разбиение $E(\overline{\Gamma}_i)=E_1^i\cup E_2^i$, $i=1, 2$, при котором любой треугольник графа i имеет ребро как в E_1^i, так и в E_2^i

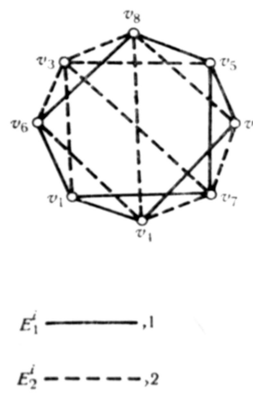


Рис. 7. Разбиение $E(\overline{\Gamma}_i)=E_1^i\cup E_2^i$, $3\leq i\leq 6$ при котором любой треугольник графа $\overline{\Gamma}_i$ имеет ребро как в E_1^i, так и в E_2^i

Лемма 17. *Не существует 11-вершинный граф Рамсея без 5-клик и без 3-антиклик.*

А теперь перейдем к доказательству леммы 16. На рис. 6 изображено разбиение $E(\overline{\Gamma}_i)=E_1^i\cup E_2^i$, при котором любой треугольник графа $\overline{\Gamma}_i$, $i=1, 2$ имеет ребро как в E_1^i, так и в E_2^i. Аналогичное разбиение для $\overline{\Gamma}_i$, $i=3, 4, 5, 6$, дано на рис. 7. Все ребра графов $\overline{\Gamma}_i$, не содержащих вершин v_0, a, b, изображены на рисунках. Притом плотными линиями изображены те ребра, которые входят в множество E_1^i, а пунктирными — те, которые содержатся в E_2^i. Принадлежность остальных ребер графов $\overline{\Gamma}_i$ (те, которые имеют хотя бы одну вершину в множестве $\{v_0, a, b\}$) указана на соответствующих таблицах.

Подробную проверку предоставляем читателю.

9. Не существует граф Рамсея без 5-клик с не более 11 вершин. Следующие два предложения хорошо известны и доказываются просто.

Лемма 18. *Если G — граф, для которого $V(G)=V_1\cup V_2$, где множества V_1 и V_2 не содержат 3-клик, тогда G не является графом Рамсея.*

Лемма 19. *Если $\chi(G)\leqq 5$, тогда G не является графом Рамсея.*

Граф Рамсея назовем критическим, если любой его подграф с меньшим числом вершин уже не является графом Рамсея.

Если в графе G невозможно найти таких двух несмежных вершин v_1 и v_2, что $A(v_1)\subset A(v_2)$, тогда назовем его графом Шпернера.

Лемма 20. *Любой критический граф Рамсея является графом Шпернера.*

На простом доказательстве этого утверждения останавливаться не будем.

Лемма 21. *Всякий граф Рамсея без 5-клик имеет хотя бы 11 вершин.*

Это предложение доказано в [3].

Лемма 22. *Пусть F — 10-вершинный граф, для которого $\chi(F)\geqq 5$. Тогда F имеет хотя бы одну 4-клику.*

Утверждение доказано в [8].

Лемма 23. *Пусть Γ — 8-вершинный граф без 5-клик и $\chi(\Gamma)\geqq 5$. Если $d_\Gamma(v)\leqq 5$ для любой вершины v графа Γ, тогда граф на рис. 8 является подграфом графа Γ.*

Предложение доказано в [9].

Теперь уже можно приступить к доказательству основного предложения настоящей статьи.

Теорема. *Любой граф Рамсея без 5-клик имеет больше 11 вершин.*

Доказательство. Согласно лемме 21 достаточно доказать, что нет 11-вершинного графа Рамсея без 5-клик. Допустим, что G — 11-вершинный граф Рамсея без 5-клик. Из леммы 17 следует, что G имеет некоторую 3-антиклику $\{v_1, v_2, v_3\}$. Через Γ обозначим подграф графа G, который имеет в качестве вершин все вершины графа G за исключением v_1, v_2 и v_3 и в котором две вершины смежны точно тогда, когда они смежны в G. Легко сообразить, что $\chi(\Gamma)\geqq 5$. Действительно, если $\chi(\Gamma)\leqq 4$, тогда, очевидно, $\chi(G)\leqq 5$, а это противоречит лемме 19. Ясно, что граф Γ не содержит 5-клик. Докажем, что $d_\Gamma(v)\leqq 6$ для любой вершины v графа Γ. Допустим противное и пусть v_0 — вершина графа Γ, для которой $d_\Gamma(v_0)=7$. Докажем, что $d_G(v_0)=10$, а для этой цели достаточно показать, что v_0 смежна вершинам v_1, v_2, v_3. Если v_0 несмежна, например, вершине v_1, тогда $A_G(v_1)\subset A_G(v_0)$ и, значит, G не является графом Шпернера, что противоречит лемме 20 (так как G — критический граф Рамсея, согласно лемме 21). Итак, доказано, что $d_G(v_0)=10$. Легко проверить, что подграф $F=\langle A_G(v_0)\rangle$ графа G удовлетворяет всем условиям леммы 22 и, следовательно, имеет 4-клику. Эта 4-клика вместе с вершиной v_0 дает 5-клику графа G. Полученное противоречие показывает, что $d_\Gamma(v) \leq 6$ для любой вершины v графа Γ.

Согласно лемме 23, граф на рис. 8 является подграфом графа Г. Через u_8 обозначим единственную вершину графа Г, которая не является вершиной графа на рис. 8. Так как в Г нет вершин степени 7, то u_1 и u_2 (см. рис. 8) несмежны u_8.

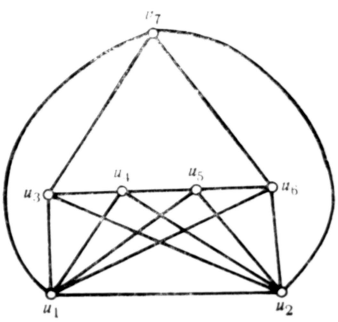


Рис. 8

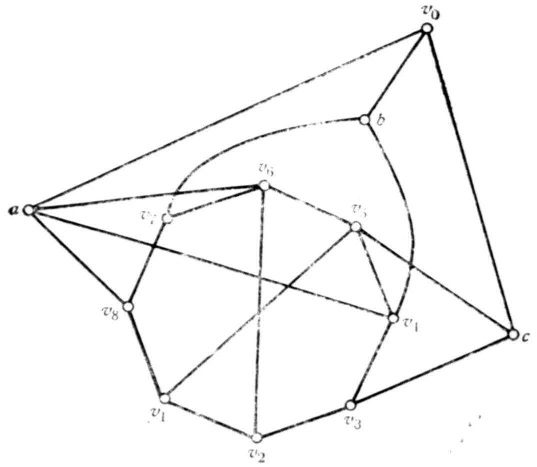


Рис. 9. Единственный минимальный 12-вершинный граф без 3-клик и без 5-антиклик

Через V_1 обозначим множество всех тех вершин v графа G, для которых $\{u_1, u_2, v\}$ — 3-клика. Множество V_1 не содержит 3-клик, потому что иначе G будет имет 5-клику. Положим $V_2 = V(G) \setminus V_1$ и докажем, что V_2 тоже не содержит 3-клик. Действительно, $u_i \notin V_2$, $i = 3, 4, 5, 6, 7$ и, следовательно, $V_2 \subset \{u_1, u_2, u_8, v_1, v_2, v_3\}$. Любая 3-клика в множестве $\{u_1, u_2, u_8, v_1, v_2, v_3\}$ очевидно содержит u_1, u_2 и некоторую из вершин v_1, v_2, v_3, потому что u_8 несмежна u_1 и u_2, а $\{v_1, v_2, v_3\}$ — 3-антиклика. Следовательно, любая 3-клика в V_2 содержит u_1, u_2 и некоторую из вершин v_1, v_2, v_3 — например v_1. Тогда $v_1 \notin V_2$. Таким образом доказано, что в V_2 нет 3-клик. Согласно лемме 18, G не является графом Рамсея — противоречие.

Доказательство теоремы завершено.

10. Не существует 12-вершинный граф Рамсея без 5-клик и без 3-антиклик. В [10] доказано следующее

Предложение 1. На рис. 9 изображен единственный минимальный 12-вершинный граф без 3-клик и без 5-антиклик.

Предложение 2. Граф $\bar{H}$, дополнительный к графу H на рис. 9, не является графом Рамсея.

Нетрудно выработать подробное доказательство этого предложения с помощью рис. 10. Рекомендуем читателю сначала еще раз просмотреть схему доказательства леммы 16.

Из предложений 1 и 2 легко следует

Предложение 3. Не существует 12-вершинный граф Рамсея без 5-клик и без 3-антиклик.

Доказательство аналогично доказательству леммы 17.

11. Не существует 13-вершинный граф Рамсея без 5-клик и без 3-антиклик.

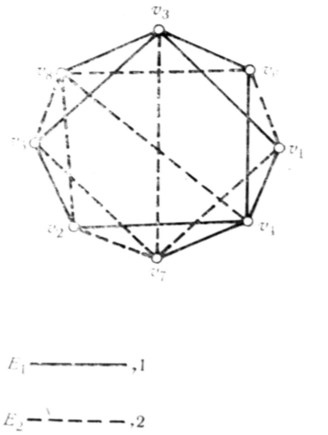


Рис. 10. Разбиение $E(\overline{H})=E_1\cup E_2$, при котором любой треугольник графа $\overline{H}$ имеет ребро как в E_1, так и в E_2

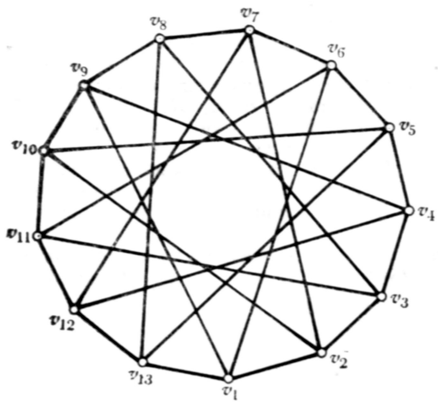


Рис. 11. Единственный 13-вершинный граф без 3-клик и без 5-антиклик

Предложение 4. На рис. 11 изображен единственный 13-вершинный граф без 3-клик и без 5-антиклик.

Для доказательства см. [7], стр. 108, однако утверждение, по-видимому, доказано еще в [11].

Предложение 5. Граф $\overline{K}$, дополнительный к графу K на рис. 11, не является графом Рамсея.

Доказательство. Разбиение $E(\overline{K})=E_1\cup E_2$, при котором любой треугольник графа $\overline{K}$ имеет ребро как в E_1, так и в E_2, можно построить следующим образом: к E_1 причисляются все ребра циклов (v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, v_{11}, v_{13}, v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}, v_{12}) и (v_1, v_{11}, v_8, v_5, v_2, v_{12}, v_9, v_6, v_3, v_{13}, v_{10}, v_7, v_4), а к E_2 — остальные ребра графа $\overline{K}$.

Из предшествующих двух предложений следует

Предложение 6. Не существует 13-вершинный граф Рамсея без 5-клик и без 3-антиклик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Хаджииванов, Н. Ненов. Пример 16-вершинного (3,3)-графа Рамсея с кликовым числом 4. *Сердика*, **9**, 1983, 73—77.
2. Н. Ненов. Пример 15-вершинного (3,3)-графа Рамсея с кликовым числом 4. *Доклады БАН*, **34**, 1981, 1487—1489.
3. Н. Ненов. Новая оценка снизу для числа Грахама — Спенсера. *Сердика*, **6**, 1980, 373—383.
4. Н. Ненов. Графи на Рамзи и някои константи, свързани с тях. Дисертация. С., 1980.
5. Н. Хаджииванов. Теорема на Туран за графите. С., 1980.
6. Н. Ненов, Н. Хаджииванов. О некоторых двуцветных раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. *Год. Соф. унив., Фак. мат. мех.*, **71**, 1982. (в печати)
7. Н. Хаджииванов. Числа на Рамзи. С., 1982.
8. Н. Ненов. Хроматическое число любого 10-вершинного графа без 4-клик не больше 4. *Доклады БАН*, **37**, 1984, 301—304.
9. Н. Ненов. Некоторые применения чисел Зыкова в теории Рамсея. *Год. Соф. унив., Фак. мат. мех.*, **74**.
10. Н. Ненов, Н. Хаджииванов. Описание 13-вершинных графов с одним треугольником и с одной 5-антикликой. *Год. Соф. унив., Фак. мат. мех.*, **76**, (в печати).
11. G. Kéry. Ramsey egy grafelméleti tételéről. Mat. Lapok, **15**, 1964, 204-224.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 16. 1. 1984