Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

SUPERCONVERGENCE DU GRADIENT DES SOLUTIONS APPROCHEES POUR LES EQUATIONS PARABOLIQUES

A. B. ANDREEV

On justifie la superconvergence du gradient des solutions obtenues lors de la résolution d'équations paraboliques à l'aide d'éléments rectangulaires de degré arbitraire. On utilise la méthode semi-discrète de Galerkin et on obtient la matrice de „masse" diagonale (concentrée).

L'estimation d'erreur par la méthode des éléments finis dans la norme énergétique peut être améliorée dans une norme discrète correspondante. Ce phénomène s'appelle „superconvergence". A partir de l'année 1970 beaucoup de travaux concernant ce problème ont été mis au jour ([1, 4, 5]). Les estimations de ce type ont une grande portée pratique, parce qu'on montre les points dans lesquels la convergence est plus rapide. Pour les éléments quadrilatéraux ce sont les points de Gauss-Legendre ([3, 4, 5]), plus récemment a été obtenue dans [6] et [7] une estimation d'erreur du type „superconvergence du gradient" pour les éléments triangulaires.

Dans ce travail nous nous intéressons à l'étude d'un problème aux limites paraboliques. Par la méthode de Galerkin avec intégration numérique, on donne une méthode constructive (voir [4, 5, 8]) pour justifier la superconvergence.

Le problème traité ici m'a été posé par Monsieur Dr. R. D. Lazarov. Je lui exprime ma gratitude profonde.

1. Formulation du problème. On considère le problème aux limites

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+f(x,\ t), \quad (x,\ t)\in Q_T=\Omega\times(0,\ T] \tag{1}$$

où Ω est le rectangle de $\mathbf{R}^2$ bornée de frontière Γ avec sur Γ et $t>0$

$$\begin{aligned} &U(x,\ t)=0, \text{ et avec la condition initiale}\\ &U(x,\ 0)=U_0(x),\ u_0 \text{ donnée dans } \Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

On détermine la solution généralisée pour tout $u\in[0,\ T]$. C'est la fonction $u\in H_0^1$ qui vérifie (cf. Strang, G., Fix, G. [1]):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t},\ V\right)+a(u,\ V)=(f,\ V) \quad \forall V\in H_0^1, \quad \forall t\in[0,\ T] \tag{3}$$

Au problème (1), (2) on associe le problème variationnel (3), où l'on a posé

$$a(n,\ v)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx$$

$$(f, v) = \int_\Omega f . v \, dx$$

Remarque 1. On peut considérer plus généralement un laplacien de la forme: $\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(x) . \frac{\partial u}{\partial x_j}]$ avec la forme bilinéaire $a(u, v) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega a_{ij} . \frac{\partial u}{\partial x_i} . \frac{\partial v}{\partial x_j}$, $H_0^1(\Omega)$-elliptique [4].

2. Notations et définitions. Nous allons utiliser les espaces de Sobolev (cf. par ex. Lions-Magenes [9])

$$H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \quad D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq m\}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_\Gamma = 0\}$$

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\| u \|_{m,\Omega} = \{ \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|^2_{L^2(\Omega)} \}^{1/2}$$

et la semi-norme

$$| u |_{m,\Omega} = \{ \sum_{|\alpha| = m} \| D^\alpha u \|^2_{L^2(\Omega)} \}^{1/2} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Notons par $P(n)$ et $Q(n)$ le réseau des polynômes définis sur un élément e.

$$P(n) = \{p(x) \mid p(x) \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{ij} . x_1^i . x_2^j\}; \quad Q(n) = \{q(x) \mid q(x) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_1^i x_2^j\}.$$

On considère une triangulation K consistant en une famille des éléments finis rectangulaires e_i, avec $e_i \cap e_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Posons $h = \max_{e_i \in K} (h_1(e_i); h_2(e_i))$ où h_1 et h_2 sont des côtés de l'élément e_i. Si $h_1(e_i) \geq h_2(e_i)$, il existe des c_1, c_2 indépendantes de h, telles que $h_1(e_i(h_2)l_i) \geq c_1 > 0$

$$c_2^{-1} h^2 \leq \text{mes } e_i \leq c_2 h^2 \quad \forall e_i \in K$$

Notons par S_h^n l'espace des éléments finis engendré par une base $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{(n+1)^2}$ ayant les propriétés suivantes:

i. $\forall j$, les $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_j$ sont linéairement indépendantes;

ii. soit M un noeud de l'élément et on définit φ = fonction affine sur chaque élément du noeud M, telle que $\varphi(M) = 1$; $\varphi(x) \in Q(n)$, $x \in e$; $\varphi(x)$ étant nulle en dehors des éléments du noeud M.

Evidemment S_h^n a la dimension finie et $S_h^n \subset H^1(\Omega)$.

On appelle l'élément principal le carré:

$$\hat{e} = \{(\xi_1, \xi_2) \in R^2 \mid -1 < \xi_i < 1\}, \quad i = 1, 2.$$

Soit $L_n(\xi)$ le polynôme de Legendre de degré n, $\xi \in [-1, 1]$. Nous utiliserons les ensembles ponctuels:

$$\hat{G}_n = \{g_1, g_2, \ldots, g_n \mid L_n(g_j) = 0\}; \quad \hat{S}_n = \hat{G}_n \times \hat{G}_n$$

$$\hat{R}_{n+1} = \{l_0, l_1, \ldots, l_n \mid l_0 = -1; \; l_n = 1; \; L_n'(l_j) = 0, \; j = 1, \ldots, n-1\};$$

$$\hat{N}_{n+1} = \hat{R}_{n+1} \times \hat{R}_{n+1}$$

Evidemment, pour tout $e \in K$ il existe une application linéaire F_e, qui transforme $\widehat{e}$ dans e telle que $F_e(\widehat{S}_n) = S_n^e$; $F_e(\widehat{N}_{n+1}) = N_{n+1}^e$.

On définit sur $\hat{e}$ les noeuds: $\widehat{a}_j = (l_{j_1}, l_{j_2}) \in \widehat{N}_{n+1}$ — points de Lobatto et $\widehat{b}_j = (g_{j_1}, g_{j_2}) \in \widehat{S}_n$ — points de Gauss-Legendre.

Nous allons utiliser les deux formules d'intégration numérique

$$(4) \quad \begin{cases} \int_{\widehat{e}} \widehat{v}(\xi) d\xi \approx 4 \sum_{\widehat{a}_j \in \widehat{e}} \alpha_j \widehat{v}(\widehat{a}_j) = \widehat{I}(\widehat{v}) \\ \int_e v(x) dx \approx \text{mes } e \sum_{a_j \in e} \alpha_j . V(a_j) = I(v); \quad \alpha_j > 0, \quad \Sigma\alpha_j = 1 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \int_{\widehat{e}} \widehat{v}(\xi) d\xi \approx 4 \sum_{\widehat{b}_j \in \widehat{e}} \beta_j . \widehat{v}(\widehat{\beta}_j) = \widehat{I^*}(\widehat{v}) \\ \int_e v(x)\, dx \approx \text{mes } e \sum_{b_j \in e} \beta_j . V(b_j) = I^*(v); \quad \beta_j > 0, \quad \Sigma\beta_j = 1 \end{cases}$$

Notons que (4), (5) sont exactes pour tout polynôme $p \in Q(2n-1)$.

On associe au problème (1), (2) la solution approchée sous la forme: $u_h(x, t) = \sum_{i=1}^{(n+1)^2} Q_i(t) . \varphi_i(x)$ où $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{(n+1)^2}(x)$ c'est la base de S_h^n, i. e.

$$\varphi_i(a_j) = S_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Dans l'identité intégrale (3) on utilise l'intégration numérique avec des formules (4), (5) et on notera par (*) le cas de la Gauss n×n-formule. Alors

$$(6) \qquad (\frac{\partial u_k}{\partial t}, v)_h + a_h^*(u_h, v) = (f, v)_h, \quad \forall v \in S_h^n$$

$$(w, v)_h = \sum_{e \in K} \text{mes } e \sum_{a_j \in e} \alpha_j . w . v(a_j)$$

$$a_h^*(w, v) = \sum_{e \in K} \text{mes } e \sum_{b_j \in e} \beta_j (\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial w}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}(b_j))$$

Remplaçons v dans (6) par $\varphi_k(x) \in S_h^n$. De cette manière on a une forme vectorielle de l'équation de Galerkin avec le vecteur inconnu $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_{(n+1)^2})$

$$M . \vec{Q'} + K . \vec{Q} = \vec{F}; \quad \vec{Q'} = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

M et K sont respectivement les matrices de "masse" et de "rigidité". Compte tenu des formules quadratures qu'on utilise, il suit que la matrice M a une forme diagonale (concentrée). C'est une grande commodité pratique.

3. Estimation de l'erreur. Désormais on notera C toute constante positive ne dépendant pas de h. Si les constantes C se trouvent dans une même expression à des endroits différents, elles ne seront pas nécessairement égales.

Soient les ensembles discrets:

$$L_h^2 = \{v(a_j) \mid a_j \in N_{n+1}^e; \quad I(v^2) < \infty\}$$

munis de la norme $\| v \|_{0,h} = (I(v^2))^{1/2}$

$$H_h^1 = \{v(b_j) \mid b_j \in S_n^e; \quad I^*(\sum_{|\alpha| \leq 1} | D^\alpha v |^2) < \infty\}$$

$$\text{avec } \| v \|_{H_h^1,\Omega} = \{I^*(\sum_{|\alpha| \leq 1} | D^\alpha v |^2)\}^{1/2}$$

Nous allons utiliser la semi-norme

$$| v |_{1,h} = \{I^*[(\frac{\partial v}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x_2})^2]\}^{1/2}$$

Introduisons la norme semi-discrète $||| \cdot |||_{1,h}$ avec laquelle nous allons estimer l'erreur de la solution approchée.

Soit $w(x, t) \in H_0^1(\Omega) \times C^1 [0, T]$

$$(7) \qquad ||| w(x, t) |||_{1,h}^2 = \max_{t \in [0,T]} \| w \|_{L_h^2}^2 + \int_0^T | w(x, t) |_{1,h}^2 \, dt = \| w \|_{L^\infty(L_h^2)}^2 + \| w \|_{L^2(H_h^1)}^2.$$

Soit V_I le polynôme d'interpolation pour la fonction $v(x) \in C(\bar{\Omega})$ tel que $V_I(a_j) = v(a_j)$, $\forall a_j \in N_{n+1}^e$, $\forall e \in \mathrm{K}$.

Nous allons établir quelques résultats préliminaires:

L e m m e 1 (Lesaint P., Zlamal M. [4] p. 150) $| v |_{1,h} = \{a_h^*(v, v)\}^{1/2}$ *est une norme dans* S_h^n *qui est uniformément équivalente à la norme continue* $| V |_{1,\Omega}$. *C'est-à-dire*

$$(8) \qquad C^{-1} | V |_{1,\Omega}^2 \leq | v |_{1,h}^2 \leq C . | v |_{1,\Omega}^2$$

L e m m e 2. *Soit* $\hat{v} \in \hat{Q}(n)$, *alors*

$$(9) \qquad | \hat{v} |_{j,\hat{e}} \leq C . | \hat{v} |_{i,\hat{e}} \quad 0 \leq i < j$$

$$(10) \qquad \max_{\hat{e}} | D^\alpha \hat{v} | \leq C . | \hat{v} |_{|\alpha|,\hat{e}}, \quad | \alpha | \geq 0$$

Démonstration. Car $\hat{v} \in \hat{Q}(n)$, alors $\| \hat{v} \|_{0,\hat{e}}^2 = | \hat{v} |_{0,\hat{e}}^2$ est une forme quadratique des coefficients du polynôme, mais $| \hat{v} |_{1,\hat{e}}^2$ est une forme quadratique bornée des mêmes coefficients. Ça montre que (9) est vrai pour $j = 1$; $i = 0$. Utilisons successivement ce fait pour les dérivés partiels de $\hat{v}$ et on démontre (9).

Les semi-normes en (10) appartiennent au même espace quotient.

L e m m e 3. *Soit* $v \in H^i(\Omega)$, *alors*

$$(11) \qquad | \hat{v} |_{i,\hat{e}} \leq C . h^{i-1} \| v \|_{i,e}$$

On démontre sans difficulté cette relation ayant en vue la transformation qu'on fait, ainsi que la définition de h.

L e m m e 4 (Cas spécial des lemmes classiques de Bramble-Hilbert [10]). Soit $L(\varphi)$ une fonctionnelle linéaire bornée dans $H^{k+1}(\Omega)$, $| L(\varphi) | \leq M . \| \varphi \|_{k+1,\Omega}$ et soit $L(\varphi) = 0$, $\varphi \in P(k)$. Alors, il existe une constante C indépendante de φ telle que

(12) $$|L(\varphi)| \leq C \cdot M\,|\varphi|_{k+1,\Omega} \quad \forall \varphi \in H^{k+1}(\Omega)$$

Soit $L(\varphi)=0$, $\forall \varphi \in Q(k)$,

(13) $$|L(\varphi)| \leq C \cdot M\{\|\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial x_1^{k+1}}\|_{0,\Omega} + \|\frac{\partial^{k+1}\varphi}{\partial x_2^{k+1}}\|_{0,\Omega}\} = C \cdot M\,[\varphi]_{k+1,\Omega}$$

Corollaires.

1. Soit $\widehat{v} \in H^{n+1}(\widehat{e})$, alors

$$\|\widehat{v}-\widehat{v}_I\|_{j,\widehat{e}} \leq C \cdot [\widehat{v}]_{n+1,\widehat{e}}, \quad 0 \leq j \leq n+1$$

2. On notera par $E(\varphi)$ la fonctionnelle linéaire qui nous donne l'erreur de la formule quadrature $E(\varphi)=\int\limits_{\Omega}\varphi dx - I(\varphi)$.

Si $\widehat{I}(\widehat{\varphi})$ est une formule exacte pour tout polynôme appartenant à $\widehat{Q}(n)$, alors $|\widehat{E}(\widehat{\varphi})| \leq C \cdot [\widehat{\varphi}]_{n+1,\widehat{e}}$.

D'autre part, si $\widehat{I}(\widehat{\varphi})$ est exacte pour tout polynôme de $\widehat{P}(n)$, alors $|\widehat{E}(\widehat{\varphi})| \leq C \cdot |\widehat{\varphi}|_{n+1,\widehat{e}}$

Nous avons pour but de montrer que l'ordre de convergence du gradient de la solution approchée vers la solution exacte dans la norme (7) est $n+1$ ce qui sera la raison que l'on parle de „superconvergence".

Lemme 5. *Soit* $u(x, t)$ *la solution de* (1), (2) *et* $u(x, t) \in H^{n+2}(\Omega)$; $f(x, t) \in H^{n+1}(\Omega)$, $\forall t \in [0, T]$, *alors*

(14) $$\|\,\|u-u_I\|\,\|_{1,h} \leq C \cdot h^{n+1}\,\|u\|_{L^2(H^{n+2})}$$

Démonstration. Considérons dans $\widehat{e}$, $t \in [0, T]$ la fonctionnelle linéaire $L(\widehat{v}) = \frac{\partial}{\partial \xi_i}(\widehat{v}-\widehat{v}_I)(\widehat{b}_j)$; $i=1, 2$; $j=1,2,\ldots, n^2$

Pour $\widehat{v} \in H^{n+2}(\widehat{e})$ cette fonctionnelle est continue, car $H^{n+2}(\widehat{e}) \to C^1(\widehat{e})$ $(n \geq 1)$, alors $|L(\widehat{v})| \leq \max\limits_{\widehat{e}} |\frac{\partial}{\partial \xi_i}(\widehat{v}-\widehat{v}_I)| \leq C\,\|\widehat{v}-\widehat{v}_I\|_{n+2,\widehat{e}} \leq C\,\|\widehat{v}\|_{n+2,\widehat{e}}$, $i=1, 2$, ce qui montre qu'elle est bornée. Nous allons voir qu'elle s'annule pour les polynômes appartenant à $\widehat{P}(n+1)$. Pour cela il suffit de montrer que $L(\xi_1^{n+1}) = L(\xi_2^{n+1}) = 0$. Mettons le polynôme $\widehat{q} = \prod\limits_{i=0}^{n}(\xi_1 - \widehat{a}_i)$, $\widehat{a}_i \in \widehat{R}_{n+1}$ sous la forme : $\widehat{q} = \xi_1^{n+1} + \widehat{r}_n$ où $\widehat{r}_n \in \widehat{P}(n)$. Evidemment $\widehat{q}_I = 0$, $(\widehat{r}_n)_I \in \widehat{P}(n)$. Alors $0 = (\xi_1^{n+1}n_I) + \widehat{r}_n$, $\widehat{q} = \xi_1^{n+1} - (\xi_1^{n+1})_I$. On dérive et on calcule dans les points de Gauss-Legendre $\widehat{b}_j$:

(15) $$\frac{d}{d\xi_1}\widehat{q}(\widehat{b}_j) = \frac{d}{d\xi_1}(\xi_1^{n+1} - (\xi_1^{n+1})_I)(\widehat{b}_j) = L(\xi_1^{n+1})$$

On peut écrire : $\widehat{q}(\xi_1) = \text{const.}\ (1-\xi_1^2)L_n'(\xi_1)$

En tenant compte de la propriété du polynôme de Legendre :

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2) \cdot L_n'(x)] + n(n+1)L_n(x) = 0, \quad x \in [-1, 1]$$

et par (15) on a $L(\xi_1^{n+1}) = 0$.

D'une manière semblable on prouve que $L(\xi_2^{n+1})=0$.

On déduit aussitôt du lemme de Bramble-Hilbert que $|L(\widehat{v})|\leq C\,.\,|\widehat{v}|_{n+2,\widehat{e}}$.

En utilisant (11), pour un élément quelconque on a: $|L(v)|\leq h_e^{-1}|L(\widehat{v})|\leq C\,.\,(\text{mes}\, e)^{-1/2}|\widehat{v}|_{n+2,\widehat{e}}$, donc

$$(16)\qquad |L(v)|\leq C\,.\,h^{n+1}(\text{mes}\, e)^{-1/2}\|v\|_{n+2,e}$$

On a enfin: $\|u-u_I\|_{L^2(H_h^1)}=\{\int_0^T\sum_{e\in K}\text{mes}\, e\sum_{b_j\in e}\beta_j\sum_{i=1}^{2}(\frac{\partial(n-u_I)}{\partial x_i})^2(b_j)dt\}^{1/2}$ $\leq C\,.\,h^{n+1}\|u\|_{L^2(H^{n+2}(\Omega))}$.

On rappelle qu'ici $\|u-u_I\|_{L^\infty(L_h^2)}=0$ (on fait la somme dans les noeuds, mais $u(a_j)=u_I(a_j)$). Ce fait et (16) impliquent momentanément le résultat (14).

Lemme 6. *Soit* u_h *la solution approchée de* (1), (2). *En utilisant les formules* (4), (5) *sous les conditions du lemme précédent on a*

$$(17)\qquad \|u_h-u_I\|_{1,h}\leq C\,.\,h^{n+1}[(1+\frac{(2n)!}{n!^2})(\|f\|_{L^2(H^{n+1}(\Omega))}+\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{L^2(H^{n+1}(\Omega))})$$
$$+\,2\|u\|_{L^2(H^{n+2}(\Omega))}].$$

Démonstration. Posons $Z_h=u_h-u_F\in H_0^1(\Omega)$. Pour tout $v\in H_0^1(\Omega)$; $\forall t\in[0,\ T]$, on a:

$$(18)\qquad (\frac{\partial z_h}{\partial t},\ v)_h+a_h^*(z_h,\ v)=(\frac{\partial u_h}{\partial t},v)_h+(\frac{\partial u_I}{\partial t},\ v)_h$$
$$+(f,\ v)_h-(\frac{\partial u_h}{\partial t},\ v)_h-a_h^*(u_I,\ v)=(f,\ v)_h-(f,\ v)+a(u,\ v)$$
$$+(\frac{\partial u}{\partial t},\ v)-(\frac{\partial u_I}{\partial t},\ v)_h-a_h^*(u_I,\ v)+a_h^*(u,\ v)-a_h^*(u,\ v)$$
$$=\{(f,\ v)_h-(f,\ v\}+\{a(u,\ v)-a_h^*(u,\ v)\}+a_h^*(u-u_I,\ v)\}+\{(\frac{\partial u}{\partial t},v)-(\frac{\partial u_I}{\partial t},\ v)_h\}$$

On va estimer séparément chaque différence entre accolades.

(a) $|(f,\ v)_h-(f,\ v)|$. On transforme cette différence:

$$(f\ v)_h-(f,\ v)=(f-f_I,\ v)_h+(f_I,\ v)_h-(f_I,\ v)+(f_I-f,\ v)$$

On considère dans ê la fonctionnelle:

$$l(\widehat{v})=(\widehat{v}-\widehat{v}_I)(\widehat{b}_j),\quad \widehat{v}\in H^{n+1}(\widehat{e})\to C(\widehat{e})$$

Elle est linéaire et bornée $l(v)=0$ pour $\widehat{v}\in\widehat{P}(n)$, alors $|l(\widehat{v})|\leq C|\widehat{v}|_{n+1,\widehat{e}}$. D'où

$$(19)\qquad |l(v)|=|(v-v_I)(b_j)|\leq C\,.\,h^{n+1}(\text{mes}\, e)^{-1/2}\|v\|_{n+1,e}$$

Evidemment

$$(20)\qquad (f-f_I,\ v)_h=0,\quad \forall t\in[0,\ T]$$

parce qu'on applique la formule quadrature de Lobatto. Nous allons estimer

$$|(f_I,\ v)_h-(f_I,\ v)|=|\sum_{e\in K}\{\text{mes}\, e\sum_{a_j\in e}\alpha_j\,.\,f_I\,.\,v(a_j)-\int_e f_I\,.\,v dx\}|$$

Considérons dans $\widehat{e}$ la fonctionnele linéaire $E\widehat{\sigma} = \sum_{a_j \in \widehat{e}} \alpha_j \cdot \widehat{\sigma}(a_j) - \int_{\widehat{e}} \widehat{\sigma}\, d\xi.$

Elle est bornée $\widehat{\sigma} \in H^{n+2}(\widehat{e})$ $E\widehat{\sigma} = 0$ pour $\widehat{\sigma} \in \widehat{Q}(2n-1)$. Par conséquent

$$|E\widehat{\sigma}| \leq C \sum_{\alpha=1}^{2} \left\| \frac{\partial^{en}\widehat{e}}{\partial \xi_\alpha^{en}} \right|_{0,\widehat{e}}$$

Soit $\widehat{\sigma} = \widehat{\varphi}_I \cdot \widehat{v}$. On utilise la formule de Leibniz

$$\frac{\partial^{2n} \widehat{f}_I \cdot \widehat{v}}{\partial \xi_\alpha^{2n}} = \frac{(2n)!}{n!^2} \cdot \frac{\partial^n \widehat{f}_I}{\partial \xi_\alpha^n} \cdot \frac{\partial^n \widehat{v}}{\partial \xi_\alpha^n}, \quad \alpha = 1,\ 2$$

D'après (12) et (9) on a:

$$|E(\widehat{f}_I \cdot \widehat{v}| \leq C \frac{(2n)!}{n!^2} |\widehat{f}_I|_{n,\widehat{e}} |\widehat{v}|_{n,\widehat{e}} \leq C \cdot C_1 \{ |\widehat{f}_I - \widehat{f}|_{n,\widehat{e}}$$

$$+ |\widehat{f}|_{n,\widehat{e}}\} |v|_{n,\widehat{e}} \leq C \cdot C_1 \{ |\widehat{f}|_{n+1,\widehat{e}} + |\widehat{f}|_{n,\widehat{e}}\} |\widehat{v}|_{n,\widehat{e}} \leq C \cdot C_1 \{ |f|_{n+1,\widehat{e}} + |\widehat{f}|_{n,\widehat{e}}\} |\widehat{v}|_{1,\widehat{e}}$$

Pour un élément $e \in K$, on obtient:

$$|E(f_I \cdot v)| \leq \{C \cdot C_1 h^n [|f|_{n+1,e} + f|_{n,e}] (\text{mes}\, e)^{-1/2} \cdot h \times |v|_{1,e} \cdot (\text{mes}\, e)^{-1/2}\} (\text{mes}\, e)$$

En vertu de (8) on termine:

(21) $$|f_I, v)_h - (f_I, v)| \leq C \cdot C_2 h^{n+1} |v|_{h,1}$$

avec $C_2 = \frac{(2n)!}{n!^2} \|f\|_{n+1,\Omega}$

Considérons $|(f_I - f, v)|$

$$\left| \int_e (f_I - f) \cdot v\, dx \right| = \left| (\text{mes}\, e) \int_{\widehat{e}} (\widehat{f}_I - \widehat{f}) \cdot \widehat{v} d\xi \right| \leq C \cdot \text{mes}\, e \, \|\widehat{f}_I - \widehat{f}\|_{0,\widehat{e}} \|\widehat{v}\|_{0,e}$$

$$\leq C \cdot \text{mes}\, e\, |\widehat{f}_I - \widehat{f}|_{n+1,\widehat{e}} \|\widehat{v}\|_{0,\widehat{e}} \leq C \cdot \text{mes}\, e \cdot |\widehat{f}|_{n+1,\widehat{e}} \|\widehat{v}\|_{0,\widehat{e}}$$

$$\leq C \cdot \text{mes}\, e\, |f|_{n+1,e} h^{n+1} (\text{mes}\, e)^{-1/2} \|v\|_{0,e} (\text{mes}\, e)^{-1/2} \leq C \cdot h^{n+1} |f|_{n+1,e} \|v\|_{0,e}$$

Car $v \in S_h^n$ s'annule sur Γ on a: $|v|_{L_2} \leq C |v|_{H^1}$ (Ciarlet [2] p. 21).

On fait la somme sur tous les éléments et utilisons de nouveau l'inégalité (8)

(22) $$|(f_I - f, v)| \leq C \cdot h^{n+1} \|f\|_{n+1,\Omega} |v|_{h,1}$$

On déduit de (20), (21) et (22) que

(23) $$|(f, v)_h - (f, v)| \leq C \cdot M_1 h^{n+1} |v|_{h,1},$$

$$M_1 = \left(1 + \frac{(2n)!}{n!^2}\right) \|f\|_{n+1,\Omega}$$

Remarque 2. Au lieu de la formule (4) on peut appliquer la formule de Gauss. La seule différence sera en (20):

Considérons (19) avec $v = f(x, t) \in H^{n+1}(\Omega)$

$$|(f - f_I, v)_h^*| \leq \left| \sum_{e \in K} \text{mes}\, e \sum_{b_j \in e} \beta_j \cdot C \cdot h^{n+1} (\text{mes}\, e)^{-1/2} \|f\|_{n+1,e} \cdot v(b_j) \right|$$

$$\leq C \, . \, h^{n+1} \{ \sum_{e \in K} \text{mes}\, e \sum_{b_j \in e} \beta_j \, . \, v^2(b_j) \}^{1/2} \{ \sum_{e \in K} \sum_{b_j \in e} \beta_j \, \| f \|^2_{n+1,e} \}^{1/2}$$

$$\leq C . h^{n+1} \| v \|_{h,\Omega} \| f \|_{n+1,\Omega}$$

Utilisons l'analogue discret d'inégalité de Friedrich (Lesaint-Zlamal [4] p. 162)

(24) $$| (f - f_I, \ v)^*_h | \leq C \, . \, h^{n+1} \| f \|_{n+1,\Omega} | v |_{1,h}$$

De cette manière on a la même relation (23), mais au lieu de M_1 on aura

$$M'_1 = (2 + \frac{(2n)!}{n!^2}) \| f \|_{n+1,\Omega}.$$

(b). Il en sera de même d'estimer la différence $| (\frac{\partial u}{\partial t}, \ v) - (\frac{\partial u_I}{\partial t}, \ v)_h |$; $\frac{\partial u}{\partial t} \in H^{n+1}(\Omega)$; $t \in [0, \ T]$, $\forall v \in S^n_h$. On obtient:

$$(\frac{\partial u}{\partial t}, \ v) - (\frac{\partial u_I}{\partial t}, v)_h = (\frac{\partial u}{\partial t}, \ v) - (\frac{\partial u}{\partial t}, \ v)_h + (\frac{\partial (u - u_I)}{\partial t}, \ v)_h$$

mais le dernier membre est égal à zéro. Suivant les résultats des cas précédents, on trouve:

(20′) $$| (\frac{\partial u}{\partial t} - (\frac{\partial u}{\partial t})_I, \ v)_h | = 0$$

(21′) $$| ((\frac{\partial u}{\partial t})_I, \ v)_h - ((\frac{\partial u}{\partial t})_I, \ v) | \leq C \, . \, C'_2 \, h^{n+1} | v |_{h,\,1}$$

$$C'_2 = \frac{(2n)!}{n!^2} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{n+1,\Omega}$$

(22′) $$| ((\frac{\partial u}{\partial t})_I - \frac{\partial u}{\partial t}, \ v) | \leq C \, . \, h^{n+1} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{n+1,\Omega} | v |_{h,1}$$

(23′) $$| (\frac{\partial u}{\partial t}, \ v)_h - (\frac{\partial u}{\partial t}, \ v) | \leq C \, . \, M'_1 \, h^{n+1} \, . \, | V |_{h,1}$$

$$M'_1 = (1 + \frac{(2n)!}{n!^2}) \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{n+1,\Omega}$$

(c). En ce qui concerne $| a(u, \ v) - a^*_h(u, \ v) |$, on a

(25) $$| a(u, \ v) - a^*_h(u, \ v) | = | \sum_{e \in K} \{ \int_e \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \text{mes}\, e \sum_{b_j \in e} \beta_j \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}(b_j) \} |$$

$$= | \sum_{e \in K} \{ \int_{\hat{e}} \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi_i} d\xi - \sum_{\hat{b}_j \in \hat{e}} \beta_i \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi_i} (\hat{b}_j) \} |; \quad v \in S^n_h$$

On se limite à l'étude du cas $i = 1$. Rappelons que $\{ g_k, \ g_l \}^n_{k,l=1}$ sont des points de Gauss-Legendre. Soit la fonctionnelle linéaire

(26) $$L\hat{\sigma} = \int_{\hat{e}} \hat{\sigma} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi_1} d\xi - \sum_{l=1}^{n} \beta_l \sum_{k=1}^{n} \beta_k \hat{\sigma} \, . \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi_1} (\hat{g}_k, \ \hat{g}_l) + H(\hat{\sigma}) = l(\hat{\sigma}) + H(\hat{\sigma})$$

où $H(\widehat{\sigma})$ étant défini par

$$H(\widehat{\sigma}) = -\int_{-1}^{1} [(\widehat{\sigma}\,.\,\widehat{v})(1,\ \xi_2) - (\widehat{\sigma}\,.\,\widehat{v})(-1,\ \xi_2)]\, d\xi_2$$

$$+\sum_{l=1}^{n} \beta_l[(\widehat{\sigma}\,.\,\widehat{v})(1\,;\ \widehat{g}_l) - (\widehat{\sigma}\,.\,\widehat{v})(-1\,;\ \widehat{g}_l)]$$

$L\widehat{\sigma}$ est bornée dans $H^{n+1}(\widehat{e})$; $|L\widehat{\sigma}| \leq c\,.\|\widehat{v}\|_{1,\widehat{e}}\, \|\widehat{\sigma}\|_{n+1,\widehat{e}}$.

Nous allons voir qu'elle s'annule pour tout polynôme appartenant à $\widehat{P}(n)$ En effet, $\dfrac{\partial\widehat{v}}{\partial\xi_1}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ par rapport à ξ_1, donc il suffit de montrer que $L\xi_2^n = 0$.

Alors, sous une forme plus explicite on a:

$$\int_{-1}^{1} \xi_2^n \Big(\int_{-1}^{1} \frac{\partial\widehat{v}}{\partial\xi_1} d\xi_1\Big) d\xi_2 - \sum_{l=1}^{n} \beta_l\,.\,\widehat{g}_l^n \sum_{k=1}^{n} \beta_k\,.\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial\xi_1}(\widehat{g}_k,\ \widehat{g}_l)$$

$$-\int_{-1}^{1} [(\xi_2^n\,.\,\widehat{v})(1\,;\ \xi_2) - (\xi_2^n\,.\,\widehat{v})(-1\,;\ \xi_2)]\,d\xi_2 + \sum_{l=1}^{n} \beta_l[\widehat{g}_l^n\,.\,v(1\,;\ \widehat{g}_l)$$

$$-\widehat{g}_l^n\,.\,\widehat{v}(-1\,;\ \widehat{g}_l)] = 0, \text{ parce que:}$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \xi_2^n \frac{\partial\widehat{v}}{\partial\xi_1} d\xi_1\, d\xi_2 - \int_{-1}^{1} [(\xi_2^n\,.\,\widehat{v})(1\,;\ \xi_2) - (\xi_2^n\,.\,\widehat{v})(-1\,;\ \xi_2)]\, d\xi_2 = 0$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \beta_l\,.\,\beta_k\,\widehat{g}_l^n\,.\,\frac{\partial\widehat{v}}{\partial\xi_1}(\widehat{g}_k\,;\ \widehat{g}_l) + \sum_{l=1}^{n} \beta_l\,.\,\widehat{g}_l^n\,[\widehat{v}(1\,;\widehat{g}_l) - \widehat{v}(-1\,;\ \widehat{g}_l)] = 0$$

D'après le lemme 4 on obtient

$$|L\widehat{\sigma}| \leq C\|\widehat{v}\|_{1,\widehat{e}}\, |\widehat{\sigma}|_{n+1,\widehat{e}}\,; \quad |l\sigma| \leq c\,(\text{mes}\, l)^{1/2}\, |\widehat{l\sigma}|$$

Si on fait la somme sur tous les éléments $l \in K$, alors $\sum_{l\in K} H(\widehat{\sigma}) = 0$. En effet, dans l'intégrale (la somme) apparaissent deux intégrales sur le même côté mais en directions opposées, ou bien, on a l'intégration sur Γ et $v \in H_0^1$ s'annule. Ayant en vue que

$$|L(\sigma)| \leq C\,.(\text{mes}\, l)^{1/2}\, |l(\widehat{\sigma}) + H(\widehat{\sigma})| = C\,.(\text{mes}\, l)^{1/2}\, |L\widehat{\sigma}|$$

et si on pose $\sigma = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, on a bien:

$$|L\sigma| \leq C.\ (\text{mes}\, l)^{1/2}\,.(\text{mes}\, l)^{-1/2}\, \|v\|_{1,l}\, |u|_{n+2,l}\,.\,h^{n+1}$$

$$\leq C\,.\,h^{n+1}\, \|v\|_{1,l}\,.\,\|u\|_{n+2,l}, \quad \text{d'où}$$

$$\Big|\sum_{l\in K} \Big\{\int_e \frac{\partial u}{\partial x_1}\,.\,\frac{\partial v}{\partial x_1} dx - \text{mes}\, l \sum_{b_j\in l} \frac{\partial u}{\partial x_1}\,.\,\frac{\partial v}{\partial x_1}(b_j)\Big\}\Big| \leq C\,.\,h^{n+1}\, \|u\|_{n+2,\Omega}\, \|v\|_{1,\Omega}$$

Pour terminer, il nous faut utiliser l'inégalité de Friedrich et (8). De la même manière on prouve le cas $i=2$.

(27) $$|a(u,\ v) - a_h^*(u,\ v)| \leq C\,.\,h^{n+1}\, \|u\|_{n+2,\Omega}\, |v|_{1,h}$$

(d). Considérons $|a_h^*(u-u_I, v)|$

$$|a_h^*(u-u_I, v)| = |\sum_{l\in K} \operatorname{mes} l \sum_{b_j\in} \beta_j(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(u-u_I) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}(b_j)|$$

D'après (16) (le lemme 5) on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u-u_I)(b_j)| \leq C \cdot h^{n+1} (\operatorname{mes} l)^{-1/2} \| u \|_{n+2,l}$$

Alors

$$|a_h^*(u-u_I, v)| \leq C \cdot h^{n+1} \sum_{l\in K} (\operatorname{mes} l)^{1/2} \sum_{b_j\in l} \beta_j \| u \|_{n+2,l} \cdot | v |_{1,h,l}$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy, on obtient :

(28) $$|a_h^*(u-u_I, v)| \leq C \cdot h^{n+1} \| u \|_{n+2,\Omega} \cdot | v |_{1,h}$$

Posons maintenant dans (18) $v = z_h \in S_h^n$ et remarquons que

$$(\frac{\partial z_h}{\partial t}, z_h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \| z_h \|_{0,h}^2$$

En tenant compte de (23), (23′), (27), (28) ainsi que de l'inégalité élémentaire $|a \cdot b| \leq \varepsilon \cdot a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot b$, $\forall \varepsilon > 0$, pour $\varepsilon = 1/2$ on trouve :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \| z_h |_{0,h}^2 + | z_h |_{1,h}^2 \leq \frac{C \cdot M^2}{2} h^{2(n+1)} + \frac{1}{2} | z_h |_{1,h}^2$$

$$\text{où } M = (1 + \frac{(2n)!}{n!^2}) \cdot (\| f \|_{n+1,\Omega} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{n+1,\Omega}) + 2 \| u \|_{n+2,\Omega}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $t \in [0; T]$. On intègre par rapport à t pour montrer (17) C. Q. F. D.

Les résultats des lemmes 5; 6 et l'inégalité du triangle nous donnent la possibilité d'annoncer le

Théorème de superconvergence. Etant vérifiées les conditions des lemmes 5; 6, il existe deux constantes c_1; $c_2 > 0$ indépendantes de h et de u telles que

$$\| u - u_h \|_{1,h} \leq h^{n+1} [C_1(\| f \|_{L^2(H^{n+1}(\Omega))} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{L^2(H^{n+1}(\Omega))}) + C_2 \cdot \| u \|_{L^2(H^{n+2}(\Omega))}].$$

REFERENCES

1. Г. Стренг, Дж. Фикс. Теория метода конечных элементов. М., 1977.
2. Ф. Сьярле. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.
3. M. Zlamal. Superconvergence and Reduced Integration in the Finite Element Method *Math. Comp.*, **32**, 1978, 143, 663-685.
4. P. Lesaint, M. Zlamal. Superconvergence of the gradient of finite element solutions. *RAIRO*, **13**, 1979, 139-166.
5. Р. З. Даутов, А. В. Лапин. Сеточные схемы произвольного порядка точности для квазилинейных эллиптических уравнений. *Известия ВУЗ, Математика*, **10**, 1979, 24—37.
6. A. B. Andreev. Superconvergence of the gradient for linear triangle elements for elliptic and parabolic equations. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **37**, 1984.
7. M. El Hatri. Superconvergence of axisymmetrical bondary-value problem. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **36**, 1983.
8. R. D. Lazarov. Evaluation of Convergence of Differential Schemes for Parabolic Equations with Generalized Solutions. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **35**, 1982.
9. J. L. Lions, E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes. Vol 1, Paris, 1968.
10. J. H. Bramble, S. R. Hilbert. Bounds for a Class of Linear Functionals with Applications to Hermite Interpolation, *Numer. Math.*, **16**, 1971.

Institut de Mécanique appliquée et d'Electrotechnique 5300 Gabrovo

Received 15. 02. 1984