Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О НЕПРОДОЛЖИМОСТИ ОБОБЩЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ДИМЧО К. СТАНКОВ

Рассматриваются вопросы, связанные с непродолжимостью обобщенно-аналитических функций через границу. Сделаны исследования о рациональной и полиномиальной выпуклости в $\mathbf{C}_G$. Доказано достаточное условие для того, чтобы открытое множество являлось областью обобщенной голоморфности. В случае открытого большого круга $\Delta_G(1)$ и его внешности построены обобщенно-аналитические функции, которые не продолжаются через его границу.

1. Предварительные сведения об обобщенно-аналитических функциях. В 1956 г. Р. Аренс и А. Зингер [1] рассматривают одно обобщение алгебры $A(T)$ — непрерывные функции на единичной окружности T, которые допускают аналитическое продолжение в открытом единичном круге Δ. Пусть Γ — подгруппа вещественной оси R с дискретной топологией, которая плотна (в обычной топологии) на R, и G — компактная группа характеров на Γ. Каждый непрерывный характер на G имеет вид $\chi_p(g)=g(p)$, $g\in G$ для некоторого $p\in\Gamma$. Замыкание A_G конечных линейных комбинаций (с комплексными коэффициентами) характеров χ_p, $p\geqq 0$ в норме $\|f\|=\max\limits_G|f|$ является равномерной алгеброй на G. Элементы A_G — это так называемые обобщенно-аналитические функции в смысле Аренса — Зингера. Алгебра A_G совпадает с пространством всех непрерывных функций на G, для которых отрицательные коэффициеты Фурье равны нулю:

$$a_{-p}=\int\limits_G f(g)\cdot\chi_p(g)d\sigma=0,\quad p>0,$$

где $d\sigma$ есть мера Хаара на G.

Р. Аренс и А. Зингер доказали, что спектр банаховой алгебры A_G гомеоморфен конусу $\bar\Delta_G=\bar\Delta_G(1)=Gx[0,\ 1]/Gx\{0\}$, снабженному фактор-топологией, а граница Шилова совпадает с множеством $Gx\{1\}$ [1]. Множество $\bar\Delta_G(1)$ называется замкнутым обобщенным (большим) кругом с радиусом 1.

Особенно интересными оказываются свойства объектов, возникающие при этом обобщении, когда группа Γ совпадает с аддитивной группой рациональных чисел Q.

Для каждого вещественного числа s определим характер $e_s\in\widehat{Q}=G$, полагая $e_s(p)=\exp isp$, $p\in Q$. Если $(\lambda,\ g)\neq *=G\times\{0\}$ — произвольная точка обобщенной (большой) плоскости $\mathbf{C}_G=G\times[0,\ \infty)/G\times\{0\}$, то возникает изоморфное вложение J_g комплексной плоскости $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}_G$ на всюду плотном подмножестве, которое содержит точку $(\lambda,\ g)$. Вложение J_g определяется следующим образом: $J_g(s+it)=(\exp(-t),\ g\,.\,e_s)$ [2]. Эти вложения называются стандартными и имеют важное значение при изучении свойств обобщеннно-аналитических функций.

В [3] Т. В. Тонев рассматривает на замкнутом обобщенном диске $\overline{\Delta}_G$ алгебру $A_G(\overline{\Delta}_G)$ всех функций, которые равномерно аппроксимируются на $\overline{\Delta}_G$ обобщенными полиномами. Каждый такой полином является конечной линейной комбинацией с комплексными коэффициентами функций: $\widetilde{\chi}_p, p \in Q^+ = Q \cap [0, \infty)$, где

$$\widetilde{\chi}_p(\lambda, g) = \lambda^p \cdot \chi_p(g) \text{ для } 0<\lambda \leq 1, \quad p \neq 0,$$
$$\widetilde{\chi}_p(*) = 0 \text{ для } p \neq 0 \text{ и } \widetilde{\chi}_0 \equiv 1.$$

Доказана следующая характеризация алгебры $A_G(\overline{\Delta}_G)$: $f \in A_G(\overline{\Delta}_G)$ тогда и только тогда, когда $f \in C(\overline{\Delta}_G)$ и функция $f \circ J$ аналитическая на верхней полуплоскости $\mathbb{C}' = \{z \mid Imz>0\}$ (здесь $J = J_{e_0}$ — стандартное вложение, содержащее точку $(1, e_0)$, где e_0 — единица G).

С каждым компактом $K \subset \mathbb{C}_G$ возникают следующие функциональные (равномерные) алгебры: $P_G(K)$ — замыкание в $C(K)$, относительно равномерной нормы $\max\limits_K |\cdot|$ обобщенных полиномов, и $R_G(K)$ — замыкание в $C(K)$ частных обобщенных полиномов (обобщенно-рациональных функций). Свойства этих алгебр, связанные спектрами, границами Шилова, и другие изучены Т. В. Тоневым [4] и С. А. Григоряном [5].

В этой работе рассматриваются некоторые случаи непродолжимости обобщенно-аналитических функций. Обобщенно-аналитическая функция в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}_G$ определяется как непрерывная функция, которая локально в U равномерно аппроксимируема полиномами.

2. Полиномиальная и рациональная выпуклость на большой плоскости $\mathbb{C}_G$. Аналогичным образом как в классическом случае, рационально выпуклой оболочкой $r(K)$ ограниченного множества $K \subset \mathbb{C}_G$ будем называть множество всех точек $(\lambda, g) \in \mathbb{C}_G$, для которых

$$|R(\lambda, g)| \leq \sup_K |R|,$$

где $R \in C(K)$ является обобщенно-рациональной функцией. Ограниченное множество $K \subset \mathbb{C}_G$ называется обобщенно-рационально выпуклым, если $K = r(K)$.

Лемма 1. *Если $K \subset \mathbb{C}_G$ — компактное множество и $(\lambda_0, g_0) \notin K$, то существует $p \in Q^+$, так что $\widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0) \neq \widetilde{\chi}_p(\lambda, g)$ для любой точки $(\lambda, g) \in K$, т. е. $\widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0) \notin \widetilde{\chi}_p(K)$.*

Доказательство. Так как семейство функций $\{\widetilde{\chi}_{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$ разделяет точки $\mathbb{C}_G$, то для любой точки $\alpha = (\lambda, g) \in K$ существует целое положительное число n_α, так что

$$\widetilde{\chi}_{1/n_\alpha}(\lambda, g) \neq \widetilde{\chi}_{1/n_\alpha}(\lambda_0, g_0), \quad \text{т. е. } |\widetilde{\chi}_{1/n_\alpha}(\lambda, g) - \widetilde{\chi}_{1/n_\alpha}(\lambda_0, g_0)| > 0.$$

Из-за непрерывности $\widetilde{\chi}_{1/n_\alpha}$ в точке (λ, g) существует окрестность U_α точки (λ, g), где верхнее неравенство верно. Из открытого покрытия $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ компакта K выберем конечное покрытие $U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \ldots \cup U_{\alpha_k}$. Рассмотрим числа $1/n_{\alpha_1}, 1/n_{\alpha_2}, \ldots, 1/n_{\alpha_k}$ и обозначим $m = n_{\alpha_1} \cdot n_{\alpha_2} \ldots n_{\alpha_k}$. Тогда числа $r_j = m/n_{\alpha_j}$ — целые и положительные для любого j.

Пусть (λ, g) — произвольная точка из K и $(\lambda, g)\in U_{a_j}$ для некоторого j

$$[\widetilde{\chi}_{1/m}(\lambda, g)]^{r_j}=\widetilde{\chi}_{r_j/m}(\lambda, g)=\widetilde{\chi}_{1/n_{a_j}}(\lambda, g)\neq\widetilde{\chi}_{1/n_{a_j}}(\lambda_0, g_0)=[\widetilde{\chi}_{1/m}(\lambda_0, g_0)]^{r_j},$$

т. е. $\widetilde{\chi}_{1/m}(\lambda, g)\neq\widetilde{\chi}_{1/m}(\lambda_0, g_0)$, и при этом число m не зависит от выбора точки (λ, g). Этим лемма доказана.

Отметим, что при выборе числа $p=1/m$ мы воспользовались фактом, что группа, с которой работаем, совпадает с множеством Q.

В общем случае, когда Γ — произвольная аддитивная подгруппа вещественной оси R, может оказаться, что характеры на Γ не разделяют точки от компактных множеств.

Пример 1. Пусть Γ — целочисленная решетка $Z\times Z$ на комплексной плоскости C. Группой характеров группы Γ служит тор T^2, т. е. произведение двух окружностей. Точке $(n, m)\in\Gamma$ соответствует характер χ_{nm} тора T^2:

$$\chi_{nm}(\theta, \psi)=\exp in\theta\,.\,\exp im\psi,$$

где θ и ψ — угловые параметры на T^2. Видно, что Γ изоморфна подгруппе $\{p\in R\,|\,p=n+m\sqrt{2},\ (n, m)\in\Gamma\}$ вещественной оси. Алгебра на $T^2=\widehat{\Gamma}$, порожденная характерами $\chi_p=\chi_{nm}$, где $p=n+m\sqrt{2}\geq 0$, обозначается через $A_{\sqrt{2}}$ [2]

Рассмотрим на T^2 точку $(2\pi, 2\pi)$ и компакт $K=K_1\cup K_2$, где

$$K_1=\{(\theta, \psi)\in T^2\,|\,0\leq\theta\leq 2\pi,\ \pi/2\leq\psi\leq 3\pi/2\},$$

$$K_2=\{(\theta, \psi)\in T^2\,|\,\pi/2\leq\theta\leq 3\pi/2,\quad 0\leq\psi\leq 2\pi\}.$$

Пусть $\chi_p=\chi_{nm}$ — произвольный характер, для которого $p=n+m\sqrt{2}\geq 0$. Видно, что в этом случае n и m не могут быть отрицательными одновременно. Возможны следующие случаи:

1. $(n, m)=(0, 0)$. Тогда χ_{nm} отображает все точки из T^2 в 1;

2. $(n, m)=(1, 1)$. Тогда для точки $(\pi, \pi)\in K$ выполняется $\chi_{11}(\pi, \pi)=\exp 2\pi i=1$;

3. $m>0$ и $m\neq 1$. Так как

$$\frac{3m\pi/2+n\theta}{2\pi}-\frac{m\pi/2+n\theta}{2\pi}=\frac{m}{2}\geq 1,$$

существует целое число k, такое, что

$$\frac{m\pi/2+n\theta}{2\pi}\leq k\leq\frac{3m\pi/2+n\theta}{2\pi},\quad \text{т. е. } \pi/2\leq\frac{2\pi k-n\theta}{m}\leq 3\pi/2.$$

Следовательно, для любого $\theta\in[0, 2\pi]$ можно найти k, для которого $\psi=(2\pi k-n\theta)/m\in[\pi/2, 3\pi/2]$. Тогда точка (θ, ψ) принадлежит K и выполняется

$$\chi_{nm}(\theta, \psi)=\exp in\theta\,.\,\exp im\psi=\exp(in\theta+i2\pi k-in\theta)=1.$$

4. $n>0$ и $n\neq 1$, как в 3.

5. $m>0$ и $m=1$. Возможны следующие варианты:

а) $n=-1$; тогда $(\pi, \pi)\in K$ и $\chi_{-11}(\pi, \pi)=1$;

б) $n=0$; тогда $(\pi, 2\pi)\in K$ и $\chi_{01}(\pi, 2\pi)=1$;

в) $n=1$; это случай 2.

г) $n\geq 2$; это случай 4.

Следовательно, для любого характера χ_{nm}, где $n+m\sqrt{2}\geq 0$, существует точка $(\theta, \psi)\in K$, такая, что $\chi_{nm}(\theta, \psi)=1=\chi_{nm}(2\pi, 2\pi)$, т. е. точка $(2\pi, 2\pi)$ и компакт K не разделяются никаким характером.

Следствие 1. *Любое компактное подмножество C_G является обобщенно-рационально выпуклым.*

Доказательство. Пусть $K\subset C_G$ — произвольное компактное подмножество и $(\lambda_0, g_0)\notin K$. По лемме 1 существует $p\in Q^+$, такое, что $\widetilde{\chi}_p(\lambda, g)\neq\widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0)$ для любого $(\lambda, g)\in K$. Так как функция $\widetilde{\chi}_p-\widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0)$ непрерывна и $|\widetilde{\chi}_p(\lambda, g)-\widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0)|>0$ на K, то $\min\limits_K|\widetilde{\chi}_p(\lambda, g)-\widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0)|=\delta>0$. Обобщенно-рациональная функция $R(\lambda, g)=[\widetilde{\chi}_p(\lambda, g)-\widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0)]^{-1}$ непрерывна на K и удовлетворяет условиям

$$|R(\lambda, g)|=|\widetilde{\chi}_p(\lambda, g)-\widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0)|^{-1}\leqq(\min_K|\widetilde{\chi}_p(\lambda, g)-\widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0)|)^{-1}=1/\delta$$

для любого $(\lambda, g)\in K$ и $\lim|R(\lambda, g)|=+\infty$ при $(\lambda, g)\to(\lambda_0, g_0)$.

Это означает, что $(\lambda_0, g_0)\notin r(K)$, и тогда $K=r(K)$.

Доказанное утверждение сформулировано С. А. Григоряном [5].

Обратимся снова к примеру 1. Оказывается, что и в этом случае компактные множества на T^2 рационально выпуклые.

Рассмотрим сначала точку $(2\pi, 2\pi)$ и произвольный компакт K, который не содержит $(2\pi, 2\pi)$. При подходящем выборе числа $d\in(0, \pi)$ выполняется $K\subset K'$, где $K'=K_1^1\cup K_2^1$ и

$$K_1^1=\{(\theta, \psi)\in T^2\,|\,0\leqq\theta\leqq 2\pi, \quad \pi-d\leqq\psi\leqq\pi+d\},$$

$$K_2^1=\{(\theta, \psi)\in T^2\,|\,\pi-d\leqq\theta\leqq\pi+d, \quad 0\leqq\psi\leqq 2\pi\}.$$

Непосредственно проверяется, что

1. Любая точка из K' разделяется от $(2\pi, 2\pi)$ посредством некоторого из характеров $\chi_{11}, \chi_{-11}, \chi_{12}$;

2. Обобщенный полином $P=\chi_{11}+\chi_{-11}+\chi_{12}$ принимает значение 3 в $(2\pi, 2\pi)$, а $|P(\theta, \psi)|<3$ для любого $(\theta, \psi)\in K'$.

Следовательно, $P=\chi_{11}+\chi_{-11}+\chi_{12}$ разделяет точку $(2\pi, 2\pi)$ от компакта K.

Пусть, наконец, E — произвольный компакт на T^2 и $(\theta_0, \psi_0)\notin E$. При помощи трансформации $(\theta, \psi)\to(\theta-\theta_0, \psi-\psi_0)$ точка (θ_0, ψ_0) отображается в $(0, 0)$, а E — в компакт E_1, несодержащий $(0, 0)$, а, следовательно, и $(2\pi, 2\pi)$. Видно, что $P(0, 0)=P(2\pi, 2\pi)=3\neq P(\theta, \psi)$ для любого $(\theta, \psi)\in E_1$, где $P=\chi_{11}+\chi_{-11}+\chi_{12}$. Тогда обобщенный полином $P_1=a_1^0\cdot\chi_{11}+a_2^0\cdot\chi_{-11}+a_3^0\cdot\chi_{12}$, где $a_1^0=\exp(-i\theta_0-i\psi_0)$, $a_2^0=\exp(i\theta_0-i\psi_0)$, $a_3^0=\exp(-i\theta_0-2i\psi_0)$, удовлетворяет условиям: $P_1(\theta, \psi)=P(\theta-\theta_0, \psi-\psi_0)\neq 3$ для любого $(\theta, \psi)\in E$ и $P_1(\theta_0, \psi_0)=P(0, 0)=3$. Обобщенно-рациональная функция $R=(P_1-3)^{-1}$, непрерывная на E. Существует $\alpha>0$ такое, что $|R(\theta, \psi)|<\alpha$ для любого $(\theta, \psi)\in E$ и $\lim|K(\theta, \psi)|=+\infty$ при $(\theta, \psi)\to(\theta_0, \psi_0)$. Это означает, что $(\theta_0, \psi_0)\notin r(K)$, и, следовательно, $K=r(K)$.

Рационально-выпуклые оболочки возникают при изучении равномерной алгебры $R_G(K)$. Например, пространство максимальных идеалов этой алгебры совпадает с рационально-выпуклой оболочкой $r(K)$, а топологическая граница $r(K)$ является границей $R_G(K)$ [4, 5]. Применяя следствие 1, можно всюду заменить $r(K)$ на K.

Полиномиально-выпуклой оболочкой $\widehat{K}$ ограниченного множества K в $\mathbf{C}_G$ называется множество всех точек $(\lambda, g) \in \mathbf{C}_G$, для которых

$$|P(\lambda, g)| \leq \sup_K |P|$$

для любого обобщенного полинома. Ограниченное множество K называется обобщенно-полиномиально выпуклым, если $K = \widehat{K}$.

В [5] С. А. Григорян указывает необходимое и достаточное условие для того, чтобы компактное множество в $\mathbf{C}_G$ было обобщенно-полиномиально выпуклым. Здесь приводится достаточное условие, которое описывается посредством функций $\widetilde{\chi}_p$.

Лемма 2. *Пусть K — компактное подмножество $\mathbf{C}_G$ и $K_p = \widetilde{\chi}_p(K)$ — полиномиально-выпуклый компакт в $\mathbf{C}$ для любого $p \in Q^+$. Тогда K — обобщенно-полиномиально выпуклое множество в $\mathbf{C}_G$.*

Доказательство. Пусть $(\lambda_0, g_0) \notin K$ и $p \in Q^+$ такое, что $z_0 = \widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0) \notin \widetilde{\chi}_p(K)$ (применили лемму 1). Так как K_p — полиномиально-выпуклый компакт в $\mathbf{C}$, то существует полином $P_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z^k$ такой, что $|P_n(z_0)| > \max_{K_p} |P_n(z)|$. Тогда $P_n^G = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\widetilde{\chi}_p)^k$ — обобщенный полином, $P_n^G(\lambda, g) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [\widetilde{\chi}_p(\lambda, g)]^k = P_n(\widetilde{\chi}_p(\lambda, g))$ и выполняется

$$|P_n^G(\lambda_0, g_0)| = |P_n(\widetilde{\chi}_p(\lambda_0, g_0))| = |P_n(z_0)| > \max_{K_p} |P_n(z)| \geq \max_K |P_n^G(\lambda, g)|.$$

Следовательно, $(\lambda_0, g_0) \notin \widehat{K}$ и тогда $K = \widehat{K}$.

Полиномиальные оболочки имеют важное значение при изучении алгебры $P_G(K)$. Как показано в [4], пространство максимальных идеалов $\mathrm{sp}\, P_G(K)$ совпадает с полиномиально-выпуклой оболочкой $\widehat{K}$, а топологическая граница $\widehat{K}$ является границей Шилова алгебры $P_G(K)$.

Отметим, что условие в лемме 2 не является необходимым.

Пример 2. Рассмотрим компакт $K = \{(1, e_s) \mid s \in [0, 2\pi]\}$. Если $(\lambda_0, g_0) \in \mathbf{C}_G$ — произвольная точка, которая не принадлежит K, то:

1. $\lambda_0 > 1$. Тогда $|\widetilde{\chi}_1(\lambda_0, g_0)| = \lambda_0 > 1 = \max_K |\widetilde{\chi}_1(\lambda, g)|$;

2. $\lambda_0 < 1$. Компактное множество $K_2 = \widetilde{\chi}_{1/2}(K) = \{z = \exp i\theta \mid \theta \in [0, \pi]\}$ полиномиально-выпукло в $\mathbf{C}$. Так как $|\widetilde{\chi}_{1/2}(\lambda_0, g_0)| = |z_0| < 1$, то существует полином $P_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z^k$ такой, что $|P_n(z_0)| > \max_{K_2} |P_n(z)|$. Тогда обобщенный полином $P_n^G = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\widetilde{\chi}_{1/2})^k$ удовлетворяет неравенству

$$|P_n^G(\lambda_0, g_0)| = |P_n(z_0)| > \max_{K_2} |P_n(z)| \geq \max_K |P_n^G(\lambda, g)|.$$

3. $\lambda_0 = 1$. Функция

$$h(\lambda,\ g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left[1+\overline{\widetilde{\chi}_{1/n}(\lambda_0,\ g_0)}\cdot\widetilde{\chi}_{1/n}(\lambda,\ g)\right]$$

удовлетворяет условиям $h\in A_G(\overline{\Delta}_G)$, $h(\lambda_0,\ g_0)=1$ и $|h|<1$ на K [4]. Сразу видно, что существует обобщенный полином P_n, для которого

$$|P_n(\lambda_0,\ g_0)|>\max_K |P_n(\lambda,\ g)|.$$

Следовательно, $(\lambda_0,\ g_0)\notin\widehat{K}$, которое означает, что K является обобщенно-полиномиально выпуклым.

С другой стороны, $K_1=\widetilde{\chi}_1(K)=\{z=\exp i\theta\,|\,\theta\in[0,\ 2\pi]\}$ — единичная окружность в $\mathbf{C}$, т. е. $\widehat{K_1}\neq K_1$.

3. Достаточное условие для непродолжимости через границу открытого множества в $\mathbf{C}_G$.

Определение 1. *Непрерывная функция f в открытом множестве $U\subset\mathbf{C}_G$ называется обобщенно-аналитической в U, если локально в U равномерно аппроксимируется обобщенными полиномами, т. е. если для любой точки $(\lambda,\ g)\in U$ существует окрестность $V\subset U$, содержащая $(\lambda,\ g)$, где f равномерно аппроксимируется обобщенными полиномами.*

Множество обобщенно-аналитических функций в U будем обозначать через $A_G^l(U)$.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f\in A_G^l(U)$ продолжается обобщенно-голоморфно через точку $(\lambda,\ g)\in\partial U$, если существует окрестность V точки $(\lambda,\ g)$ и функция $F\in A_G^l(U\cup V)$* такие, что $F\equiv f$ в U.

Определение 3. *Открытое множество $U\subset\mathbf{C}_G$ называется областью обобщенной голоморфности, если существует $f\in A_G^l(U)$, которая не продолжается обобщенно-голоморфно ни через одну точку границы ∂U.*

Определение 4. *Открытое множество $U\subset\mathbf{C}_G$ называется обобщенно-полиномиально выпуклым, если для любого компактного множества $K\subset U$ выполняется $\widehat{K}\subset U$.*

Отметим, что в $\mathbf{C}_G$ можно определить следующую естественную метрику:

$$d((\lambda,\ g),\ (\lambda_1,\ g_1))=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,|\,\widetilde{\chi}_{1/n}(\lambda,\ g)-\widetilde{\chi}_{1/n}(\lambda_1,\ g_1)\,|,$$

которая порождает фактор-топологию в $\mathbf{C}_G$. В частности, последовательность $\{(\lambda_n,\ g_n)\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к $(\lambda_0,\ g_0)$ тогда и только тогда, когда $d((\lambda_n,\ g_n),\ (\lambda_0,\ g_0))\to 0$ при $n\to+\infty$ [4].

Теорема 1. *Любое открытое обобщенно-полиномиально выпуклое множество $U\subset\mathbf{C}_G$ является областью обобщенной голоморфности.*

Для доказательства нужны следующие утверждения.

Лемма 3. *Пусть U — открытое обобщенно-полиномиально выпуклое подмножество $\mathbf{C}_G$ и $\{\eta_\nu=(\lambda_\nu',\ g_\nu')\}_{\nu=1}^{\infty}$ — последовательность точек ∂U. Тогда существуют последовательности компактов $\{K_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ точек $\{\alpha_\nu=(\lambda_\nu,\ g_\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ и обобщенных полиномов $\{P_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям:*

1) *$K_\nu\subset U$, $K_{\nu-1}\subset K_\nu$ для любого ν и $\bigcup_{\nu=1}^{\infty}K_\nu=U$;*

2) $\alpha_\nu \in U$ *и* $d(\alpha_\nu, \eta_\nu) < 1/\nu$ *для любого* ν;

3) $\|P_\nu\|_{K_\nu} = \max\limits_{K_\nu} |P_\nu| \leq 1$ *и* $|P_\nu(\alpha_\nu)| > 1$ *для любого* ν.

Доказательство проводится аналогичным образом, как в классическом n-мерном случае [6].

Лемма 4. *Пусть E — замкнутое подмножество в $\overline{\Delta}_G(\delta)$, где $\delta > 0$. Существует счетное подмножество, которое всюду плотно на E.*

Доказательство. Так как E — замкнутое подмножество компакта $\overline{\Delta}_G(\delta)$, то E является компактным. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — все элементы Q.

Если n — фиксированное целое положительное число и $\alpha = (\lambda, g) \in E$ — произвольная точка, выберем базисную окрестность $W^n_\alpha = U^n_\lambda \times V^n_g$, где $U^n_\lambda = \{\lambda' \| \lambda' - \lambda| < 1/n\}$, $V^n_g = \{g' \in G \,|\, |g'(p_k) - g(p_k)| < 1/n,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$ при $(\lambda, g) \neq *$ и $U^n_0 = \{\lambda' | 0 \leq \lambda^1 < 1/n\}$, $V^n_0 = G$ при $\lambda = 0$. Из открытого покрытия $\{W^n_\alpha\}_{\alpha \in E}$ компакта E выберем конечное покрытие $\{W^n_{\alpha_s}\}_{s \in A(n)}$, где $A(n)$ — конечное подмножество целых положительных чисел. Если обозначим $B(n) = \{\alpha_s\}_{s \in A(n)}$, получаем счетное множество $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(n) \subset E$. Если точка $*$ принадлежит E, будем считать, что мы дополнительно добавили ее в B.

Пусть $\alpha = (\lambda, g)$ — произвольная точка из B.

Если $\alpha = *$, то она принадлежит B.

Пусть $\alpha = (\lambda, g) \neq *$ и W — произвольная окрестность точки α. Существует базисная окрестность $W^\varepsilon_\alpha = U^\varepsilon_\lambda \times V^\varepsilon_g$, где $V^\varepsilon_g = \{g' \in G \| g'(p) - g(p)| < \varepsilon$, для любого $p \in Q(\alpha)$ — конечное подмножество $Q\}$ и $U^\varepsilon_\lambda = \{\lambda' \,|\, |\lambda' - \lambda| < \varepsilon\}$ такая, что $W^\varepsilon_\alpha \subset W$.

Если n — достаточно большое, будет выполнено $1/n < \varepsilon$ и $Q(\alpha) \subset \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Тогда $U^n_\lambda \subset U^\varepsilon_\lambda$, $V^n_g \subset V^\varepsilon_g$ и, следовательно, $W^n_\alpha = U^n_\lambda \times V^n_g \subset W^\varepsilon_\alpha \subset W$. Поскольку $\{W^n_{\alpha_s}\}_{s \in A(n)} \supset E$, то существует $s_0 \in A(n)$ такое, что $\alpha = (\lambda, g) \in W^n_{\alpha_{\alpha_0}} = U^n_{\lambda_{s_0}} \times V^n_{g_{\alpha_0}}$, где $\alpha_{s_0} = (\lambda_{s_0}, g_{s_0})$.

Следовательно, $\lambda \in U^n_{\lambda_{s_0}}$, т. е. $|\lambda - \lambda_{s_0}| < 1/n$ и $g \in V^n_{g_{s_0}}$, которое означает что $|g/(v_k) - g_{s_0}(p_k)| < 1/n$ для любого $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\alpha_{s_0} = (\lambda_{s_0}, g_{s_0}) \in U^n_\lambda \times V^n_g \subset W$, а, с другой стороны, выполняется $\alpha_{s_0} \in B(n) \subset B$. Следовательно, B всюду плотно в E.

Следствие 2. *Пусть E — замкнутое подмножество в C_G. Существует счетное подмножество, которое всюду плотно на E.*

Доказательство. Если n — целое положительное число, то в $E_n = E \cap \overline{\Delta}_G(n)$ по лемме 4 существует счетное множество B_n, которое всюду плотно на E_n. Тогда и множество $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \subset E$ является счетным.

Пусть $\alpha = (\lambda, g) \in E$ и n_0 такое, что $\alpha \in E_{n_0}$. Поскольку B_{n_0} всюду плотно на E_{n_0}, то для произвольной окрестности W точки α существует $\alpha_0 = (\lambda_0, g_0) \in W \cap B_{n_0} \subset W \cap B$, т. е. B всюду плотно на E.

Доказательство теоремы. Контур ∂U — замкнутое множество в C_G. Применяя следствие 2, можно найти счетное множество M, которое всюду плотно на ∂U. Пусть последовательность $\{\eta_\nu = (\lambda'_\nu, g'_\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ такая, чтобы каждая точка M встречалась в ней бесконечно часто. Пусть последовательности компактов $\{K_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, точек $\{\alpha_\nu=(\lambda_\nu, g_\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$ и обобщенных полиномов $\{P_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ те, которые были построены в лемме 3. Функция, которая не продолжается через границу множества U, строится аналогичным образом, как в классическом случае [6].

Так как $|P_\nu(\alpha_\nu)|>1$ для любого ν, то существует последовательность целых положительных чисел $\{q_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, $q_1=1$ такая, что

$$\frac{1}{\mu^2}|P_\mu(\alpha_\mu)|^{q_\mu}\geqq\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\frac{1}{\nu^2}|P_\nu(\alpha_\mu)|^{q_\nu}+\mu, \quad \mu\geqq 2. \tag{1}$$

Поскольку $|P_\nu(\alpha)|\leqq 1$ для любого $\alpha=(\lambda, g)\in K_\mu$ и $\nu\geqq\mu$, то ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}(P_\nu(\alpha))^{q_\nu}$ равномерно сходится на K_μ. Следовательно, функция $f(\lambda, g)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}(P_\nu(\lambda, g))^{q_\nu}$ непрерывна на U и на компактных множествах U равномерно аппроксимируется обобщенными полиномами, т. е. $f\in A_G^l(U)$.

Если μ фиксированное, то применяя (1), можно написать

$$|f(\alpha_\mu)|=\left|\frac{1}{\mu^2}(P_\mu(\alpha_\mu))^{q_\mu}+\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\frac{1}{\nu^2}(P_\nu(\alpha_\mu))^{q_\nu}+\sum_{\nu=\mu+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}(P_\nu(\alpha_\mu))^{q_\nu}\right|$$

$$\geqq\frac{1}{\mu^2}|P_\mu(\alpha_\mu)|^{q_\mu}-\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\frac{1}{\nu^2}|P_\nu(\alpha_\mu)|^{q_\nu}-\sum_{\nu=\mu+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\geqq\mu-\sum_{\nu=\mu+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2},$$

т. е. $f(\alpha_\mu)\to\infty$ при $\mu\to+\infty$.

Допустим, что f продолжается обобщенно-голоморфно через точку $\alpha=(\lambda, g)\in\partial U$ в окрестности V. По следствию 2, существует точка $\eta_0\in M\cap V$. Так как η_0 встречается бесконечно часто в $\{\eta_\nu=(\lambda_\nu^{\bullet}, g_\nu')\}_{\nu=1}^{\infty}$, то существует последовательность $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_s}, \ldots$ такая, что $\alpha_{k_s}\in U$ для любого s и $d(\alpha_{k_s}, \eta_0)<1/k_s$, т. е. α_{k_s} стремится к η_0. Следовательно, $f(\alpha_{k_s})\to\infty$, которое противоречит непрерывности f в точке η_0.

Следовательно, U является областью обобщенной голоморфности.

4. Обобщенно-аналитические функции, которые не продолжаются через границу. Пусть K — компактное подмножество большого диска $\Delta_G(1)$. Если $(\lambda, g)\notin\Delta_G$, то для обобщенного полинома $\widetilde{\chi}_1$ выполняется

$$|\widetilde{\chi}_1(\lambda, g)|=|\lambda\cdot g(1)|=\lambda\geqq 1>\max_K|\widetilde{\chi}_1|.$$

Следовательно, $(\lambda, g)\notin\widehat{K}$ и Δ_G является полиномиально-выпуклым. Применяя теорему 1, получаем, что Δ_G — область обобщённой голоморфности. Ниже построим функцию, которая не продолжается через границу Δ_G.

Лемма 5. *Пусть $U\subset\Delta_G$ — открытое множество, содержащее точку (λ_0, g_0), функция f принадлежит $A_G^l(U)$ и J_{g_0} — соответствующее стандартное вложение комплексной плоскости. Тогда функция $f\circ J_{g_0}$ является аналитической в открытом множестве $V=J_{g_0}^{-1}(U)\subset\mathbf{C}$.*

Доказательство. Поскольку $J_{g_0}(\mathbf{C})$ всюду плотно в $\mathbf{C}_G$ и $T_{g_0}(\mathbf{C})\cap U\neq\varnothing$, то $V\neq\varnothing$.

Пусть $z_1=s_1+it_1 \in V$ — произвольная точка и $(\lambda_1, g_0 . e_{s_1}) = J_{g_0}(z_1) \in U$, где $\lambda_1=\exp(-t_1)$ и $e_{s_1}=J(s_1)$. Так как $f \in A^l_G(U)$, то существует окрестность $U_1 \subset U$ точки $(\lambda_1, g_0 . e_{s_1})$ такая, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти обобщенный полином $P=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . \widetilde{\chi}_{p(k)}$, для которого $\sup_U |P(\lambda, g)-f(\lambda, g)|<\varepsilon$. Аналитическая функция $h(z)=\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . g_0(p(k)) . \exp izp(z)$ удовлетворяет в открытом множестве $V_1=J^{-1}_{g_0}(U_1)$, содержащем z_1, неравенству

$$\sup_{V_1} |h(z)-(f\circ J_{g_0})(z)| \leq \sup_{U_1} |(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k . \widetilde{\chi}_{p(k)})(\lambda, g)-f(\lambda, g)|<\varepsilon.$$

Это означает, что функция $f\circ J_{g_0}$ равномерно аппроксимируется аналитическими функциями на V_1. Следовательно, $f_0 J_{g_0}$ аналитическая в V.

Теорема 2. *Функция*

$$f(\lambda, g)=\prod_{k=1}^{\infty} [1-R . \widetilde{\chi}_{k+1}(\lambda, g)], \quad R>1$$

принадлежит $A^l_G(\Delta_G)$ *и не продолжается ни через одну точку* $\partial\Delta_G=G\times\{1\}$

Доказательство. Для произвольного компактного множества $M\subset\Delta_G$ выполняется

$$\max_M |\widetilde{\chi}_{k+1}(\lambda,g)|=\max_M |\widetilde{\chi}_1(\lambda,g)|^{k+1}=q^{k+1}, \text{ где } q=\max_M |\widetilde{\chi}_1(\lambda, g)|.$$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\chi}_{k+1}(\lambda, g)$ равномерно сходится на компактных подмножествах Δ_G, а это будет справедливо и для данного произведения. Следовательно, функция f непрерывна в Δ_G и на компактных его подмножествах аппроксимируется равномерно-обобщенными полиномами (частичными произведениями), т. е. $f \in A^l_G(\Delta_G)$. Эта функция не равняется тождественно нулю в Δ_G, так как $f(*)=1$.

Нулями k-того множителя произведения на $J(\mathbf{C}')$ являются

$$\{(R^{-1/(k+1)}, e_{2\pi m/(k+1)})\}_{m=0, \pm1, \pm2, \ldots} \subset \Delta_G, \quad (R>1).$$

Следовательно, функция $f\circ J$, которая аналитическая в верхней полуплоскости $\mathbf{C}'$, обращается в 0 в следующие точки:

$$\{(2\pi m/(k+1), \ln R^{1/(k+1)})\}^{k=1,2,\ldots}_{m=0,\pm1,\ldots} \subset \mathbf{C}'. \tag{2}$$

Множество $\{2\pi m(k+1)\}^{k=1,\ldots}_{m=0,\ldots}$ всюду плотно на вещественной оси, и кроме того, для произвольного числа $2\pi p/q$, где p — целое и $q>1$ — целое в (2), можно найти бесконечное число точек $\{2\pi np/nq, \ln R^{1/(qn+1)}\}_{n=1}^{\infty}$, для которых $\lim [2\pi np/nq+i\ln R^{1/(qn+1)}]=2\pi p/q$.

Допустим, что f продолжается через точку $(1, g_0) \in \partial\Delta_G$, т. е. существует окрестность U_0 точки $(1, g_0)$ и функция F из класса $A^l_G(\Delta_G \cup U_0)$, такие, что $F=f$ в Δ_G. Тогда функция $F\circ J$, которая в $\mathbf{C}'$ совпадает с $f\circ J$, аналитическая в $\mathbf{C}' \cup U_0'$, где $U_0'=J^{-1}(U_0)$. Пусть δ — произвольный открытый интервал на вещественной оси, который содержится в U_0'. Согласно доказанному выше и непрерывности $F \circ J$ на δ, вытекает, что эта функция обращается в 0 на множестве, которое имеет предельную точку в $\delta \subset \mathbf{C}' \cup U_0'$. Следовательно, $F \circ J$ равняется тождественно нулю в $\mathbf{C}' \cup U_0'$, которое означает, что $f \equiv 0$ в $J(\mathbf{C}')$, и поэтому $f \equiv 0$ в Δ_G. Полученное противоречие показывает, что f нельзя продолжить ни через одну точку границы множества Δ_G.

Согласно следствию 1, внешность большого круга $\mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$ — обобщенно-рационально выпуклое множество(из $K \subset \mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$ вытекает $r(K) \subset \mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$), но не является обобщенно-полиномиально выпуклым. Действительно, рассмотрим компактное множество $G \times \{2\} \subset \mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$. Пусть $P = \Sigma a_j \widetilde{\chi}_{p(j)}$ — произвольный обобщенный полином и $(\lambda_0, g_0) \in \Delta_G(2)$. Видно, что этот полином можно представить в виде $P = a_0 + \Sigma a_j (\widetilde{\chi}_{1/k})^{m_j}$, где k и m_j — целые положительные числа. Так как $|z_0| = |\widetilde{\chi}_{1/k}(\lambda_0, g_0)| = |\lambda_0^{1/k} \cdot g_0(1/k)| = \lambda_0^{1/k} < 2^{1/k}$, то применяя принцип максимума, получаем

$$|P(\lambda_0, g_0)| = |P_{\mathbf{C}}(z_0)| \leq \max_{\Gamma} |P_{\mathbf{C}}| = \max_{G \times \{2\}} |P|,$$

$$\text{где } P_{\mathbf{C}}(z) = a_0 + \Sigma a_j z^{m_j} \text{ и } \Gamma = \{z \mid |z| = 2^{1/k}\} = \widetilde{\chi}_{1/k}(G \times \{2\}).$$

Следовательно, каждая точка из $\Delta_G(2)$ принадлежит полиномиально-выпуклой оболочке множества $G \times \{2\}$, но, с другой стороны, $\Delta_G(2) \not\subset \mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$. Однако, как показывает следующее утверждение, внешность большого круга является областью обобщенной голоморфности.

Теорема 3. *Функция*

$$h(\lambda, g) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 - R/\widetilde{\chi}_{k+1}(\lambda, g)], \quad R > 1$$

принадлежит множеству $A_G^l(\mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G)$ *и не продолжается ни через одну точку* $\partial(\mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G) = G \times \{1\}$.

Доказательство. На любом компактном подмножестве M множества $\mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$ выполняется

$$\max_M |\widetilde{\chi}_{k+1}(\lambda, g)|^{-1} = \max_M |\widetilde{\chi}_1(\lambda, g)|^{-(k+1)} = (1/\alpha)^{k+1}, \text{ где } \alpha = \min_M |\widetilde{\chi}_1(\lambda, g)| > 1.$$

Тогда h аппроксимируется равномерно на компактных подмножествах из $\mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$ обобщенно-рациональными функциями, которые непрерывны на $\mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$. Если $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ — частичные произведения, то их вид показывает, что $R_n = r_n \cdot \chi_1$ для любого n, где r_n — рациональная функция в $\mathbf{C}$, без полюсов в $\mathbf{C} \setminus \overline{\Delta}$. Пусть $(\lambda_0, g_0) \in \mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$ — произвольная точка и $z_0 = \widetilde{\chi}_1(\lambda_0, g_0) \in \mathbf{C} \setminus \overline{\Delta}$. Поскольку $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ — аналитические функции в $\mathbf{C} \setminus \overline{\Delta}$, то существует открытый круг U_0 с центром z_0, который вместе со своим замыканием содержится в $\mathbf{C} \setminus \overline{\Delta}$, и такой, что каждая из функции r_n, $n = 1, 2, \ldots$ аппроксимируется равномерно в нем полиномами переменного z. Тогда в открытом множестве $V_0 = \widetilde{\chi}^{-1}(U_0)$, содержащем (λ_0, g_0), каждая из функций $R_n, n = 1, 2, \ldots$ аппроксимируется равномерно-обобщенными полиномами.Следовательно,функция h является равномерной границей обобщенных полиномов в V_0, т. е. $h \in A_G^l(\mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G)$.

При фиксированном k равенство $1-R\setminus\widetilde{\chi}_{k+1}(\lambda, e_s)=0$ выполняется в точках $\{(R^{1/(k+1)}, e_{2\pi m/(k+1)})\}_{m=0, \pm 1, \ldots} \subset \mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$.

Как и в предыдущей теореме, на вещественной оси можно найти всюду плотное множество, каждая точка которого является предельной точкой множества функции $h \circ J$. Аналогичным способом видно, что h не продолжается обобщенно-голоморфно ни через одну точку контура множества $\mathbf{C}_G \setminus \overline{\Delta}_G$.

Отметим, что в отличие от случая $\mathbf{C}^n$, $n \geqq 2$, обобщенно-аналитические функции в общем случае не вытирают особенностей, сосредоточенных на компактах. Например, функция в теореме 3 не продолжается обобщенно-голоморфно в $\overline{\Delta}_G$.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, I. Singer. Generalized analytic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81**, 1956, 378-393.
2. Т. В. Гамелин. Равномерные алгебры. М., 1973.
3. T. V. Tonev. Some results of classical type about generalized analytic functions. *Pliska, Stud. math. bulg.*, **4**, 1981, 3-9.
4. T. V. Tonev. Algebras of generalized analytic functions. Banach Center Publ., 8.
5. С. А. Григорян. Об алгебрах, порожденных аналитическими по Аренсу — Зингеру функциями. *Доклады АН Арм. ССР*, **68**, 1979, 3.
6. Б. В. Шабат. Введение в комплексный анализ, ч. II. М., 1976.

Высший педагогический институт
Шумен Болгария

Поступила 10. 7. 1984