Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О ПОЛУГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПФАФФА

ЙОРДАН Б. ТАБОВ

В настоящей работе рассматриваются системы Пфаффа вида $\omega^1(dx)=0,\ \omega^2(dx)=0, \ldots \omega^{n-4}(dx)=0$ в $R^n (n\geqq 6)$ в инволюции по отношению к двумерным распределениям. Среди них выделяется класс систем, называемых полугиперболическими (этот класс содержит класс ранее рассмотренных гиперболических систем), и доказывается, что у таких систем имеется семейство двумерных интегральных поверхностей.

В статье [1] был выделен класс Пфаффовых систем, названных гиперболическими, и доказано, что у систем этого класса, которые находятся в инволюции по отношению к двумерным распределениям, имеется семейство интегральных поверхностей. Методы, использованные в упомянутой статье, позволяют после соответствующих уточнений расширить круг Пфаффовых систем, для которых имеют место прежние результаты.

1. Основные определения. Всякая система Пфаффа

$$\omega^i(dx)=0, \quad i=1, 2, \ldots, r \tag{1.1}$$

ранга r в R^n задает $n-r$-мерное распределение $\theta=\theta(x)$, т. е. $n-r$-мерную плоскость $\theta(x)$ в каждой точке x.

Повторим введенное в работе [2] определение разрешающего распределения:

Определение. *Распределение $\theta'(x)$ называется разрешающим для системы (1.1), если $\theta'(x)$ инволютивно и в каждой точке x выполняется соотношение $\theta'(x)\subset\theta(x)$.*

Имея в виду теорему Фробениуса, можно отметить непосредственную связь разрешающих распределений с семействами интегральных поверхностей. Несколько подробней эта связь обсуждается в работе [1].

Напомним (см., например, [3]), что характеристической системой системы (1.1) называется следующая система:

$$\omega^i(\xi)=0, \quad \partial\omega^i(\xi_j, \xi)=0, \quad i=1, 2,\ldots, r; j=1, 2, \ldots, n-r,$$

где ξ — неизвестное векторное поле, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ — произвольный набор векторных полей, образующих базис подпространства $\theta(x)$ в каждой точке x.

Характеристическим вектором системы (1.1) в точке x называется всякий вектор ξ, удовлетворяющий взятой в точке x характеристической системе системы (1.1).

Мы будем предполагать в дальнейшем, что рассматриваемые нами системы не имеют ненулевых характеристических векторов ни в одной точке своей области определения.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 12, 1986, с. 3—6

Основным объектом наших рассмотрений является следующая система Пфаффа (частный случай системы (1.1) при $r=n-4$):

$$\omega^1(dx)=0, \quad \omega^2(dx)=0, \ldots, \omega^{n-4}(dx)=0 \tag{1.2}$$

из $n-4$ независимых уравнений с дважды непрерывно дифференцируемыми коэффициентами, заданная в некоторой области $D\subset R^n$ $(n\geqq 6)$. Ей соответствует 4-мерное дважды непрерывно дифференцируемое распределение $\theta(x)$, которое является линейной оболочкой всех векторных полей, удовлетворяющих системе (1. 2).

В дальнейшем мы не будем особо оговаривать дифференцируемость рассматриваемых объектов, предполагая, что они обладают достаточным количеством производных.

Скажем, что система (1.2) находится в инволюции по отношению к двумерным распределениям, или короче, — что система (1.2) обладает свойством И2, если для любого поля $\xi(x)\in\theta(x)$ ранг системы

$$\omega^i(\eta)=0, \quad \partial\omega^i(\xi, \eta)=0, \quad i=1, 2, \ldots, n-4$$

(η — неизвестное векторное поле) — не меньше 2.

Если система (1. 2) с **аналитическими** коэффициентами обладает свойством И2, из теории Э. Картана вытекает (см., например, [3, гл. XI]), что у нее в окрестности данной точки x_0 имеется двумерное разрешающее распределение. По аналогии с теорией Картана и с целью получить аналогичный результат мы будем предполагать, что система (1.2) обладает свойством И2 в D. Наши рассуждения и результаты отличаются от результатов Картана тем, что в них **не требуется аналитичности** коэффициентов системы.

Зафиксируем произвольную точку $y\in D$ и рассмотрим билинейную кососимметрическую форму $\partial\omega^1(y;\, *,*)$. Через $\Omega_1(y)$ будем обозначать линейный кососимметрический оператор в подпространстве $\theta(y)$, соответствующий сужению $\partial\omega^1(y;\, *,*)$ на подпространство $\theta(y)$. Этот оператор определяется однозначно соотношением

$$(\Omega_1(y)\xi, \eta)=\partial\omega^1(y;\, \xi, \eta)$$

для любых $\xi\in\theta(y)$, $\eta\in\theta(y)$. При этом считаем, что скалярное произведение в подпространстве $\theta(y)$ индуцируется скалярным произведением пространства R^n, порожденным исходной системой координат, чьи единичные координатные векторы принимаем за ортонормированный базис.

Аналогично получаются и операторы $\Omega_i(y)$, $i=2, 3, \ldots, n-4$.

Пусть a — вектор $n-4$-мерного арифметического пространства A^{n-4}, с координатами $a^1, a^2, \ldots, a^{n-4}$. Рассмотрим оператор

$$\Omega_a(y)=\sum_{i=1}^{n-4} a^i\Omega_i(y).$$

Всюду в дальнейшем через $E_a(y)$ будем обозначать ядро оператора $\Omega_a(y)$.,

Определение. *Скажем, что вектор $a\in A^{n-4}$ является правильным для системы* (1.2) *в точке y, если* $\det\Omega_a(y)=0$.

Определение. *Скажем, что пара векторов $a, b\in A^{n-4}$ является правильной парой для системы* (1.2) *в точке y, если* $\dim E_a(y)=\dim E_b(y)=2$, $E_a(y)\cap E_b(y)=\{0\}$.

Определение. *Скажем, что система* (1.2) *является полугиперболической в области* D, *если существуют гладкие векторные функции* $a(x) \in A^{n-4}$, $b(x) \in A^{n-4}$, *такие, что в каждой точке* $x \in D$ *пара векторов* $a(x)$, $b(x)$ *является правильной для системы* (1.2).

Для сравнения напомним, что согласно определению, данному в работе [1], система (1.2) называется гиперболической в точке $y \in D$, если у нее в точке y есть $n-4$ линейно-независимых правильных векторов.

Из двух доказанных в работе [1] лемм: леммы 3.4. и леммы 5.1. следует, что если система (1.2) не имеет в D особых точек (здесь не будем приводить определение особой точки) и является гиперболической в некоторой точке $x_0 \in D$, то та же система является полугиперболической в некоторой окрестности точки x_0. Для случая $n=6$ понятия гиперболической и полугиперболической системы совпадают.

2. Приведение полугиперболической системы к каноническому виду. По определению, для полугиперболической системы (1.2) существует правильная пара переменных векторов $a(x)$, $b(x)$. Очевидно, эти два вектора должны быть линейно-независимыми в каждой точке. Пусть x_0 — произвольная фиксированная точка области D. Без ограничения общности можно считать, что

$$\det \begin{Vmatrix} a^1(x_0) & a^2(x_0) \\ b^1(x_0) & b^2(x_0) \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Тогда в силу непрерывности $a(x)$ и $b(x)$ аналогичное неравенство будет иметь место и в точках некоторой окрестности x_0:

$$\det \begin{Vmatrix} a^1(x) & a^2(x) \\ b^1(x) & b^2(x) \end{Vmatrix} \neq 0. \tag{2.1}$$

Рассмотрим формы

$$\bar{\omega}^1 = \sum_{i=1}^{n-4} a^i(x)\, \omega^i,$$

$$\bar{\omega}^2 = \sum_{i=1}^{n-4} b^i(x)\, \omega^i.$$

Из условия (2.1) вытекает, что система Пфаффа

$$\bar{\omega}^1(dx)=0,\ \bar{\omega}^2(dx)=0, \ldots \quad \omega^j(dx)=0, \quad j=3,\ 4, \ldots, n-4 \tag{2.2}$$

имеет тот же ранг, что и система (1.2), более того — системы (1.2) и (2.2) являются эквивалентными. Следовательно, система (2.2) сохраняет свойства системы (1.2), связанных с инволютивностью. Но она обладает дополнительным, существенным для нас свойством, а именно: так как

$$\partial\bar{\omega}^1(\xi,\ \eta) = \sum_{i=1}^{n-4} a^i \partial\omega^i(\xi,\ \eta),$$

$$\partial\bar{\omega}^2(\xi,\ \eta) = \sum_{i=1}^{n-4} b^i \partial\omega^i(\xi,\ \eta)$$

для любых ξ, $\eta \in \theta(x)$, то соответствующие операторы $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ совпадают соответственно с операторами $\Sigma_{i=1}^{n-4} a^i\Omega_i$ и $\Sigma_{i=1}^{n-4} b^i\Omega_i$, и значит их ранги равняются 2, а их ядра $\overline{E}_1(x)$ и $\overline{E}_2(x)$ совпадают с $E_a(x)$ и $E_b(x)$, так что $\dim \overline{E}_1(x) = \dim \overline{E}_2(x) = 2$, $\overline{E}_1(x) \cap \overline{E}_2(x) = \{0\}$.

Таким образом полугиперболическая система (1.2) приводится в окрестности любой точки к каноническому виду (2.2) с указанными свойствами первых двух форм системы.

3. Существование разрешающего распределения размерности 2 для полугиперболической системы Пфаффа. Опять рассматриваем систему Пфаффа (1.2), предполагая, что она является полугиперболической в окрестности U точки x_0. Без ограничения общности можно считать, что эта система уже приведена к каноническому виду, т. е. что ядра $E_1(x)$ и $E_2(x)$ операторов и $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$ двумерны и $E_1(x) \cap E_2(x) = \{0\}$.

Теорема. *Если система* (1.2) *обладает свойством И2 в окрестности U точки x_0 и является полугиперболической в U, то в некоторой окрестности точки x_0 система* (1.2) *имеет разрешающее распределение размерности 2.*

Доказательство этой теоремы повторяет проведенное в § 6 статьи [1] доказательство аналогичной теоремы для гиперболических систем, так как выясненные нами свойства канонического вида полугиперболической системы совпадают с теми свойствами гиперболической системы, которые были использованы в доказательстве упомянутой теоремы.

Отметим, что в формулировке теоремы для гиперболических систем требуется гиперболичность системы в точке, тогда как в теореме для полугиперболических систем существенным условием является полугиперболичность системы в окрестности точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Й. Б. Табов. О гиперболических системах Пфаффа. *Плиска*, 3, 1981, 28—46.
2. Й. Б. Табов. О существовании разрешающих распределений размерности $n-r-1$ не вполне интегрируемой системы Пфаффа ранга r в R^n. *Успехи мат. наук*, 29, 1974, 4, 183—184.
3. П. К. Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М., 1947.

Единый центр математики и механики
1090 София П.Я. 373

Поступила 16. 3. 1983