Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ОЦЕНКИ НОСИТЕЛЕЙ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

МАРИН Л МАРИНОВ, ЦВЯТКО В. РАНГЕЛОВ

В работе изучаются качественные свойства решений одного класса вырождающихся нелинейных параболических уравнений в ограниченной области R^{n+1}, $n\geq 1$. Доказан принцип сравнения и получена оценка носителя решения, если правые части и начальные данные имеют компактный носитель.

Рассматриваемые эффекты — типично нелинейные, и проявляются в ряде реальных физических процессов, таких, как нестационарная фильтрация, теория теплопроводности сверхнагретых тел и др. Для изучения этих процессов исследуются решения смешанной задачи для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(u)\right)=f(t, x),$$

где функции $\psi(s)$ и $\varphi(s)$ — монотонные, $\psi(0)=\varphi(0)=0$, и стремятся к $\pm\infty$ при $s\to\pm\infty$.

В зависимости от дополнительных свойств, которые накладываются на $\psi(s)$ и $\varphi(s)$, исследования велись многими авторами. Для случая, когда $\psi'(s)=\mathrm{const}>0$ и $\varphi(s)=|s|^{q-2}.s$, $q>2$ в [1, 2, 3], если $\psi(s)=|s|^{p-2}.s$, $p>2$ и $\varphi'(s)=\mathrm{const}>0$ в [1, 4, 5, 6]. Для случая двойной нелинейности компактность носителя решения установлена в [7, 9] при $n=1$ и в [8, 10, 11] при $n>1$. В настоящей работе получена оценка носителя решения в зависимости от t, а также наличие лагуны, при этом результаты не зависят от размерности, а для $\psi(s)$ и $\varphi(s)$ предполагаем, что они удовлетворяют степенным оценкам. Эти результаты были частично анонсированы в [6] и подтверждают полученные недавно результаты в [10], где другими методами — локально-энергетическими, применяемыми для такой задачи в [8], исследована компактность носителя решения для более общих ψ, зависящих от x и t, и для φ степенных и без правых частей. В [11] для двойной степенной нелинейности переносятся результаты из [9] на многомерный случай, а также обобщаются результаты о конечной скорости распространения для неизотропного случая.

Изложение построено по следующему плану. В п. 1 вводятся обозначения, формулируются основные результаты и доказывается принцип сравнения. В п. 2 доказывается теорема 1, которая дает оценку в зависимости от t для носителя решения. В п. 3 доказывается теорема о наличии лагуны.

1. Формулировка основных результатов. Лемма о сравнении. Пусть $\Omega\subset R^n$ — ограниченная область с гладкой границей.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 12, 1986, с. 30—37

Введем следующие обозначения:

$$Q_\tau=\{(t,x):\ 0<t<\tau,\ x\in\Omega\},\ S_\tau=\{(t,x):\ 0<t<\tau,\ x\in\partial\Omega\};$$

$$\Omega_\rho=\{x:\ x\in\Omega,\ |x|\leqq\rho\},\quad Q_{\tau,\rho}=\{(t,x),\ 0<t<\tau,\ x\in\Omega_\rho\};$$

$$\Omega^\rho=\Omega\setminus\Omega_\rho,\quad Q_\tau^\rho=(\Omega\setminus\Omega_\rho)\times(0,\tau).$$

Рассматривается следующая задача:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\psi\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_j}\varphi(u)\Big)+f(t,x) & \text{в } Q_T;\\ u(0,x)=u_0(x) & \text{для } x\in\Omega;\\ u(t,x)=g(t,x) & \text{для } (t,x)\in S_T.\end{cases}$$

Для функций ψ и φ предполагаем, что выполнено следующее условие

$$(H_1)\qquad \begin{cases} \psi(-s)=-\psi(s),\quad \varphi(-s)=-\varphi(s)\\ \varphi\in C(R)\cap C^1(R\setminus\{0\}) \text{ и существуют константы } b_1,\ b_2,\\ \quad\text{такие, что } b_1|s|^{p-2}\leqq\psi'(s)\leqq b_2|s|^{p-2},\quad p>1\\ \varphi\in C(R)\cap C^1(R\setminus\{0\}) \text{ и существуют константы } B_1>B_2,\\ \quad\text{такие, что } B_1(s)^{q-2}\leqq\varphi'(s)\leqq B_2|s|^{q-2},\quad q>1,\\ \quad\text{где } (p-1)(q-1)>1.\end{cases}$$

Во всех известных результатах, когда получена оценка носителя решения, функции ψ и φ в сущности удовлетворяют (H_1), как, например, в [4, 6, 8, 9, 11].

Для правых частей и начальных условий задачи (1) предполагаем, что выполнено

$$(H_2)\qquad \begin{cases} u_0(x)\in L^\infty(\Omega), & u_0(x)\geqq 0;\\ f(t,x)\in L^\infty(Q_T), & f(t,x)\geqq 0;\\ g(t,x)\in L^\infty(S_T), & g(t,x)\geqq 0.\end{cases}$$

Используем следующее определение решения [13, 15].

Функция $u(t,x)$ называется решением задачи (1) в Q_T, если $u\in W^{1,\delta}(Q_T)$ для некоторого $\delta>1$ удовлетворяет граничному условию, начальному условию и такая, что

(i) существуют обобщенные производные $\dfrac{\partial\varphi(u)}{\partial x_j}\in L^p(Q_T)$, $j=1\ldots n$,

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t}\in L^{p'}(0,T;\ W^{-1,p'}(\Omega))$ и уравнение в (1) выполнено в смысле элементов из $L^{p'}(0,T;\ W^{-1,p'}(\Omega))$, $p'=\dfrac{p}{p-1}$.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть для задачи* (1) *выполнены предположения* (H_1) и (H_2) *и пусть*

$$(H_3)\qquad \operatorname{supp} u_0(x)\cup\Big(\bigcup_{t\in(0,T)}\operatorname{supp} f(t,\cdot)\Big)\cup\Big(\bigcup_{t\in(0,T)}\operatorname{supp} g(t,\cdot)\Big)\subset\Omega_\rho,\ \rho=\text{const}>0.$$

Тогда, если $u(t,x)$ — *решение задачи* (1), *то существует константа* $\gamma_1>0$, *такая, что*

(2) $$\operatorname{supp} u(t,\cdot)\subset\{x\in\Omega:\ |x|\leq\rho+\gamma_1 t^{\beta}\},$$

где $\beta=\frac{1}{p}$, *а если* $u_0\equiv 0$, $g\equiv 0$, *то* $\beta=\max\left(\frac{(p-1)(q-1)-1}{(p-1)(q-1)+1},\ \frac{1}{p}\right)$ *при малых* t.

Теорема 2. *Пусть для задачи* (1) *выполнены предположения* (H_1) *и* (H_2) *и существует такая константа* $r>0$, *что*

(H_4) $$\operatorname{supp} u_0(x)\cup\Big(\bigcup_{t\in(0,T)}\operatorname{supp} f(t,\cdot)\Big)\cup\Big(\bigcup_{t\in(0,T)}\operatorname{supp} g(t,\cdot)\Big)\cap\Omega_r=\emptyset.$$

Тогда, если $u(t,x)$ — *решение задачи* (1), *то для любого* $\alpha\in(0,1)$ *существует* $\tau_1>0$, *такое, что*

(3) $$\operatorname{supp} u(t,\cdot)\cap\{x\in\Omega:\ |x|\leq\alpha r-\frac{\alpha r}{\tau_1}t\}=\emptyset$$

при $t\in(0,\tau_1)$.

Первая теорема утверждает, что для любого $x_0\in\Omega\setminus\operatorname{supp} u_0$ можно подобрать такое τ_0, что $u(x_0,t)=0$ при $t\in(0,\tau_0)$, а вторая теорема показывает, что для любого $x_1\in\Omega_r$ можно найти такое $\alpha\in(0,1)$ и потом τ_1, так что $u(x,t)=0$ при $t\in(0,\tau_1)$. Как показано в [8] при $n=1$ и в [11] при $n>1$, можно подобрать такие p и q и начальную функцию $u_0(x)$, так что если точка y_0 граничная для $\operatorname{supp} u_0$, то $u(t,y_0)\neq 0$ при любом $t\in(0,\tau_0)$. Это означает, что оценки носителей (2) и (3) точны.

Замечания:

1. Степенные ограничения для функций ψ и φ могут быть сняты, но тогда основную роль при доказательстве теорем имеет условие, сформулированное в [12], т. е. сходимость интеграла ($\int_0^k\psi(a\Phi(s))^{-1}ds$, $a>0$, где Ψ и Φ — обратные функции к функциям ψ и φ.

2. Теоремы 1 и 2 имеют место и доказываются аналогичным образом и для более широкого класса решений, называемые в [9, 13] граничными для сильных.

3. Вопросы о существовании и единственности решений для задачи в зависимости от ψ, φ, n исследованы, в частности в [4, 7, 15].

При доказательстве теорем основное место имеет следующий принцип сравнения:

Лемма 1. *Пусть* $u_1(t,x)$ *и* $u_2(t,x)$ — *решения задачи* (1) *соответственно с данными* $u_{10}(x)$, $f_1(t,x)$, $g_1(t,x)$; $u_{20}(x)$, $f_2(t,x)$, $g_2(t,x)$, *где* $u_{j0}\in L^1(\Omega)$, $f_i\in L^1(Q_T)$, $g_j\in L^1(S_T)$, $j=1,2$, *тогда, если* $u_{10}\leq u_{20}$ *п.в. в* Ω, $f_1\leq f_2$ *п.в. в* Q_T, $g_1\leq g_2$ *п. в. в* S_T, *то* $u_1(t,x)\leq u_2(t,x)$ *п.в. в* Q_T.

Доказательство: Следуя [8, 13], определим функцию

$$\chi_\varepsilon(t,x)=q_\varepsilon(\varphi(u_1)-\varphi(u_2)),$$

где $\varepsilon>0$ и

$$q_\varepsilon(\lambda)=\begin{cases}0 & \text{при } \lambda\leq 0;\\ \frac{\lambda}{\varepsilon} & \text{при } 0<\lambda\leq\varepsilon;\\ 1 & \text{при } \lambda>\varepsilon.\end{cases}$$

Легко проверяется, что $\chi_\varepsilon\in L^\infty(Q_T)$, $\chi_\varepsilon(t,x)=0$ при $(t,x)\in S_T\cup\Omega$ и

$$\chi_{\varepsilon,x_j}=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varphi(u_1)}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi(u_2)}{\partial x_j}\right) & \text{при } 0<\varphi(u_1)-\varphi(u_2)\leq\varepsilon;\\ 0 & \text{при остальных } (t,x)\in Q_T.\end{cases}$$

Следовательно $\chi_\varepsilon(t, x) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, и для любого $\tau \in (0, T]$ выполнено

$$\iint\limits_{Q_\tau} \frac{\partial(u_1-u_2)}{\partial t} \chi_\varepsilon dxdt + \iint\limits_{Q_\tau} \sum_{j=1}^{n} (\psi(\frac{\partial\varphi(u_1)}{\partial x_j}) - \psi(\frac{\partial\varphi(u_2)}{\partial x_j}))\chi_\varepsilon dxdt$$

$= \iint\limits_{Q_\tau} (f_1-f_2)\chi dxdt$. Из монотонности $\psi(s)$ получаем

$$(\psi \frac{\partial\varphi(u)}{\partial x_j}) - \psi(\frac{\partial\varphi(u)}{\partial x_j}))\chi_{\varepsilon, x_j} \geqq 0,$$

кроме того, по условию $f_1 - f_2 \leqq 0$ п.в. в Q_T, а $\chi_\varepsilon \geqq 0$, следовательно $\iint\limits_{Q_\tau} \frac{\partial}{\partial t}(u_1-u_2)\chi_\varepsilon dxdt \leqq 0$. По теореме Лебега получаем при $\varepsilon \to 0$

$$\iint\limits_{Q_\tau} \theta(\varphi(u_1)-\varphi(u_2)) \frac{\partial}{\partial t}(u_1-u_2)dxdt \leqq 0, \tag{4}$$

где $\theta(s) = \begin{cases} 0 & s<0 \\ 1 & s>0 \end{cases}$.

Из монотонности $\varphi(s)$ следует, что $\theta(\varphi(u_1)-\varphi(u_2)) = \theta(u_1-u_2)$. Рассмотрим функцию

$$[\lambda]_+ = \begin{cases} \lambda & \text{при } \lambda \geqq 0; \\ 0 & \text{при } \lambda < 0. \end{cases}$$

$\frac{d[\lambda]_+}{d\lambda} = \theta(\lambda)$, и получаем из (4)

Тогда $0 \geqq \iint\limits_{Q_\tau} \theta(u_1-u_2) \frac{\partial}{\partial t}(u_1-u_2)dxdt = \iint\limits_{Q_\tau} \frac{d[\lambda]_+}{d\lambda}\Big|_{\lambda=u_1-u_2} \frac{\partial}{\partial t}(u_1-u_2)dxdt$

$$= \int\limits_\Omega \int\limits_0^\tau \frac{\partial[u_1-u_2]_+}{\partial t} dxdt = \int\limits_\Omega \{[u_1(T, x)-u_2(T, x)]_+ - [u_1(0, x)-u_2(0, x)]_+\}dx. \tag{5}$$

По условию леммы и (5) следует $[u_1(0, x)-u_2(0, x)]_+ = 0$ п.в. в Ω и $0 \leq \int\limits_\Omega [u_1(\tau, x)-u_2(\tau, x)]_+ dx \leqq 0$ для любого $\tau \in (0, T)$. Тогда $u_1(\tau, x) \leqq u_2(\tau, x)$ п. в. в Q_T. Лемма 1 доказана.

Обозначим Ψ как функцию, обратную к функции ψ, а Φ — обратную к φ. Из (H_1) следует, что $\Psi(0) = \Phi(0) = 0$, Ψ и Φ — монотонно растущие, $\Psi(k) \to +\infty$ при $k \to +\infty$, и $\Phi(k) \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $\Psi \in C(R) \cap C^1(R \setminus 0)$, $\Phi \in C(R) \cap C^1(R \setminus 0)$. Рассмотрим функцию $\varkappa(k) = \int\limits_0^k \frac{ds}{\Psi(a\Phi(s))}$, где $a = \text{const} > 0$, тогда $\varkappa(0) = 0$, $\varkappa \in C(R) \cap C^1(R \setminus 0)$. Пусть ω — обратная функция к $\varkappa$, ω, непрерывно дифференцируема на $[0, +\infty]$, $\omega(0) = \omega'(0) = 0$, при $\xi > 0$ выполняется

$$\begin{aligned} &\omega'(\xi) = \Psi(a\Phi(\omega(\xi))); \\ &\omega''(\xi) = \Psi'(a\Phi(\omega(\xi))).\ a.\ \Phi'(\omega(\xi)).\ \omega'(\xi). \end{aligned} \tag{6}$$

По (H_1) функции $\Psi, \Phi, \varkappa, \omega$ удовлетворяют соответственным степенным оценкам.

2. Доказательство теоремы 1. В области Q_T^ρ определим функцию

$$\tilde{u}(t, x) = \begin{cases} \Phi(\omega(\xi)), & \xi > 0; \\ 0 & \xi \leqq 0, \end{cases} \tag{7}$$

где $\xi(t, x) = c_1 t - c_2 |x| + c_3 A$, $c_1, c_2, c_3 > 0$, $A > 0$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Существуют функции $\tilde{u}_0, \tilde{f}, \tilde{g}$, удовлетворяющие требованиям леммы 1, и такие, что $\tilde{u}$ является решением задачи* (1) *в области Q_T^ρ. Если $a > 0$ достаточно мало, то $\tilde{f} \geqq 0$ в этой области.*

Доказательство. Так как при $\xi > 0$ выполнено

$$\left| \frac{\partial \varphi(\tilde{u})}{\partial x_j} \right| \leqq \text{const} \, |\xi|^\alpha, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $\alpha = \frac{1-(p-1)(q-2)}{(p-1)(q-1)}$, то $\frac{\partial \varphi(\tilde{u})}{\partial x_j} \in L^p(Q_T^\rho)$, потому что $\alpha + 1 > 0$ по (H_1), кроме того $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, \in L^{p'}(Q_T^\rho)$. Функции $\tilde{u}_0 = \tilde{u}(0, x)$ и $\tilde{g} = \tilde{u}\,|_{S_T^\rho}$ непрерывны в Ω^ρ и S_T^ρ.

За $\tilde{f}(t, x)$ получаем

$$\tilde{f} = \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi\left(\frac{\partial \varphi(\tilde{u})}{\partial x_j}\right), & \xi > 0; \\ 0 & , \ \xi \leqq 0 \end{cases}$$

и тогда $\tilde{f} \in L^1(Q_T^\rho)$ по (H_1). При $\xi > 0$, используя (6) за f, получаем

$$\tilde{f}(t, x) = \Phi'(\omega(\xi)) \,.\, \omega'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{\psi'\left(\omega'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x_j}\right)}{\psi'(\omega'(\xi))} \,.\, a\Phi'(\omega(\xi)) .\, \omega'(\xi) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_j}\right)^2 + \psi'\left(\omega'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x_j}\right) .\, \omega'(\xi) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_j} \right\}.$$

Так как $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_j^2} = -c_2 \left(\frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^3}\right) < 0$ и $\Phi(\omega(\xi)) > 0$, $\omega'(\xi) > 0$, $\psi'\left(\omega'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x_j}\right) \geqq 0$ п. в., то $\tilde{f}(t, x) \geqq \tilde{f}_1(t, x)$, где

$$\tilde{f}_1(t, x) = \Phi'(\omega(\xi)) \,.\, \omega'(\xi) \left[c_1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{\psi'\left(\omega'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x_j}\right)}{\psi'(\omega'(\xi))} a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_j}\right)^2\right].$$

От свойств ψ и ω получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\psi'\left(\omega'(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x_j}\right)}{\psi'(\omega'(\xi))} \cdot a \,.\, c_2^2 \frac{x_j^2}{|x|^2} \leqq n \,.\, \frac{B_2}{B_1} \cdot c_2^p \frac{x_j^p}{|x|^p} \cdot a$$

и тогда $\tilde{f}_1(t, x) \geqq \Phi'(\omega(\xi)) \,.\, \omega'(\xi) c_1 \left[1 - n \,.\, a \,.\, \frac{B_2}{B_1} \frac{c_2^p}{c_1}\right]$. Если выберем $0 < a < \frac{B_1}{B_2} \frac{c_1}{c_2^p, n}$, то получим $\tilde{f} \geqq \tilde{f}_1 \geqq 0$ п.в. в Q_T^ρ. Лемма 2 доказана.

Для доказательства теоремы 1 сравним сначала $u_1 \equiv 0$ и u при помощи леммы 1, используя (H_2), получаем, что $u(t, x) \geqq 0$ п.в. в Q_T. Определим

$$l_\tau = \tau \|f\|_{L^\infty(Q_T)} + \max(\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(S_T)}). \tag{8}$$

Предполагаем, что $l_\tau \neq 0$, так как иначе $u \equiv 0$ в Q_τ.

Пусть $\alpha(\tau)$ — монотонная функция, такая, что $\alpha(\tau) > 0$ и $\lim\limits_{\tau\to 0} \alpha(\tau) = 0$.

Для произвольного фиксированного τ_0 из интервала $(0, T)$ определим

$$a_0 = \frac{B_1 \cdot b_1}{2B_2 n(p-1)}, \quad c_0 = \frac{\varkappa(\varphi(l_{\tau_0}))}{\alpha(\tau_0)}, \quad A_0 = \alpha(\tau_0) + \rho. \tag{9}$$

Через $\tilde{u}(t, x; \tau_0)$ обозначим фунцию, определенную в (7), где $c_1 = c_0\psi(c_0)$, $c_2 = c_0$, $c_3 = c_0$, $A = A_0$.

Покажем, что можно сравнить $\tilde{u}(t, x; \tau_0)$ и $u(t, x)$ в $Q^\rho_{\tau_0}$ при помощи леммы 1. По условию $f = 0$ в $Q^\rho_{\tau_0}$, а по выбору a_0 там $\tilde{f} \geqq 0$. Для начальных условий выполнено

$$\tilde{u}(0, x; \tau_0) = \begin{cases} \Phi(\omega(-c_0|x| + c_0 A_0)) & , |x| < A_0; \\ 0 & , |x| \geqq A_0, \end{cases}$$

и, следовательно, $\tilde{u}(0, x; \tau_0) \geqq 0 = u_0(x)$ п.в. в Ω^ρ. Пусть точка $(t, x) \in S^\rho_{\tau_0}$, тогда, если $|x| = \rho$, то

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x; \tau_0) &= \Phi(\omega(c_0\psi(c_0)t - c_0\rho + c_0 A_0)) \geqq \Phi(\omega(c_0(A_0 - \rho))) \\ &= \Phi(\omega(\varkappa(\varphi(l_{\tau_0})))) = l_{\tau_0} \geqq l_t \geqq u(t, x). \end{aligned}$$

Если $(t, x) \in S_{\tau_0} \cap \{|x| > \rho\}$, то по условию там $g(t, x) = 0$, а $\tilde{u}(t, x; \tau_0) \geqq 0$. Тогда $0 \leqq u(t, x) \leqq \tilde{u}(t, x; \tau_0)$ в $Q^\rho_{\tau_0}$. Отсюда следует, что $u(t, x) = 0$ для любых (t, x), для которых $\tilde{u}(t, x; \tau_0) = 0$. В частности

$$\operatorname{supp} u(\tau_0, \cdot\,); \subset \{(\tau_0, x);\ |x| \leqq A_0 + \psi(c_0)\tau_0\},$$

или, используя (9), получаем

$$\operatorname{supp} u(t, \cdot\,) \subset \{x \in \Omega;\ |x| \leqq \rho + \alpha(t) + \psi(\frac{\varkappa(\varphi(l_t))}{\alpha(t)} t)\}.$$

Из свойств функций ψ и φ следует, что, если $\alpha(t) = t^{1/p}$, то существует константа γ_1, такая, что

$$\alpha(t) + \psi(\frac{\varkappa(\varphi(l_t))}{\alpha(t)})\, t \leqq \gamma_1 t^{1/p}.$$

Если $u_0(x) \equiv 0$, то существует константа γ, такая, что если $\alpha(t) = t^{\frac{(p-1)(q-1)-1}{(p-1)(q-1)+1}}$, то $\alpha(t) + \psi(\frac{\varkappa(\varphi(l_t))}{\alpha(t)}) t \leqq \gamma t^{\frac{(p-1)(q-1)-1}{(p-1)(q-1)+1}}$. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 1, определим в области Q_{τ_1} функцию

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} \Phi(\omega(\eta)), & , \eta > 0; \\ 0 & , \eta \leqq 0, \end{cases}$$

где $\eta = c_1 t + c_2(x) - c_3 r$, $c_1, c_2, c_3 > 0$, $\tau \in (0, \frac{c_3}{c_1} r)$ фиксирован.

Следующая лемма доказывается подобным образом, как и лемма 2.

Лемма 3. *Существуют функции* $\overline{u}_0, \overline{f}, \overline{g}$, *удовлетворяющие требованиям леммы 1, и такие, что* $\overline{u}(t, x)$ *является решением задачи* (1) *в области* Q_{τ_1}. *Если* a *достаточно мало, то* $\overline{f} \geqq 0$ *в* $Q_{\tau_1, r}$.

Доказательство: При $\eta > 0$ выполнено $\frac{\partial \Phi(\omega(\eta))}{\partial t} \leqq \mathrm{const}\, |\eta|^\alpha$, где $\alpha = \frac{1-(p-1)(q-2)}{(p+1)(q-1)-1}$, и тогда, так как по условию (H_1) $(\alpha+1) = \frac{p-1}{(p-1)(q-1)-1} > 0$, то $\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} \in L^1(Q_{\tau_1})$. От свойств ω получаем, что $\frac{\partial \varphi(\overline{u})}{\partial x_j} \in L^p(Q_{\tau_1})$, $j = 1, \ldots, n$. Заметим, что функции $\overline{u}_0 = \overline{u}(0, x)$ и $\overline{g} = \overline{u}(t, x)|_{S_{\tau_1, r}}$ непрерывны в $\overline{\Omega}_r$ и $\overline{S}_{\tau_1, r}$. Для функции $\overline{f}(t, x)$, используя (6), получаем

$$\overline{f}(t, x) = \begin{cases} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} - (c_1 A_1 + c_2 A_2) \Phi'(\omega'(\eta)) . \omega'(\eta), & \eta > 0 ; \\ 0 & , \ \eta \leqq 0, \end{cases}$$

где

$$A_1(t, x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{c_1} \frac{\psi'(\omega'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x_j})}{\psi'(\omega'(\eta))} \cdot a . \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_j}\right)^2 ;$$

$$A_2(t, x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\psi'(\omega'(\eta) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x_j})}{\Phi'(\omega'(\eta))} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j^2} \cdot \frac{1}{c_1} .$$

Так как $\tau_1 < \frac{c_3}{c_1} r$, то $c_3 r - c_1 t > 0$ при $t \in (0, \tau_1)$, а в области $\eta > 0$ выполнено $c_1 |x| > c_3 r - c_1 t > 0$. Тогда $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j^2} = c_2 \frac{|x|^2 - x_j^2}{|x|^2} \leqq c_2 \frac{1}{|x|}$, и, используя свойства и оценки для функции ψ, φ, ω и то, что в области $Q_{\tau_1, r}$ выполнено $\frac{\eta}{c_2 |x|} < 1$, получаем

$$A_1 \leqq A_{10} \cdot \frac{c_2^p}{c_1} a . n, \quad A_2 \leqq A_{20} \frac{c_2^p}{c_1} a . n,$$

где A_{10} и A_{20} — константы, зависящие только от b_1, b_2, B_1, B_2, p, q. Тогда

$$\overline{f} \geqq \Phi'(\omega(\eta)). \ \omega'(\eta) c_1 \left(1 - a \cdot \frac{c_2^p}{c_1} n (A_{10} + A_{20})\right),$$

и, если выберем $a < \frac{c_1}{c_2^p \cdot n (A_{10} + A_{20})}$, то $\overline{f} \geqq 0$ в $Q_{\tau_1, r}$. Лемма 3 доказана.

Используя условие (H_2) по лемме 1, получаем $u(t, x) \geqq 0$, а предполагая, что $l_\tau \neq 0$, то $l_t \geqq u(t, x)$ в Q_{τ_1}.

Фиксируем произвольное $\alpha \in (0, 1)$ и выбираем

$$a = \frac{b_1}{2(p-1) n (A_{10} + A_{20})}, \quad c = \frac{1}{r(1-\alpha)} \varkappa(\varphi(l_T))$$

и $c_1 = c\psi(c)$, $c_2 = c$, $c_3 = \alpha c$. Пусть $\tau_1 < \frac{\alpha r}{\varphi(c)}$. Тогда по лемме 3 выполнено $\overline{f}(t, x) \geqq 0$ в $Q_{\tau_1, r}$. Сравним функции $u(t, x)$ и $\overline{u}(t, x; \tau_1)$ в области $Q_{\tau_1, r}$. По выбору a там $\overline{f} \geqq 0$. Для начальных условий получаем

$$\bar{u}(0, x)=\begin{cases}\Phi(\omega(c\,|\,x\,|-\alpha c(t)), & \eta>0\,;\\ 0 & , \quad \eta\leqq 0\end{cases}$$

и, следовательно, $\bar{u}(0, x)\geqq 0=u(0, x)$ при $x\in\Omega_r$. Рассмотрим $S_{\tau_1, r}=S_1\cup S_2$, где для точек S_1 выполнено $|\,x\,|=r$, а $S_2\subset S_T$. Тогда при $(t, x)\in S_1$, $\eta=c\psi(c)t+c(r-\alpha r)>0$ и

$$\bar{u}(t, x)|_{S_1}=\Phi(\omega(\eta))\geqq\Phi(\omega(cr(1-\alpha))=\Phi(\omega(\varkappa(\varphi(l_T))))=l_T\geqq l_t\geqq u(t, x).$$

Если $(t, x)\in S_2$, то $\bar{g}\,|_{S_2}\geqq 0$, а по условию $u\,|_{S_2}=0$. Тогда, применяя лемму 1, получаем $0\leqq u(t, x)\leqq\bar{u}(t, x)$ в $Q_{\tau_1, r}$. Так как $\bar{u}(t, x)=0$ при $\eta\leqq 0$, то

$$\operatorname{supp} u(t, \cdot\,)\,\cap\,\{x\,;\ \eta\leqq 0\}=\varnothing$$

при $t\in(0, \tau_1)$. Используя, что $\psi(c)<\frac{\alpha r}{\tau_1}$, можно записать в виде

$$\operatorname{supp} u(t, \cdot\,)\cap\{x\,;\ |\,x\,|\leqq\alpha r-\frac{\alpha r}{\tau_1}t\}=\varnothing,$$

где $t\in(0, \tau_1)$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Bénilan, M. Crandall. Regularizing effects of homogeneous evolution equations. *Amer. J. Math.*, 1982, 23—29.
2. Ph. Bénilan, M. Crandall. The continuous dependence on φ of the solutions of $u_t-\Delta\varphi(u)=0$. *Ind. Univ. Math. J.*, **30**, 1981, 161—177.
3. О. Олейник, А. Калашников, Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **22**, 1958, № 5, 667—704.
4. J. Diaz, M. Herrero. Estimates on the support of the solutions of some nonlinear elliptic and parabolic problems. *Proc. Roy. Soc. Edinb., Sect. A*, **89**, 1981, 249—258.
5. M. Herrero, J. Vazquez. On the propagation properties of a nonlinear degenerate parabolic equations. *C. P. Diff. Eq.*, 7, 1982, 1381—1402.
6. M. Marinov, T. Rangelov. On the support of the solutions of some degenerate nonlinear parabolic equations. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **37**, 1984, 281—282.
7. А. Калашников. О задаче Коши для вырождающихся параболических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями. *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **6**, 1981, 183—196.
8. С. Антонцев. О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. *Доклады АН СССР*, **260**, 1981, 1289—1293.
9. А. Калашников. О распространении возмущений в первой краевой задаче для вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью. *Тр. сем. им И. Г. Петровского*, **8**, 1982, 128—134.
10. J. Diaz, L. Veron. Compacité du support des solutions d'équations quasilinéaires elliptiques on paraboliques. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **297**, 1983, 149—152.
11. Ю. Рыков. О конечной скорости распространения возмущений и инерции для обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Тр. молодых ученых, МГУ, 1984 (в печати).
12. А. Калашников. *Успехи мат. наук*, **37**, 1982, № 6, 274—275.
13. A. Bamberger. Etude d'une équation doublement non linéaire. *J. Func. Anal.*, **24**, 1977, 148—155.
14. Ю. Дубинский. Современные проблемы математики. **9**, 1976.
15. J. Lions. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris, 1969.

Единый центр математики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 18. 7. 1984