Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ЗАДАЧЕ КАЧЕСТВА ДЛЯ ИГР ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЕМ

А. АЗАМОВ

Рассматривается задача качества для дифференциальной игры нескольких преследователей и одного убегающего при наличии „линии смерти" или „линии жизни". Получены результаты, дополняющие построения Петросяна, Пшеничного, Черноусько и др.

1. Изучается следующая дифференциальная игра. В пространстве R^n движутся m преследователей $P_1, P_2, \dots, P_m$ и один убегающий P_0. Скорость u_i точки P_i имеет произвольное направление, а по модулю не превосходит ρ_i, $\rho_i \geq 0$. Если радиус-вектор точки P_i обозначить x_i, то уравнения движения запишутся в виде $dx_i/dt = u_i$, $|u_i| \leq \rho_i$, $i \in \langle 0, m \rangle$ (множество $\langle p, q \rangle$ состоит из целых чисел $p, p+1, \dots, q$). В дальнейшем начальное положение точки x_i обозначается x_i^0, текущее положение — $x_i(t)$.

В пространстве R^n выделено подмножество A, задающее ограничение на процесс преследование — убегание. Если не учесть ограничения A, то целью группы преследователей является осуществление поимки — $x_i(t) = x_0(t)$ при некотором t, хотя бы для одного $i \in \langle 1, m \rangle$.

В первом варианте игры точка P_0 должна двигаться в области $R^n \setminus A$ — дополнении A. Если $x_0(t) \in A$, то игра завершается в пользу преследователей. Можно сказать, что граница области A является преградой или опасной для убегающего. Такое ограничение в [1] названо „линией смерти". Это название здесь сохраняется.

Во втором варианте игры преследователи должны поймать P_0, пока она находится в области $R^n \setminus A$. Если включение $x_0(t) \in A$ произойдет до поимки, то игра завершается в пользу убегающего. Можно сказать, что множество A является зоной спасения или целью боевого задания для убегающего. Такое ограничение, следуя [1], называется „линией жизни".

В настоящей работе принято, что в обоих варантах игры множество A не стесняет движение преследователей.

Векторы u_i, $i \in \langle 0, m \rangle$ служат параметрами управления, которые должны изменяться с течением времени измеримым образом. Преследователи управляют параметрами u_i, $i \in \langle 1, m \rangle$ на основе информации о значениях $x_i(t)$, $i \in \langle 0, m \rangle$ и $u_0(t)$, убегающий управляет параметром u_0 на основе информации о значениях $x_i(t)$, $i \in \langle 0, m \rangle$. Информационная дискриминация убегающего объясняется тем, что преследователи должны осуществить точную поимку, а не l-поимку. Это является преимуществом для убегающего, уравновешивающим неравноправное положение в информированности.

Задача качества для описанной игры в случае $A = \emptyset$ рассмотрена в [2—5].

Игра с „линией смерти", в которой A — внешность круга, равносильна игре „Лев и человек" [6]. В [1] исследован случай, когда A — полуплоскость, в [7] — случай, когда $R^n \setminus A$ — выпуклый компакт. К игре с „линией смерти" можно отнести и игру, в которой убегающий движется по заданной кривой [8, 9]. В настоящей работе на основе [4] показывается, что условие $\rho_0 > \rho_i$, $i \in \langle 1, m \rangle$ достаточно для убегания и при наличии „линии смерти", например, когда убегающий движется внутри круга.

Игра с „линией жизни" впервые сформулирована в [1], где разобран случай полуплоскости и одного преследователя. Решение проблемы 9. 5. 1 [1] для произвольного m в предположениях $n=2$, $\rho_i > \rho_0, i \in <1, m>$ и множество $R^n \setminus A$ выпукло см. в [10, 11]. Здесь (пп. 5 и 6) приводится более простое решение для произвольных данных.

2. Пусть в игре с „линией смерти" $\rho_0 > \rho_i$, $i \in \langle 1, m \rangle$, A — произвольное замкнутое множество. В пп. 3 и 4 показывается, что из каждого начального положения x_0^0, $x_0^0 \bar{\in} A$, $x_0^0 \neq x_i^0$, $i \in \langle 1, m \rangle$, возможно убегание. При решении такой задачи без ущерба к общности можно считать $n=2$ и $\rho_i = \rho$, $i \in \langle 1, m \rangle$. Для удобства ρ_0 переобозначим через σ и положим $\mu = \rho/\sigma$, так что $0 \leq \mu < 1$.

Предложенный ниже способ убегания точки P_0 существенно опирается на специальную стратегию V^* Черноусько [4]. Стратегия V^* при фиксированных m, ρ, σ определяется по начальному положению x_0^0, единичному вектору h и положительному числу L. Движение точки P_0 на луче $\{x_0^0 + \tau h : \tau \geq 0\}$ со скоростью σh называется номинальным. Если $L < |x_i^0 - x_0^0|$, $i \in \langle 1, m \rangle$, то точка P_0 по стратегии V^* начнет движение с номинального и отклонится от него, когда впервые окажется $|x_i(t) - x_0^0(t)| = L$ для некоторых $t \geq 0$ и $i \in \langle 1, m \rangle$.

В [4] доказано (см. (8.2.44), (8.2.39) и (8.2.31) соответственно), что существуют положительные числа a, b, c, зависящие только от m, ρ и σ, и такие, что при любых измеримых управлениях преследователей

а) $|x_i(t) - x_0(t)| \geq aL$ для всех $t \geq 0$ и $i \in \langle 1, m \rangle$;

б) $|x_0(t) - \sigma h t| \leq bL$ для всех $t \geq 0$;

в) $x_0(t)$ отличается от номинально движущейся точки только на конечном числе интервалов, суммарная длина которых не превосходит cL.

3. Здесь описывается стратегия убегания в исходной игре с „линией смерти". Так как область A замкнута и $x_0^0 \bar{\in} A$, то существует отрезок I с одним концом в точке x_0^0, такой, что его ε — окрестность I_ε не пересекается с множеством A. Длину этого отрезка обозначим $2l$, а второй конец — z.

Пусть $h = (z - x_0^0)/|z - x_0^0|$. Введем в рассмотрение положительные числа d, α_i и β_i, $i \in \langle 1, m \rangle$, которые будут выбраны вместе с L только в зависимости от ρ, σ, m, x_i^0, $i \in \langle 0, m \rangle$. Процесс убегания проводится поэтапно в пределах полосы I_ε. Для удобства положим $x_0^0 = 0$. Пусть $S(r)$ — круг радиуса r с центром O.

Движение точки P_0 на первом этапе выбирается следующим образом. Если в начальный момент времени $t=0$ в круге $S(d)$ нет ни одного преследователя, то P_0 останется на месте до тех пор, пока $S(d)$ свободен от преследователей. Пусть при $t = t_0$ впервые в круге $S(d)$ оказался хотя бы один преследователь. Можно считать $t_0 = 0$ и $x_1^0 \in S(d)$. В этой ситуации убегающий будет обозревать круг $S(\alpha_1 d+\beta_1 d)$. Если в нем нет других преследователей кроме P_1, то P_0 движется согласно стратегии V^*. В рассматриваемом случае первый этап движения завершается в момент времени $t=t_1$, когда P_0 достигнет точку $\alpha_1 dh$.

Очевидно, $t_1\leq\alpha_1 d/\sigma+cL$. За это время P_1 может пройти расстояние, не превосходящее $T_1\rho$. Поэтому из неравенства

$$T_1\rho\leq\alpha_1 d-2d \tag{1}$$

вытекает, что в момент времени t_1 преследователь P_1 окажется от P_0 на стороне точки 0 по крайней мере на расстоянии d. Отсюда также видно, что P_0 подойдет к точке $\alpha_1 dh$ по номинальному движению. Точно так же из требования

$$T_1\rho\leq\beta_1 d-d \tag{2}$$

вытекает, что при $t=t_1$ и все остальные преследователи окажутся от P_0 на расстоянии не меньше d.

Рассмотрим теперь первый этап движения в случае присутствия в круге $S(\alpha_1 d+\beta_1 d)$ некоторых из преследователей P_i, $i\in\langle 2, m\rangle$, например, P_2. Тогда убегающий, прежде чем начнет движение, должен обозреть круг $S(\alpha_2 d+\beta_2 d)$. Пусть преследователи P_i, $i\in\langle 3, m\rangle$ находятся вне этого круга при $t=0$. Тогда P_0, двигаясь по стратегии V^*, обойдет P_1, P_2 и придет в точку $\alpha_2 dh$. Соответствующий момент времени t_2 не превосходит $T_2=\alpha_2 d/\sigma+cL$. Если на параметры наложить условия

$$\alpha_1 d+\beta_1 d+\rho T_2\leq\alpha_1 d-2d,\quad \rho T_2\leq\beta_2 d-d, \tag{3}$$

то при $t=t_2$ все преследователи окажутся от P_0 на расстоянии на меньше d и возможен переход ко второму этапу движения.

Пусть в начальный момент времени круг $S(\alpha_2 d+\beta_2 d)$ также не свободен от преследователей $P_3, \ldots, P_m$. Тогда повторим аналогичные рассуждения, переходя последовательно к обследованию кругов $S(\alpha_i d+\beta_i d)$, $i\in\langle 3, m\rangle$. Если наряду с (1)–(3) требовать выполнения неравенств

$$\begin{gathered}\alpha_{i-1}d+\beta_{i-1}d+\rho(\alpha_i d/\sigma+cL)\leq\alpha_i d-2d,\\ \rho(\alpha_i d/\sigma+cL)\leq\beta_i d-d,\quad i\in\langle 3, m\rangle,\end{gathered} \tag{4}$$

то независимо от начального расположения преследователей первый этап завершится в некоторый момент времени t тем, что все преследователи будут находиться от P_0 на расстоянии не меньше d.

4. Докажем, что описанный в п. 3 способ движения позволяет убегающему избежать поимки. Пусть L таково, что $\rho cL\leq d$. Тогда для удовлетворения неравенств (1)–(4) достаточно найти числа α_i, β_i $i\in\langle 1, m\rangle$, из системы $(\mu=\rho/\sigma)$

$$\begin{gathered}\alpha_{i-1}+\beta_{i-1}+\mu\alpha_i+1=\alpha_i-2;\\ \mu\alpha_i+1=\beta_i-1,\quad \alpha_0=0,\quad \beta_0=2.\end{gathered} \tag{5}$$

Решение системы (5) имеет вид $\alpha_i=2(\lambda^i-1)/\mu$, $\beta_i=2\lambda^i$, где $\lambda=(1+\mu)/(1-\mu)$.

Положим $d=l/\alpha_m$. Такой выбор параметра d обеспечит то, что после каждого этапа на одной стороне убегающего будет часть отрезка l длины не меньше l. Это позволит продолжить движение на следующем этапе аналогично первому.

Если $L \leqq \varepsilon/b$, то в процессе движения точка P_0 не покинет полосу I_ε и ограничение $x_0(t) \overline{\in} A$ соблюдается. Таким образом, в качестве L можно взять наименьшее из чисел

$$d/(\rho c), \quad \varepsilon/b, \quad |x_i^0 - x_0^0| \quad (i \in \langle 1, m \rangle).$$

При этом в силу свойства а) стратегии V^* (см. п. 2) имеет место оценка $|x_0(t) - x_i(t)| \geqq aL, \quad t \geqq 0, \quad i \in \langle 1, m \rangle$.

5. Далее будет рассмотрена игра с „линией жизни", в которой n, m ρ_i — произвольные $(i \in \langle 0, m \rangle)$, ограничение A — открытое множество. Если $\sigma = \rho_0 > \rho_i$ для всех $i \in \langle 1, m \rangle$, то игра завершается в пользу убегающего, что следует из [4]. Пусть $\sigma < \rho_i$ при $i \in \langle 1, k \rangle$, $\sigma = \rho_i$ при $i \in \langle k+1, l \rangle$, и $\sigma > \rho_i$ при $i \in \langle l+1, m \rangle$, причем $l \geqq 1$, но случаи $k = 0$, $k = l$, $l = m$ не исключаются.

Предварительно обратимся к игре с одним преследователем P, имеющим скорость ρ, $\rho \geqq \sigma$. Пусть $\mu = \rho/\sigma$, $x, x_0 \in R^n$, $x \neq x_0$ и $\Pi(x, x_0, \mu)$ — совокупность всех точек $\xi \in R^n$, удовлетворяющих неравенству $|x - \xi|/\rho > |x_0 - \xi|/\sigma$. Точки $\xi \in \Pi(x, x_0, \mu)$ характеризуются тем, что убегающий из положения x_0 в положение ξ сможет попасть за меньшее время, чем преследователь — из положения x.

Пусть $\rho > \sigma$ и z обозначает $x - x_0$. Тогда множество $\Pi(x, x_0, \mu)$ представляет собой открытый шар, ограниченный сферой Аполлония $|x - \xi|/\rho = |x_0 - \xi|/\sigma$. Преобразуя последнее уравнение к стандартному виду $|\xi - w| = r$, легко найти центр w и радиус r сферы Аполлония

$$w = (\mu^2 - 1)^{-1}(\mu^2 x_0 - x), \quad r = \mu(\mu^2 - 1)^{-1}|z|. \tag{6}$$

В [10, 11] доказано, что если преследователь применяет П-стратегию, а убегающий — произвольное управление, то шар $\Pi(x, x_0, \mu)$ монотонно убывает по включению. Доказательство основано на аппроксимации измеримых управлений кусочно-постоянными. Здесь приводится прямое аналитическое доказательство.

Пусть $\xi = z/|z|$, $u_0^{\cdot}\xi$ — скалярное произведение. П-стратегия преследователя определяется соотношениями $Tu = Tu_0 - z$, $T > 0$, $|u| = \rho$ и имеет вид

$$u_\Pi(\xi, u_0) = u_0 - A(\xi, u_0)\xi, \tag{7}$$

где $A(\xi, u_0) = [(u_0^{\cdot}\xi)^2 + \rho^2 - u_0^2]^{1/2} + u_0^{\cdot}\xi$. Отметим, что стратегия (7) имеет смысл и при $\rho = \sigma$.

Пусть преследователь применяет П-стратегию, убегающий — управление $u_0(t)$, а $x(t)$ и $x_0(t)$ — соответствующие траектории. Тогда функция $z(t) = x(t) - x_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dz/dt = u_\Pi(\xi, u_0(t)) - u_0(t). \tag{8}$$

Непосредственно проверяется формула [3]

$$z(t) = [\,|z(t_0)| - \int_{t_0}^{t} A(\zeta, u_0(\tau))d\tau]\zeta, \tag{9}$$

где $\zeta = z(t_0)/|z(t_0)|$. Из очевидного тождества $|u_0(t)|^2 + 2(\mu^2 - 1)^{-1}u_0(t)\zeta_0 A(\zeta_0, u_0(t)) + (\mu^2 - 1)^{-2}[A(\zeta_0, u_0(t))]^2 = \mu^2(\mu^2 - 1)^{-2}[A(\zeta_0, u_0(t))]^2$ в силу условия $|u_0(t)| \leqq \sigma$ следует $|u_0(t) + (\mu^2 - 1)^{-1}A(\zeta_0, u_0(t)\zeta_0| \leqq \mu(\mu^2 - 1)^{-1}A(\zeta_0, u_0(t))$. Поэтому уравнения (8) и $dx_0/dt = u_0(t)$ влекут $(t \geqq t_0)$:

$$|x_0(t)-x_0(t_0)-(\mu^2-1)^{-1}(z(t)-z(t_0))|\leq\mu(\mu^2-1)^{-1}(|z(t_0)|-|z(t)|).$$

Это неравенство можно переписать (см. (6)) в виде $|w(t)-w(t_0)|\leq r(t_0)-r(t)$, что эквивалентно монотонному убыванию шара $\Pi(x(t), x_0(t), \mu)$ по t.

Примечание. Легко видеть, что справедлива оценка $A(\zeta_0, u_0)\geq\rho-\sigma$. Поэтому из (6) и (9) следует, что в случае $\rho>\sigma$ радиус сферы Аполлония убывает со скоростью не меньше $\mu(\mu^2-1)^{-1}(\rho-\sigma)$.

Пусть теперь $\rho=\sigma$. Тогда множество $\Pi(x(t), x_0(t), 1)$ является открытым полупространством. Вектор $z(t)$, а в силу формулы (9) и вектор ζ_0 служат внешней нормалью $\Pi(x(t), x_0(t), 1)$, его граничная гиперплоскость проходит через точку $(x(t)+x_0(t))/2$. Из формулы (7) следует, что

$$d(\zeta_0(x(t)+x_0(t))]/dt=-A(\zeta_0, u_0(t))\leq 0,$$

поэтому $\Pi(x(t), x_0(t), \mu)$ монотонно убывает по t и в случае $\mu=1$.

6. Решение задачи качества для игры с „линией жизни" зависит от взаимного расположения множеств A и

$$\Pi_*=\bigcap_{i=1}^{l}\Pi(x_i^0, x_0^0, \mu_i),$$

где $\mu_i=\rho_i/\sigma$. Возможны две ситуации. А. $A\cap\Pi_*\neq\emptyset$. Пусть $y\in A\cap\Pi_*$. Поскольку Π_* выпукло, $A\cap\Pi_*$ открыто, существует положительное число δ, такое, что δ — окрестность точки y, содержится в множестве A, δ — окрестность отрезка с концами x_0^0, и y — в области Π_*. Применив стратегию V_0 Черноусько (см. п. 2) в направлении $h=(y-x_0^0)/|y-x_0^0|$ с достаточно малым параметром L, убегающий сможет обойти преследователей $P_{l+1}, \ldots, P_m$ и прийти в δ — окрестность точки y, раньше преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_m$ при любых управлениях $u_i(t)$, $i\in\langle 1, m\rangle$.

В. $A\cap\Pi_*=\emptyset$. Если преследователи P_i, $i\in\langle 1, l\rangle$ применяют П-стратегии, то из монотонности множеств $\Pi(x_i(t), x_0(t), \mu_i)$, $i\in\langle 1, l\rangle$ следует $x_0(t)\in\Pi_*$ при любом управлении убегающего, пока $x_0(t)\neq x_i(t)$, $i\in\langle 1, m\rangle$.

Поэтому задача сведется к игре без „линии жизни". Если множество Π_* — ограниченное, то убегающий будет пойман. Действительно, если Π_* — ограниченное, то либо $k\geq 1$ и преследование завершит P_1, либо $k=0$, $l\geq n+1$, $0\in\operatorname{Intco}\{x_i^0-x_0^0:\ i\in\langle 1, l\rangle\}$ и возможность завершения преследования следует из [3]. Если множество Π_* — неограниченное, то почти из всех точек возможно убегание (подробности см. в [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Айзекс. Дифференциальные игры. М., 1967.
2. A. Ziemba. Pursuit games. *Zesz. nauk, WSP, ser. A*, 1970, No 8, 41—48.
3. Б. Н. Пшеничный. Простое преследование несколькими объектами. *Кибернетика*, 1976, № 3, 145—146.
4. Ф. Л. Черноусько, А. А. Меликян. Игровые задачи управления и поиска. М., 1978.
5. Н. Сатимов, А. Азамов, Б. Хайдаров. Простое преследование многими объектами одного убегающего объекта. *Доклады АН УзССР*, 1981, № 12, 3—5.
6. J. O. Flynn. Pursuit in the circle: lion versus man. *Lecture notes pure appl. mathem.*, 10, 1974, 99—124.

7. Р. П. Иванов. Простое преследование—убегание на компакте. *Доклады АН СССР*, **254**, 1980, 1318—1321.
8. А. Азамов. О преследовании точки, убегающей по заданной кривой. *Доклады АН УзССР*, 1982, 6—7.
9. А. Азамов. О задаче убегания по заданной кривой. *Прикл. мат. мех.*, **46**, 1982, 694—696.
10. Л. А. Петросян. Об одном семействе дифференциальных игр на выживание в пространстве R^n. *Доклады АН СССР*, **161**, 1965, 52—54.
11. Л. А. Петросян. Дифференциальные игры преследования. Л., 1977.

Ташкентский государственный университет им. В. И. Ленина. Математический факультет СССР

Поступила 20. 7. 1984