Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБОБЩЕННЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ КОМПАКТНЫХ ГРУПП

М. М. ЧОБАН

Будем использовать терминологию из [1—3]. Все пространства предполагаются вполне регулярными.

1. Основные классы множеств. Фиксируем пространство X. Через $\mathscr{K}(X)$ обозначим все компактные подмножества пространства X, а через $C(X)$ — все непрерывные функции на X. Через $C_k(X)$ обозначим все непрерывные функции с компактным носителем. Через $\mathscr{B}(X)$ обозначим σ-алгебру, порожденную открытыми множествами пространства X. Пусть $\mathscr{M}_0(X)=\{f^{-1}(0)\mid f\in C(X)\}$ — все нульмножества пространства X, а $\mathscr{A}_0(X)=\{X\setminus H\mid H\in\mathscr{M}_0(X)\}$. Предположим, что построены семейства $\{\mathscr{M}_\alpha(X), \mathscr{A}_\alpha(X)\mid \alpha<\beta\}$, где $\beta\leq\omega_1$, и ω_1 — первое несчетное порядковое число. Тогда $\mathscr{A}_\beta(X)$ состоит из объединений счетных последовательностей множеств, принадлежащих $\cup\{\mathscr{M}_\alpha(X)\mid\alpha<\beta\}$, а $\mathscr{M}_\beta(X)=\{X\setminus H\mid H\in\mathscr{A}_\beta(X)\}$. Тогда $\mathscr{M}_{\omega_1}(X)=\mathscr{A}_{\omega_1}(X)=\cup\{\mathscr{M}_\alpha(X)\mid\alpha<\omega_1\}=\cup\{\mathscr{A}_\alpha(X)\mid\alpha<\omega_1\}$ состоит из всех бэровских множеств пространства X. Пусть $\mathscr{U}(X)$ — все открытые в X множества, а $\mathscr{F}(X)=\{X\setminus H\mid H\in\mathscr{U}(X)\}$.

Мерой на пространстве X называется действительная счетно-аддитивная функция μ, определенная на $\mathscr{B}(X)$ и $\mu(\varnothing)=0$. В работе рассматриваются только меры μ, для которых выполняются следующие два условия:

1°. Мера μ локально ограничена, т. е. для любой точки $x\in X$ существует окрестность Ox такая, что $\mu(Ox)<\infty$.

2°. Мера μ регулярна, т. е. для каждого $L\in\mathscr{B}(X)$ имеем $\mu(L)=\sup\{\mu(F)\mid F\in\mathscr{F}(X), F\subseteq L\}=\inf\{\mu(H)\mid H\in\mathscr{U}(X), L\subset H\}$.

Фиксируем меру μ на X. Для каждого множества $A\subset X$ опеделяются внешняя мера $\mu^*(A)=\inf\{\mu(U)\mid A\subseteq U\in\mathscr{A}_0(X)\}$ и внутренняя мера $\mu_*(A)=\sup\{\mu(H)\mid A\supseteq H\in\mathscr{M}_0(X)\}$. Из регулярности меры μ следует, что $\mu(A)=\mu^*(A)=\mu_*(A)$ для всех $A\in\mathscr{B}(X)$. Если $\mu^*(A)=\mu_*(A)$, то множество A называется μ-измеримым. Обозначим $\mathscr{L}(X,\mu)=\{H\subseteq X\mid H$ — μ-измеримо$\}$.

Отображение $f:X\to Y$ μ-измеримо, если $f^{-1}H\in\mathscr{L}(X,\mu)$ для каждого открытого в Y множества H.

Отображение $f:X\to Y$ B-измеримо класса α, если $f^{-1}\mathscr{A}_0(Y)\subseteq\mathscr{A}_\alpha(X)$. Если отображение $f:X\to Y$ взаимно однозначно, B-измеримо класса α и f^{-1} B-измеримо класса β, то f называется B-гомеоморфизмом или бэровским гомеоморфизмом класса (α, β), а кратко — B-(α,β)-гомеоморфизмом. B-гомеоморфизмы были изучены в работе [4]. Для совершенно нормальных пространств бэровские гомеоморфизмы совпадают с борелевскими гомеоморфизмами К. Куратовского [2].

Пусть μ — мера на пространстве X, а η — мера на пространстве Y. Отображение $f:X\to Y$ называется L-гомеоморфизмом, если отображение f

взаимно однозначно и L-измеримо, f^{-1} — η-измеримо и $\eta(f(H))=\mu(H)$ для всех $H\in\mathscr{L}(X,\mu)$. Если f является L-гомеоморфизмом и B-гомеоморфизмом класса (α,β), то скажем, что f есть BL-(α,β)-гомеоморфизм.

Лемма 1.1. *Пусть μ — мера на совершенно нормальном финально-компактном пространстве X. Тогда существует единственное замкнутое в X множество $S(\mu)$, которое удовлетворяет условиям:*
1. $\mu(A\cap S(\mu))=\mu(A)$ *для всех* $A\in\mathscr{B}(X)$;
2. *Если U открыто в X и $U\cap S(\mu)\neq\emptyset$, то* $\mu(U)>0$.

Доказательство. Пусть $\gamma=\{U\mid U$ открыто в X и $\mu(U)=0\}$. Тогда существует счетное число открытых множеств $\{U_n\mid n\in N=\{1,2,\ldots\}\}\subset\gamma$ такое, что $\cup\{U_n\mid n\in N\}=\cup\{U\mid U\in\gamma\}$. Множество $S(\mu)=X\setminus\cup\{U_n\mid n\in N\}$ — искомое. Будем говорить, что $S(\mu)$ является замкнутым носителем меры μ.

Лемма 1.2. *Пусть μ — мера на сепарабельном метрическом пространстве X. Тогда существует G_δ-множество $G(\mu)$, такое, что* $\operatorname{ind}G(\mu)=0$. *и* $\mu(X\setminus G(\mu))=0$.

Доказательство. Пусть ρ — метрика на X. Фиксируем точку $x\in X$ и её окрестность $O(x,a)=\{y\mid\rho(x,y)<a\}$, для которой $\mu(O(x,a))<\infty$ и $a>0$. Положим $F(x,r)=\{y\mid\rho(x,y)=r\}$. Тогда $O(x,a)=\cup\{F(x,r)\mid 0\leq r<a\}$. Поэтому существует такая последовательность чисел $\{r_n(x)\mid n\in N\}$, что $0<r_{n+1}(x)<r_n(x)<a$, $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$ и $\mu(F(x,r_n(x)))=0$ для всех $n\in N$.

Пусть $\{x_m\mid m\in N\}$ — всюду плотное в X множество. Тогда $\{O(x_m,r_n(x_m))\mid n,m\in N\}$ есть база в X. Множество $G(\mu)=X\setminus\cup\{F(x_m,r_n(x_m))\mid n,m\in N\}$ искомо.

2. L-гомеоморфизмы пространств с мерой. В этом параграфе будут уточнены отдельные результаты из ([5], § 26). Мера на пространстве X называется неанатомической, если $\mu(\{x\})=0$ для всех $x\in X$. В этом параграфе мы рассматриваем только неатомические меры.

Теорема 2.1. Пусть (X,μ) и (Y,η) — полные сепарабельные метрические пространства с мерами, $L\in\mathscr{A}_\alpha(X)$, $H\in\mathscr{A}_\alpha(Y)$, $\alpha>1$, $\mu(L)=\eta(H)$, $\mu(X\setminus L)=\eta(Y\setminus H)$, $|L|=|H|$ и $|X\setminus L|=|Y\setminus H|$. Тогда существует BL—$(\alpha+I,\alpha+I)$-гомеоморфизм $g:X\to Y$ и G_δ — множество Φ пространства L, для которых $\mu(\Phi)=\mu(L)$, $g(L)=H$ и $g|\Phi$-гомеоморфизм.

Доказательство. Если $\mu(L)=0$, то существует B—(α,α)-гомеоморфизм $h:L\to H$ (см. [2], § 37). Отображение g является и L-гомеоморфизмом. Пусть $\mu(L)>0$. Существуют такие несчетные компактные подмножества $P\subset L$ и $Q\subset H$, что $\mu(P)=\eta(Q)=0$. Рассмотрим множества $S(\mu)$, $S(\eta)$, $G(\mu)$ и $G(\eta)$, удовлетворяющие условиям лемм 1.1 и 1.2. Можем считать, что $G(\mu)\cap P=\emptyset$ и $G(\eta)\cap Q=\emptyset$. Пространства $G(\mu)$ и $G(\eta)$ гомеоморфны подпространствам прямой. Множества $G(\mu)\cap S(\mu)$ и $G(\eta)\cap S(\eta)$ гомеоморфны пространству иррациональных чисел. Поэтому на них существуют такие линейные порядки, при которых имеются первые элементы $a_m\in X$ и $b_m\in Y$, а множества вида $[a_m,x)=\{z\in G(\mu)\cap S(\mu)\mid a_m\leq z<x\}$ и $(x_1,x_2)=\{z\mid x_1<z<x_2\}$ образуют базу в $G(\mu)\cap S(\mu)$ и имеют конечную меру, множества же $[b_m,y)$ и (y_1,y_2) образуют базу и имеют конечную меру в $G(\eta)\cap S(\eta)$. Кроме того, относительно этих порядков отсутствуют максимальные элементы во множествах $L_1=L\cap G(\mu)\cap S(\mu)$ и $H_1=H\cap G(\eta)\cap S(\eta)$. Рассмотрим отображение $\varphi_L:L_1\to[0,\mu(L))\subset R$, где $\varphi_L(x)=\mu([a_m,x)\cap L)$. Аналогично строим отображение $\varphi_H:H_1\to[0,\eta(H))=[0,\mu(L))$. Через l обозначим меру Лебега на пространстве действительных чисел R. Тогда $\mu(L)=\mu(L_1)=l(\varphi_L(L_1))=l(\varphi_H(H_1))=\eta(H_1)=\eta(H)$. Отображения φ_L и φ_H монотонны и непрерывны. Существуют такие G_δ-множества L_2 в L_1 и H_2 в H_1, что $\mu(L_2)=\mu(L)$, $\eta(H_2)=\eta(H)$, а $\varphi_L|L_2$ и $\varphi_H|H_2$

являются гомеоморфизмами. При построении L_2 сперва строим $L'_2 = L_1 \setminus \cup\{U \mid U$ открыто в L_1 и $\mu(U) = 0\}$, а затем исключаем те точки $x \in L'_2$, для которых одно из множеств $(a_m, x]$, $[x, z)$, где $z > x$, открыто. Таких точек может быть счетное число. Так же строится и H_2. Тогда H_2 и L_2 являются B-множествами класса α. Поскольку $l([0, \mu(L)) \setminus \varphi_L(L_2)) = 0$ и $l([0, \mu(L)) \setminus \varphi_H(H_2)) = 0$, то $l(\varphi_L(L_2) \cap \varphi_H(H_2)) = \mu(L) = \eta(H)$. Положим $\Phi = L_3 = \varphi_L^{-1}(\varphi_H(H_2))$ и $H_3 = \varphi^{-1}_H(\varphi_L(L_2))$. Тогда $L_3 \in \mathscr{A}_\alpha(X)$, $H_3 \in \mathscr{A}_\alpha(Y)$ и $h_1 : L_3 \to H_3$, где $h_1(x) = \varphi^{-1}_H(\varphi_L(x))$, есть гомеоморфизм, а $\mu(L_3) = L$. Множества $L \setminus L_3$ и $H \setminus H_3$ несчетны и принадлежат классам $\mathscr{M}_\alpha(X)$ и $\mathscr{M}_\alpha(Y)$ соответственно. В силу результатов § 37 из [2], существует $B-(\alpha, \alpha)$-гомеоморфизм $h_2 : L \setminus L_3 \to H \setminus H_3$. Тогда отображение $h : L \to H$, где $h \mid L_3 = h_1$ и $h \mid L \setminus L_3 = h_2$, является $BL-(\alpha+1, \alpha+1)$-гомеоморфизмом. Аналогично строится и $BL-(\alpha+1, \alpha+1)$-гомеоморфизм $\eta : X \setminus L \to Y \setminus H$. По построению, $g : X \to Y$, где $g \mid L = h$ и $g \mid X \setminus L = \eta$, является $BL-(\alpha+1, \alpha+1)$-гомеоморфизмом. Если $L = X$ и $H = Y$, то g является $BL-(2, 2)$-гомеоморфизмом. Этим доказана

Теорема 2.2. *Пусть (X, μ) и (Y, η) — полные сепарабельные метрические пространства с мерами и $\mu(X) = \eta(Y) > 0$. Тогда существуют $BL-(2, 2)$-гомеоморфизм $g : X \to Y$, и такое G_δ-множество $\Phi \subset X$, что $\mu(X \setminus \Phi) = 0$ и $g \mid \Phi$ есть гомеоморфизм.*

Для топологического пространства X положим $d(X) = \sup\{\,|H| \mid H$ — замкнутое дискретное подмножество пространства $X\}$.

Рассмотрим пространство X с мерой μ. На протяжении всего параграфа будем считать, что выполняются условия:

3°. $X = S(\mu)$, т. е. для каждой точки $x \in X$ и каждой ее окрестности Ox имеем $\mu(Ox) > 0$.

4°. Если $L \subset X$ и для каждой точки $x \in X$ существует окрестность Ox, для которой $\mu(Ox \cap L) = 0$, то $\mu(L) = 0$.

Условие 4° в финально компактных пространствах всегда выполняется.

Лемма 2.3. *Пусть X — нормальное пространство с мерой μ, F — замкнутое в X множество, U — открытое в X множество, $F \subset U$ и $\mu(U \setminus F) < \infty$. Тогда существует такое открытое в X множество V, что $F \subset V \subset U$ и $\mu([V] \setminus V = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывную функцию $f : X \to [0, 1]$, где $F \subset f^{-1}(0)$ и $X \setminus U \subset f^{-1}(1)$. Поскольку $\mu(U \setminus F) < \infty$ и $U \setminus F \supset \cup\{f^{-1}(x) \mid 0 < x < 1\}$, то $\mu(f^{-1}(a)) = 0$ для некоторой точки $a \in (0, 1)$. Положим $V = f^{-1}[0, a)$. Множество V искомо, так как $[V] \setminus V \subset f^{-1}(a)$.

Лемма 2.3 верна для произвольных мер. При помощи леммы 2.3 легко доказывается

Теорема **2.4.** *Пусть X — метрическое пространство с мерой μ. Тогда существует такое G_δ-множество Y, что $\mu(X \setminus Y) = 0$ и $\dim Y = 0$.*

Теорема 2.4 и метод доказательства теоремы 2.1 позволяют установить справедливость следующего утверждения

Теорема 2.5. *Пусть (X, μ) и (Y, η) — полные локально сепарабельные метрические пространства с мерами μ и η соответственно. Если $d(X) = d(Y)$ и $\mu(X) = \eta(Y)$, то существуют $BL(2, 2)$-гомеоморфизм $g : X \to Y$ и такое всюду плотное G_δ-множество $\Phi \subset X$, что $\mu(X \setminus \Phi) = 0$ и $g \mid \Phi$ есть гомеоморфизм.*

3. Меры на локально-компактных группах. Рассмотрим меру μ на локально-компактном пространстве X. Через $L_p(X, \mu)$, где $p > 0$, обозначим совокупность всех μ-измеримых функций f, для которых существует интеграл

$\int |f|^p d\mu$. На пространстве $L_p(X, \mu)$ вводим квазинорму $||f||=(\int |f|^p d\mu)^{1/p}$. Если $p \geqq 1$, то $||f||_p$ является нормой, т. е. удовлетворяет условиям: 1. $||\lambda f||_p = |\lambda| . ||f||_p$; 2. $||f+g||_p \leqq ||f||_p + ||g||_p$. При $0<p<1$ выполняется только первое условие. Если $||f-g||=0$, то функции f и g отождествляются по мере μ. Функция $\rho_p(f, g)=||f-g||_p$ при $p \geqq 1$ является метрикой, а при $p<1$ — симметрикой. Симметрика ρ_p порождает на $L_p(X, \mu)$ метризуемую топологию. Если f — функция на X, то положим $||f||=\sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$. Для всех $p>0$ имеем $C_k(X) \subset L_p(X, \mu)$. Для каждого $p>0$ существуют линейные функционалы $i_{\mu p}$: $L_p(X, \mu) \to R$ и $i_{\mu p}=i_{\mu p} \mid C_k(X)$. Положим $J_\mu = J_{\mu 1}$. Мера μ однозначно восстанавливается линейным функционалом j_μ. Этот факт вытекает из теоремы представления Рисса [6]. При помощи таких функционалов определяются меры Родона (см. [7]). Мы рассматриваем только неотрицательные меры. Для таких мер $\int f d\mu \geqq 0$, как только $f \geqq 0$.

На локально-компактных группах рассматриваем только левоинвариантные меры Хаара. Если μ_G — мера Хаара на локально-компактной группе G, H — компактная подгруппа группы G, а $\pi: G \to G/H$ — естественное проектирование, то через $\mu_{G/H}$ обозначают образ меры μ_G, т. е. $\mu_{G/H}(L)=\mu_G(\pi^{-1}L)$ для всех $L \in \mathscr{B}(G/H)$. На компактных группах рассматриваем только вероятностные меры Хаара. Эти факты играют важную роль при доказательстве следующего утверждения

Предложение 3.1. Пусть μ_G — левоинвариантная мера Хаара на локально-компактной группе G, H — компактная нормальная подгруппа с вероятностной мерой Хаара μ_H, $\mu_{G/H}$ — мера Хаара на фактор-группе G/H и $\mu_{G/H}(L) = \mu_G(\pi^{-1}L)$, где $\pi: G \to G/H$ — естественное проектирование, для всех $L \in \mathscr{B}(G/H)$. Пусть далее отображение $\varphi: (G/H) \times H \to G$ удовлетворяет условиям:

1. Отображение φ есть B-гомеоморфизм;
2. Для всякой точки $y \in G/H$ существует такая точка $x(y) \in \pi^{-1}(y)$, что $\varphi(y, h) = x(y) \cdot h$ для всех $h \in H$.

Тогда φ есть BL-гомеоморфизм пространства $((G/H) \times H, \mu_{G/H} \otimes \mu_h)$ на пространство (G, μ_H).

Доказательство. Обозначим: $\eta = \mu_{G/H} \otimes \mu_H$. Для каждой функции $f \in C_k(G)$ определяется функция $\overline{f} = f \circ \varphi$. Существует компактный носитель $F \subset G$ функции f. Тогда множество $\Phi = \pi F \times H$ — компактно и является носителем функции $\overline{f}$. Учитывая, что функция $\overline{f}$ B-измерима и ограничена, получаем $\overline{f} \in L_p((G/H) \times H, \eta)$ для всех $p>0$. Отображение φ является L-гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда $\int \overline{f} d\eta = \int f d\mu_G$ для всех $f \in C_k(G)$. На множестве xH рассмотрим меру μ_H, порожденную гомеоморфизмом $H \to xH$, где $h \to xh$. Фиксируем $f \in C_k(G)$. Для каждой точки $y \in G/H$ положим $u(f)(y) = \int_{x(y) \cdot H} f d\mu_H = \int_{\pi^{-1}(y)} f d\mu_H$. Отображение $u: C_k(G) \to C_k(G/H)$ линейно, $||u||=I$ и $u(g \circ \pi) = g$ для всех $g \in C_k(G/H)$. При этом $||u|| = \sup\{||u(f)|| \mid f \in C_k(G)$ и $||f|| \leqq 1\}$. Оператор u продолжается до такого линейного оператора $v: C(G) \to C(G/H)$ с нормой I, что $v(g \circ \pi) = g$ для всех $g \in C(G/H)$. Такие операторы называются линейными регулярными операторами усреднения (см[8, 9]).

Известно (см. [10], глава VII, § 2), что $\int f d\mu_G = \int u(f) d\mu_{G/H}$. По теореме Фубини, $\int \overline{f} d\eta = \int (\int_{\{y\} \times H} \overline{f} d\mu_H) d\mu_{G/H}$. При этом отождествляем H с $\{y\} \times H$ и на $\{y\} \times H$ рассматриваем меру μ_H. В силу условия 2, $\varphi \mid \{y\} \times H$ является гомеоморфизмом множества $\{y\} \times H$ на $x(y) \cdot H$, сохраняющим меру. Поэтому $\int_{\{y\} \times H} \overline{f} d\mu_H = \int_{\pi^{-1}(y)} f d\mu_H = u(f)(y)$. Следовательно, $\int f d\mu_G = \int u(f) d\mu_{G/H} = \int \overline{f} d\eta$. Таким образом установлено, что φ является L-гомеоморфизмом. Предложение доказано.

Предложение 3.2. Пуст μ_G—левоинвариантная мера Хаара на локально-компактной группе G, H — компактная нормальная подгруппа с вероятностной мерой Хаара μ_H, $\mu_{G/H}$ — мера Хаара на фактор-группе G/H, $\pi: G \to G/H$ — локально тривиальное расслоение, и $\mu_{G/H}(L) = \mu_G(\pi^{-1}L)$ для всех $L \in \mathscr{B}(GH)$. Тогда существует $BL - (I, I)$-гомеоморфизм $\varphi: (G/H) \times H \to G$, удовлетворяющий условию 2 из предложения 3.1.

Доказательство. Существуют локально-конечное покрытие $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ из открытых F_σ-множеств пространства G/H, гомеоморфные вложения $\{\psi_\alpha: U_\alpha \to \pi^{-1}U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, такие, что $\pi(\psi_\alpha(y)) = y$ для всех $y \in U_\alpha$ и $\alpha \in A$. Строим гомеоморфизм $\varphi_\alpha: U_\alpha \times H \xrightarrow{\text{на}} \pi^{-1}U_\alpha$, где $\varphi_\alpha(y, h) = \psi_\alpha(y) \cdot h$. Можем считать, что множество A вполне упорядочено. Рассмотрим отображение $\varphi: (G/H) \times H \to G$, где $\varphi \mid ((U_\alpha \setminus \bigcup \{U_\beta \mid \beta < \alpha\}) \times H) = \varphi_\alpha \mid ((U_\alpha \setminus \bigcup \{U_\beta \mid \beta < \alpha\}) \times H)$ для всех $\alpha \in A$. Тогда φ составляет искомое отображение. Предложение доказано.

Замечание. Пусть μ_G — мера Хаара на локально-компактной группе G, H — компактная подгруппа с вероятностной мерой Хаара μ_H. На фактор-пространстве G/H рассматриваем меру $\mu_{G/H}(L) = \mu_G(\pi^{-1}L)$. Тогда предложения 3.1 и 3.2 остаются верными в этих предложениях.

Предложение 3.3. Пусть $S = \{X_\alpha, \mu_\alpha, \pi_\beta^\alpha \mid \alpha, \beta \in M\}$ и $S' = \{Y_\alpha, \eta_\alpha, \omega_\beta^\alpha \mid \alpha, \beta \in M\}$ — обратные пределы пространств с мерами, для которых пространства $X = \lim S$ и $Y = \lim S'$ паракомпактны и локально-финально-компактны. Пусть далее существует семейство $B-(\alpha_0, \beta_0)$-гомеоморфизмов $\{f_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha \mid \alpha \in M\}$, таких, что $f_\beta \circ \pi_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha \circ f_\alpha$, $\mu_\alpha((\pi_\beta^\alpha)^{-1} U) = \mu_\beta(U)$ и $\eta_\alpha((\omega^\alpha)^{-1} V) = \eta_\beta(V)$ для всех $\alpha, \beta \in M$, $\alpha > \beta$, $U \in \mathscr{B}(X_\beta)$ и $V \in \mathscr{B}(Y_\beta)$. Обозначим $\mu = \lim \{\mu_\alpha \mid \alpha \in M\}$, $\eta = \lim \{\eta_\alpha \mid \alpha \in M\}$ и $f = \lim \{f_\alpha \mid \alpha \in M\}$. Тогда $f: X \to Y$ является $BL-(\alpha_0, \beta_0)$-гомеоморфизмом.

Доказательство. Из предложения 1 из [4] вытекает, что f есть $B-(\alpha_0, \beta_0)$-гомеоморфизм. Легко заметить, что f является и L-гомеоморфизмом.

Следствие 3.4. *Пусть* $\{f_\xi: (X_\xi, \mu_\xi) \to (Y_\xi, \eta_\xi) \mid \xi \in M\}$ — *семейство* $B-(\alpha, \beta)$-*гомеоморфизмов пространств с мерами, а пространства* $X = \Pi \{X_\xi \mid \xi \in M\}$ *и* $Y = \Pi \{Y_\xi \mid \xi \in M\}$ — *паракомпактны и локально-финально компактны. Тогда относительно мер* $\mu = \bigotimes \{\mu_\xi \mid \xi \in M\}$ *и* $\eta = \bigotimes \{\eta_\xi \mid \xi \in M\}$ *существует* $BL-(\alpha, \beta)$-*гомеоморфизм* $f: X \to Y$, *где* $f = \Pi \{f_\xi \mid \xi \in M\}$.

Из полученных результатов и методов работы [4], а также теорем о существовании ряда Ли для компактных групп [11—13] вытекают следующие утверждения. На компактных группах рассматриваем только вероятностную меру Хаара.

Следстие 3.5. *Пусть* H — *компактная нормальная подгруппа локально-компактной группы* G. *Тогда существуют* BL-*гомеоморфизм* $\varphi: (G, \mu_G) \to (G/H \times H, \mu_{G/H} \otimes \mu_H)$ *и всюду плотное в* G *множество* Φ, *такое, что* $\varphi \mid \Phi$-*гомеоморфизм*, $\dim \Phi = 0$ *и* $\overset{*}{\mu}_G(U \cap \Phi) = \mu^*(U)$ *для всякого открытого в* G *множества* U.

Следствие 3.6. *Пусть* $\{G_\alpha, \varphi_\alpha^\beta \mid \alpha, \beta < \theta\}$—*ряд Ли компактной группы* G. *Через* K_α *обозначим ядро гомеоморфизма* $\varphi_\alpha^{\alpha+1}: G_{\alpha+1} \to G_\alpha$. *Тогда существуют* $BL-(\omega_1, 1)$-*гомеоморфизм* $\varphi: G \to \Pi \{G_1, K_\alpha \mid \alpha < \theta\}$ *и всюду плотное множество* $\Phi \subset G$, *такое, что* $\varphi \mid \Phi$-*гомеоморфизм*, $\overset{*}{\mu}_G(\Phi) = 1$ *и* $\dim \Phi = 0$. *Пусть* $\mathscr{D} = \{0, 1\}$. *Меру Хаара на компактной группе* $\mathscr{D}^\tau$ *обозначим через* μ_τ.

Следствие 3.7. *Пусть* $\{(X_\alpha, \mu_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ — *бесконечное семейство неодноточечных полных сепарабельных пространств с вероятностными мерами, а пространство* $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ *финально-компактно. Тогда существуют* BL—$(2,2)$-*гомеоморфизм* $\varphi : (\mathcal{D}^\tau, \mu_\tau) \to (\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}, \bigotimes\{\mu_\alpha \mid \alpha \in A\})$, *где* $|A| = \tau$, *и всюду плотное подмножество* $\Phi \subset \mathcal{D}^\tau$ *такое, что* $\varphi \mid \Phi$-*гомеоморфизм,* $\mu_\tau^*(\Phi) = I$ *и* $\dim \Phi = 0$.

Следствие 3.8. *Бесконечные компактные группы равного веса* BL—*гомеоморфны относительно вероятностных мер Хаара на них.*

Замечание. Следствие 3.5 утверждает, что гомеоморфизм локально-компактной группы с компактным ядром с точки зрения мер Хаара тривиален.

На дискретной группе целых чисел Z рассмотрим естественную меру Хаара $\mu_Z(H) = |H|$.

Следствие 3.9. *Пусть* μ_G — *мера Хаара на локально-компактной некомпактной группе* G *без изолированных точек. Если пространство* G — *финально-компактно и имеет вес* τ, *то существует* BL-*гомеоморфизм пространства* (G, μ_G) *на пространство* $(Z \times \mathcal{D}^\tau, \mu_Z \otimes \mu_\tau)$.

Следствие 3.10. *Пусть* μ_X — *мера Хаара на локально-компактной группе* X, *а* μ_Y — *мера Хаара на локально-компактной группе* Y. *Пусть* $\chi(X) = \chi(Y)$ *и выполняется одно из условий:*

1. *Группы* X *и* Y — *компактны.*
2. *Группы* X *и* Y — *некомпактны, и* $d(X) = d(Y)$. *Тогда для любого* $p > 0$ *существует линейный мультипликативный изоморфизм по норме* $\|\cdot\|_p$ *пространства* $L_p(X, \mu_X)$ *на* $L_p(Y, \mu_Y)$.

4. Топологические свойства и L-гомеоморфизмы. В работе [14] установлено, что веса B-гомеоморфных компактов равны. Следующий пример показывает, что веса L-гомеоморфных компактов могут быть различны.

Пример 4.1. Рассмотрим множество N в дискретной топологии. На N строим меру η, где $\eta(\{n\}) = 2^{-n}$ для всех $n \in N$. Пусть bN — произвольное компактное расширение пространства N. Мера η порождает на bN меру η_{bN}, где $\eta_{bN}(A) = \eta(A \cap N)$ для всех $A \subset bN$. Тогда $\mathscr{X}(bN, \eta_{bN})$ состоит из всех подмножеств множества bN, а $\eta_{bN}(bN \setminus N) = 0$. Отметим, что для любого открытого непустого множества $U \subset bN$ всегда $1 \geq \eta_{bN}(U) > 0$. Мера η_{bN} удовлетворяет условиям 1^0 и 2^0 из § 1 и условиям 3^0 и 4^0 из § 2. Для N существуют такие компактификации $X = b_1N$ и $Y = b_2N$, что $|X \setminus N| = |Y \setminus N|$, $w(X) = \aleph_0$ и $w(Y) > \aleph_0$. Существует такое взаимно однозначное отображение $\varphi : X \to Y$, что $\varphi(n) = n$ для всех $n \in N$. Отображение φ является L-гомеоморфизмом. Если умножим пространства X и Y на отрезок $I = [0, 1]$ с мерой Лебега l, то на L-гомеоморфных пространствах $(X \times I, \eta_X \otimes l)$ и $(Y \times I, \eta_Y \otimes l)$ меры будут неатомическими, а веса останутся прежними и меры $\{\eta_X \otimes l, \eta_Y \otimes l\}$ удовлетворяют условиям 1^0—4^0.

В дальнейшем через (X, μ) будем обозначать паракомпактное пространство с мерой. Пусть $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Если $\mu(A \Delta B) = 0$, то множества A и B эквивалентны, т. е. не различимы по мере μ. Такие множества отождествляются. Тогда множество* $\mathscr{X}_*(X, \mu)$ с расстоянием $\rho_\mu(A, B) = \mu(A \Delta B)$ является метрическим пространством. На $\mathscr{X}(X, \mu)$ будем рассматривать только топологию, порожденную метрикой ρ_μ. Для каждого множества $E \subset X$ через h_E обозначим характеристическую функцию множества E, т. е. $h_E^{-1}(0) = X \setminus E$ и $h_E^{-1}(1) = E$. Если $E \in \mathscr{X}(X, \mu)$, то $\|h_E\|_p = \mu(E)$. Поэтому для любого $p > 0$ отображение $h_\mu : \mathscr{X}_*(X, \mu) \to L_p(X, \mu)$, где $h_\mu(E) = h_E$, является изометрическим вложением. Через $H(X, \mu)$ обозначим всевозможные линейные комбинации функции из класса $\{h_E \mid E \in \mathscr{L}_*(X, \mu)\}$. Тогда $H(X, \mu) \subset \mathscr{Z}_p(X, \mu)$ для всех $p>0$. Множество $H(X, \mu)$ состоит из всех простых функций [15]. Из определения интеграла [15] при помощи простых функций вытекает

Лемма 4.2. *Множество $H(X, \mu)$ всюду плотно в $L_p(X, \mu)$ для всех $p>0$.*

Следствие 4.3. *Для каждого $p>0$ веса пространств $\mathscr{Z}_*(X, \mu)$ и $L_p(X, \mu)$ равны.*

Лемма 4.4. *Если мера μ удовлетворяет условию 3^0 из 2, то $d(X) \leq d(\mathscr{Z}_*(X, \mu))$.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \mathscr{Z}_*(X, \mu)$ — дискретное семейство непустых открытых в X множеств. Тогда $\mu(U_\alpha) = a_\alpha > 0$ для всех $\alpha \in A$, а $\rho_\mu(U_\alpha, U_\beta) = a_\alpha + a_\beta$ при $\alpha \neq \beta$. Значит, $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ есть дискретное подпространство пространства $\mathscr{Z}_*(X, \mu)$. Учитывая, что пространство X — паракомпактно, получаем неравенство $d(X) \leq d(\mathscr{Z}(X, \mu))$.

В дальнейшем будем еще предполагать, что пространство X — локально-компактно. Тогда существует дизъюнктное открытое покрытие $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ из σ-компактных подмножеств.

Лемма 4.5. *Если $E \in \mathscr{Z}_*(X, \mu)$, то существует открытое σ-компактное множество U, такое, что $\mu(E \setminus U) = 0$*

Доказателство. Множество $A_n = \{\alpha \in A \mid \mu(E \cap X_\alpha) \geq \frac{1}{n}\}$ конечно для любого $n \in N$. Множество $U = \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in \cup\{A_n \mid n \in N\}$ — искомое.

Лемма 4.6. *Пусть база $\mathscr{B}$ пространства X удовлетворяет условиям: если $U, V \in \mathscr{B}$, то $U \cup V \in \mathscr{B}$; $[U]$ компактно для всех $U \in \mathscr{B}$. Тогда множество $\mathscr{B}$ всюду плотно в $\mathscr{Z}_*(X, \mu)$. В частности, $w(\mathscr{Z}_*(X, \mu)) \leq w(X)$.*

Доказательство. Вытекает из леммы 4.5. и условия регулярности меры μ.

Пример 4.7. Рассмотрим обозначения из примера 4.1. Тогда множество $\{E \subset N \mid$ множество E конечно$\}$ всюду плотно в $\mathscr{Z}(bN, \eta_{bN})$.

Поэтому $w(\mathscr{Z}(bN, \eta_{bN}) = \aleph_0$ для каждой компактификации bN. В частности, $w(\beta N) = 2^{\aleph_0}$ и $W(\mathscr{L}(\beta N, \eta\, \beta_N) = \aleph_0$. Поэтому равенство $w(\mathscr{Z}_*(X, \mu)) = w(X)$ не всегда справедливо. В случае локально-компактных групп имеет место

Лемма 4.8. *Пусть μ_G — мера Хаара на локально-компактной группе G. Тогда $w(G) = w(\mathscr{Z}_*(G, \mu_G))$.*

Доказательство. В силу леммы 4.4, достаточно рассмотреть случай, когда группа G σ-компактна. Семейство $\gamma = \{[U] \mid U$ открыто в G и $[U]$ компактно$\}$ всюду плотно в $\mathscr{Z}_*(G, \mu_G)$. Поэтому существует всюду плотное в $\mathscr{Z}_*(G, \mu_G)$ множество $\mathscr{B} = \{P_\alpha \mid \alpha \in A\}$, где $|A| = w(\mathscr{Z}_*(G, \mu_G))$. Множества P_α — компактны и являются множествами типа G_δ. Тогда для любого $\alpha \in A$ существует такой компактный нормальный делитель $H_\alpha \subset G$, что $P_\alpha = H_\alpha \cdot P_\alpha = P_\alpha \cdot H_\alpha$ и пространство G/H_α — метризуемо (см. [15], § 64, теорема 5). Положим $H = \cap\{H_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Тогда $w(G/H) = |A|$. Докажем, что $H = \{e\}$. Допустим, что $|H| > 1$. На G/H рассмотрим фактор-меру $\mu_{G/H}$ меры μ_G. Существует BL-гомеоморфизм $\varphi: (G/H \times H, \mu_{G/H} \otimes \mu_H) \to (G, \mu_G)$. Пусть $\pi: G \to G/H$ — естественное проектирование. Фиксируем окрестность U-единицы в G/H и окрестность V-единицы в H, для которых $\mu_{G/H}(U) = a > 0$ и $0 < \mu_H(V) = b \leq 2^{-1}$. Тогда $\mu_G(\pi^{-1}U) = a$ и $\mu_G(\varphi(U \times V)) = ab$. Для некоторого $\alpha \in A$ имеем $\rho_{\mu_G}(P_\alpha, \varphi(U \times V)) \leq 2^{-3}ab$. Тогда $\mu_G(P_\alpha \cap \pi^{-1}U) \geq \mu_G(P_\alpha \cap \varphi(U \times V)) \geq 3 \cdot 2^{-3}ab$. Пусть

---

* $\mathscr{Z}_*(X, \mu) = \{H \in \mathscr{Z}(X, \mu) \mid \mu(H) < \infty\}$.

$\mu_{G/H}(\pi P_\alpha)=c$. Тогда $\mu_G(\pi^{-1}\pi P_\alpha)=c>\mu_G(P_\alpha)$. Поэтому найдется точка $x\in G/H$, такая, что $x\in\pi P_\alpha$ и $\pi^{-1}(x)\setminus P_\alpha\neq\varnothing$. Значит, $\overline{P_\alpha}\setminus H\neq P_\alpha$. Полученное противоречие показывает, что $H=\{e\}$. Итак, $w(G)=w(G/H)=|A|$. Утверждение доказано.

Следствие 4.9. *Для компактных групп X и Y с вероятностными мерами Хаара на них следующие утверждения равносильны:*
1. $w(X)=w(Y)$.
2. *Пространства X и Y — B-гомеоморфны.*
3. *Пространства X и Y — L-гомеоморфны.*
4. *Пространства X и Y — BL-гомеоморфны.*
5. *Пространства $\mathscr{L}(X, \mu_X)$ и $\mathscr{L}(Y, \mu_Y)$-гомеоморфны.*
6. $w(\mathscr{L}(X, \mu_X))=w(\mathscr{L}(Y, \mu_Y))$.
7. *Для любого $p>0$ существует линейная мультипликативная изометрия $\varphi_p: L_p(X, \mu_X)\to L_p(Y, \mu_Y)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Архангельский, В. И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., 1974.
2. К. Куратовский. Топология. Т. 1. М., 1966.
3. R. Engelking. General Topology. Warszawa, 1977.
4. М. М. Чобан. О бэровских изоморфизмах и бэровских топологиях. Решение одной задачи Комфорта. *Доклады АН СССР*, **279**, 1984, № 5
5. К. Партасарати. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. М., 1983.
6. Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.
7. Н. Бурбаки. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М., 1967.
8. А. Пелчинский. Линейные предложения, линейные усреднения и их применения. М., 1970.
9. М. М. Чобан. Топологическое строение подмножеств топологических групп и их фактор-пространств. — В: Топологические структуры и алгебраические системы. Кишинев, 1977, 117—163.
10. Н. Бурбаки. Интегрирование. Векторное интегрирование, мера Хаара, свертка и представления. М., 1970.
11. Л. С. Понтрягин. Непрерывные группы. М., 1973.
12. A. M. Gleason. Spaces with a compact Lie group of transformations. *Proc. Amer. Moth. Soc.*, **1**, 1950, 35—43.
13. Е. Г. Скляренко. О топологическом строении локально-бикомпактных групп и их фактор-пространств. *Матем. сб.*, **60** (102), № 1, 1963, 63—88.
14. М. М. Чобан. Непрерывные образы полных пространств. *Труды Моск. матем. об-ва*, **30**, 1974, 23—57.
15. П. Халмош. Теория меры. М., 1953.

Тирасполь, 278000 Молдавская ССР
ул. Одесская, 90, кв. 50

Поступила 8. 10. 1984