Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

КОГОМОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛОГ V^n-КОНТИНУУМОВ И ТЕОРЕМА МАЗУРКЕВИЧА

С. Т. СТЕФАНОВ

Дается определение одного класса компактов, более узкого чем класс V^n-континуумов, введенного П. С. Александровым, и изучаются свойства пространств из этого класса. Получено усиление одной теоремы Мазуркевича.

В своей известной работе [1] П. С. Александров дает одно усиление понятия канторова многообразия, введенного П. С. Урысоном. Напомним, что компакт называется канторовым n-многообразием, если любая перегородка в нем имеет размерность $\geqq n-1$. В. Гуревичем и Л. Тумаркиным доказано, что каждый конечномерный компакт X с $\dim X \geqq n$ содержит канторовое n-многообразие. Оказывается, что каждый такой компакт содержит подмножество, принадлежащее более узкому классу компактов — т. н. V^n-континуумов. Определение V^n-континуума использует понятия александровского поперечника $\alpha^n(X)$, равного инфимуму всех $\varepsilon>0$, длякоторых существует ε-отображение X в n-мерный полиэдр.

Определенне (Александров). *Компакт X называется V^n-континуумом, если для каждых двух дизъюнктных замкнутых подмножеств F_1 и F_2 с непустой внутренностью существует такое положительное σ, что для любой перегородки C между F_1 и F_2 справедливо неравенство*

$$\alpha^{n-2}(C)>\sigma.$$

Каждый V^n-континуум является канторовым n-многообразием, т. е. если обозначить через U^n класс канторовых n-многообразий, справедливо включение $V^n \subset U^n$. Ясно также, что $U^n \subset U^{n-1}$ и $V^n \subset V^{n-1}$. Отметим, что пространства класса U^n и V^n могут иметь размерность больше n.

Теорема (Александров). *Каждый конечномерный компакт X с $\dim X \geqq n$ содержит V^n-континуум.*

В случае бикомпактов в дефиниции александровского поперечника и V^n-континуума ε-отображение заменяется ω-отображением, где ω — открытое покрытие X, и тогда все результаты автоматически переносятся на бикомпакты. Это справедливо и для результатов настоящей заметки, где мы ограничимся метрическим случаем. Отметим также работу Кузьминова [2], в которой теоретико-множественная размерность dim заменяется когомологической размерностью $\dim_G$, соответственно вводится понятие V^n-континуума относительно абелевой группы G и доказывается аналог теоремы Александрова.

В первой части настоящей заметки мы даем ответ на такой вопрос: Если в теореме Александрова заменить размерностное условие $\dim X \geqq n$ когомологическим $H^n(X;\, G) \neq 0$, возможно ли определить класс континуумов с „хорошими" свойствами, аналогичный классу V^n и такой, что любой компакт X с $H^n(X; G)\neq 0$ содержит подкомпакт из этого класса? Оказывается, что это возможно сделать довольно естественным образом (определение 1), и этот класс обозначен нами V^n_G. Класс V^n_G-континуумов уже класса V^n-континуумов, т. е. каждый V^n_G-континуум является V^n-континуумом (а значит и U^n-континуумом), но обратное, вообще говоря, неверно — например, каждое n-мерное связное многообразие с краем принадлежит классу V^n, но не принадлежит V^n_G. Тем не менее, класс V^n_G-континуумов довольно богат — он содержит все связные n-мерные ориентируемые над G замкнутые многообразия (следствие 1 теоремы 3). Кроме этого, любой компакт в R^n, являющийся совместной границей двух или большего числа областей, является V^{n-1}_G-континуумом для любой группы G.

Во второй части получено одно обобщение классической теоремы Мазуркевича, утверждающей, что если M — подмножество R^n с $\dim M\leqq n-2$, то любые две точки из $R^n\setminus M$ можно соединить континуумом, также лежащим в $R^n\setminus M$. Теорема Мазуркевича обобщена Н. Хаджииванов ым [4] в следующем смысле: Если $M\subset R^n$ и $\dim M\leqq k$, то любые две точки из $R^n\setminus M$ можно соединить там канторовым $(n-k-1)$-многообразием. Другое обобщение получено В. Тодоровым [3], который доказал, что любые две точки из $R^n\setminus M$ можно соединить там даже V^{n-k-1}-континуумом. Естественно ожидать, что не только двухточечные множества из $R^n\setminus M$ можно включить в „хороший" континуум, также лежащий в $R^n\setminus M$. Но даже для трех точек это не следует из упомянутых выше результатов. Мы покажем, что это верно для любого конечного множества из $R^n\setminus M$ (примечание к теореме 4). Более того, мы получим усиление результата Тодорова, заменяя двухточечные множества более разнообразными объектами, а V^{n-k-1}-континуумы — V^{n-k-1}_G-континуумами.

Перейдем теперь к определению класса V^n_G. Для этой цели необходимо ввести когомологический аналог александровского поперечника $\alpha^n(X)$.

Пусть G — область коэффициентов. Будем писать

$$\vartheta^n_G(X)\leqq\sigma,$$

если существует σ-отображение X на Y $f\colon X\xrightarrow{\text{на}} Y$, такое, что гомоморфизм $f^*\colon H^n(Y; G)\to H^n(X; G)$ — тривиален. Таким образом, когомологический поперечник $\vartheta^n_G(X)$ равен инфимуму всех $\sigma>0$, для которых $\vartheta^n_G(X)\leqq\sigma$.

Определение 1. *Компакт X называется V^n_G-континуумом, если для каждых двух дизъюнктных замкнутых подмножеств F_1 и F_2 с непустой внутренностью существует такое $\sigma>0$, что для любой перегородки C между F_1 и F_2 справедливо неравенство*

$$\vartheta^{n-1}_G(C)>\sigma.$$

В таком случае будем писать $X\in V^n_G$. Нетрудно показать, что если $X\in V^n_G$, то $X\in V^n$, так как

$$\alpha^{n-2}(C)\geq\vartheta^{n-1}_G(C). \tag{1}$$

В самом деле, если $\alpha^{n-2}(C)\leqq\sigma$, то существует σ-отображение $f\colon C\to P$, где P—$(n-2)$-мерный полиэдр. Рассмотрим f как отображение $f\colon C\to f(C)$, тогда гомоморфизм $f^*\colon H^{n-1}(f(C); G)\to H^{n-1}(C; G)$ тривиален, так как

$\dim f(C) \leqq n-2$. Следовательно, $\vartheta_G^{n-1}(C) \leqq \sigma$, откуда следует неравенство (1). Это означает, что

$$V_G^n \subset V^n,$$

т. е. класс V_G^n-континуумов у́же класса V^n-континуумов. Обратное включение неверно — например, n-мерный замкнутый шар B^n является V^n-континуумом, но не и V_G^n-континуумом ни для какой G, так как содержит когомологически тривиальные перегородки. То же самое справедливо для любого многообразия с краем. Отметим, что $V_G^n \not\subset V_G^{n-1}$ — например, n-мерная сфера S^n является V_G^n-континуумом, но не и V_G^{n-1}-континуумом. В случае V^n-континуумов, однако, справедливо включение $V^n \subset V^{n-1}$.

Ясно, что если $X \in V_G^n$, то каждая перегородка в X обладает нетривиальной $(n-1)$-мерной когомологической группы $\operatorname{mod} G$. Это наводит нас на следующее определение, являющееся аналогом определения канторова n-многообразия.

Определение 2. *Компакт X называется U_G^n-континуумом, если для каждой перегородки C в X $H^{n-1}(C; G) \neq 0$.*

Ясно, что исполнены включения

$$V_G^n \subset U_G^n \subset U^n.$$

В конце заметки мы покажем, что $V_G^2 \neq U_G^2$. То же самое справедливо для любого $n > 2$. Для $n = 1$ классы V_G^1 и U_G^1 равны между собой и совпадают с классом всех континуумов.

В дальнейшем под циклом $\operatorname{mod} G$ в метрическом пространстве X мы понимаем истинный цикл с компактным носителем в смысле Вьеториса с коэффициентами из G. Если два цикла z_1 и z_2 гомологичны, будем писать $z_1 \sim z_2$. Носитель цикла z будем обозначать через $\tilde{z}$. Если z — цикл в X, и A — подмножество X, будем говорить, что z зацеплен с A в X, если $z \nsim 0$ в $X \setminus A$.

Лемма 1. *Пусть z — $(n-p-1)$-мерный цикл $\operatorname{mod} G$ в R^n, зацепленный с компактом A в R^n, и V — открытая окрестность носителя $\tilde{z}$, такая, что $\overline{V} \cap A = \varnothing$. Тогда существует $\sigma > 0$, такое, что для любого подкомпакта $X \subset A$, зацепленного с z в R^n, для любого компакта Y, непересекающего V, и для любого σ-сдвига $\varphi: X \to Y$ гомоморфизм $\varphi^*: H^p(Y; G) \to H^p(X; G)$ — нетривиален.*

Доказательство. Положим $\sigma = 1/2\, \rho(A, \overline{V})$ (здесь ρ-метрика в R^n). Пусть компакт $X \subset A$ зацеплен с z в R^n и $\varphi: X \to Y$ — σ-сдвиг X в Y, где $Y \cap V = \varnothing$. Рассмотрим линейную гомотопию $H(x, t) = (1-t)x + t\varphi(x)$. Ясно, что $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = \varphi(x)$ и $H(X \times I) \subset 0_\sigma X \subset R^n \setminus V$. Положим $f_0(x) = (x, 0)$ и $f_1(x) = (x, 1)$. Диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "H"] & R^n \setminus V \\ X \arrow[u, "f_1"] \arrow[r, "\varphi"'] & Y \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "H"] & R^n \setminus V \\ X \arrow[u, "f_0"] \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd},$$

где i и j — вложения, коммутативны. Но $f_0^* = f_1^*$, следовательно, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^p(X\times I;\ G) & \xleftarrow{H^*} & H^p(R^n\setminus V;\ G) \\ {\scriptstyle f_0^*=f_1^*}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle j^*} & \downarrow{\scriptstyle i^*} \\ H^p(X;\ G) & \xleftarrow[\varphi^*]{} & H^p(Y;\ G) \end{array} .$$

Чтобы доказать, что $\varphi^*\neq 0$, достаточно показать, что $j^*\neq 0$. Из естественности изоморфизма двойственности Александера следует, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^p(X;\ G) & \approx & H_{n-p-1}(R^n\setminus X;\ G) \\ {\scriptstyle j^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle k_*} \\ H^p(R^n\setminus V;\ G) & \approx & H_{n-p-1}(V;\ G) \end{array}$$

— коммутативна (здесь k-вложение). Но $k_*\neq 0$, так как по условию $z\nsim 0$ в $R^n\setminus X$ и, следовательно, $j^*\neq 0$.

Лемма 2. *Пусть z—$(n-p-1)$ — мерный цикл* $\mathrm{mod}\, G$ *в R^n, зацепленный там с компактом A. Тогда существует $\gamma>0$, такое, что для любого компакта $X\subset A$, зацепленного с z в R^n, справедливо неравенство*

$$\vartheta_G^p(X)>\gamma.$$

Доказательство. Докажем, что число $\gamma=1/8\,\rho(A,\ \tilde{z})$ удовлетворяет условиям леммы. Допустим противное — что существует компакт $X\subset A$, зацепленный с z, для которого $\vartheta_G^p(X)\leq\gamma$, т. е. существует γ-отображение X на Y $f\colon X\xrightarrow{\text{на}} Y$, такое, что гомоморфизм $f^*\colon H^p(Y;\ G)\to H^p(X;\ G)$ — тривиален. Пусть ω — такое конечное открытое покрытие Y, что $\mathrm{mesh}\, f^{-1}(\omega)<\gamma$. Ясно, что покрытия ω и $f^{-1}(\omega)$ — комбинаторно эквивалентны. Обозначим через P их общий нерв и пусть $\varphi\colon X\to P$ и $\psi\colon Y\to P$ — канонические отображения X и Y в P. Тогда для любого $x\in X$ точки $\varphi(x)$ и $\psi f(x)$ содержатся в одном и том же симплексе P, значит $\varphi\sim\psi f$. Дефинируем отображение $\lambda\colon P\to R^n$ следующим образом: Если вершина $b\in P$ сопоставлена множеству $U\in f^{-1}(\omega)$, то $\lambda(b)=a$, где a — произвольная точка U. Продолжим линейно λ до $\lambda\colon P\to R^n$. Ясно, что $\lambda\varphi$ является 2γ-сдвигом, так как если $x\in\bigcap_{i=1}^{m} U_i$, где $U_i\in f^{-1}(\omega)$ и вершина b_i сопоставлена U_i, то $\varphi(x)\in[b_1,\ \ldots,\ b_m]$, и значит $\lambda\varphi(x)\in[\lambda(b_1),\ \ldots,\ \lambda(b_m)]$. Но $\lambda(b_i)\in U_i$ и $\mathrm{diam}\, U_i<\gamma$, следовательно, $\|x-\lambda\varphi(x)\|<2\gamma$. Положим $V=0_{4\gamma}\tilde{z}$. Тогда $\bar{V}\cap A=\varnothing$, и если взять $\sigma=1/2\,\rho(A,\ \bar{V})$, то можно применить лемму 1 для отображения $\lambda\varphi$. Для этой цели надо показать, что $\lambda\varphi$ является σ-сдвигом; достаточно доказать, что $2\gamma\leq\sigma$, т. е. что $1/2\,\rho(A,\ \tilde{z})\leq\rho(A,\ \bar{V})$. Пусть $a\in A$ и $\vartheta\in\bar{V}$ такие, что $\|a-\vartheta\|=\rho(A,\ \bar{V})$. Существует $z_0\in\tilde{z}$, такое что $\|\vartheta-z_0\|\leq 4\gamma=1/2\rho(A,\ \tilde{z})$. Тогда $\rho(A,\ \tilde{z})\leq\|a-z_0\|\leq\|a-\vartheta\|+\|\vartheta-z_0\|\leq\rho(A,\ \bar{V})+1/2\,\rho(A,\tilde{z})$ откуда следует, что $1/2\,\rho(A,\tilde{z})\leq\rho(A,\bar{V})$. Положим теперь $Y'=0_{4\gamma}X$. Тогда $Y'\cap V=\varnothing$. Очевидно $\lambda(P)\subset Y'$, и можно рассматривать λ как отображение $\lambda\colon P\to Y'$. Образуем композиции $\lambda\varphi\colon X\to Y'$ и $\lambda\psi f\colon X\to Y'$. Так как $\lambda\varphi\sim\lambda\psi f$, то $(\lambda\varphi)^*=f^*(\lambda\psi)^*$. По предположению $f^*=0$, значит и $(\lambda\varphi)^*=0$, что противоречит лемме 1.

Следствие. *Если X — конечномерный компакт с $H^p(X;\ G)\neq 0$, то $\vartheta_G^p(X)>0$.*

В самом деле, мы можем предполагать, что X вложен в некоторое R^n и, следовательно, зацеплен там с каким-нибудь $(n-p-1)$-мерным циклом $\bmod G$.

Напомним, что цикл z в X неприводимо зацеплен в X с компактом A, если $z \not\sim 0$ в $X \setminus A$, но $z \sim 0$ в $X \setminus A'$ для любого собственного подкомпакта $A' \subsetneqq A$.

Следующая теорема аналогична теореме II из работы Александрова [1].

Теорема 1. *Пусть компакт X неприводимо зацеплен в R^n с $(n-p-1)$-мерным циклом z $\bmod G$. Тогда X является V_G^p-континуумом.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — замкнутые дизъюнктные подмножества X с непустой внутренностью $U_1 = \operatorname{int} F_1$, $U_2 = \operatorname{int} F_2$. Так как X неприводимо зацеплен с z, существуют $(n-p)$-мерные цепи x_1 и x_2, такие, что $\partial x_1 = \partial x_2 = z$ и $\widetilde{x}_1 \cap X \subset U_1$, $\widetilde{x}_2 \cap X \subset U_2$. Положим $A = X \setminus (U_1 \cup U_2)$. Тогда каждая перегородка C в X между F_1 и F_2 содержится в A и по лемме Александера C зацеплена с циклом $\zeta = x_1 - x_2$ в R^n. Ясно, что $A \cap \widetilde{\zeta} = \varnothing$. Согласно лемме 2, существует $\sigma > 0$, такое, что $\vartheta_G^{p-1}(C) > \sigma$ для каждой такой перегородки.

Теорема 2. *Любой конечномерный компакт X с $H^p(X; G) \neq 0$ содержит V_G^p-континуум.*

Доказательство. Можно предполагать, что X вложен в R^n, тогда $H_{n-p-1}(R^n \setminus X; G) \neq 0$. Пусть z — $(n-p-1)$-мерный цикл в $R^n \setminus X$, зацепленный с X в R^n. Тогда существует подкомпакт $X' \subset X$, неприводимо зацепленный с z, и значит $X' \in V_G^p$.

Будем говорить, что компакт X — неприводимо p-коциклический $\bmod G$, если $H^p(X; G) \neq 0$, но для любого собственного подкомпакта $X' \subsetneqq X$ $H^p(X'; G) = 0$.

Теорема 3. *Каждый конечномерный неприводимо p-коциклический $\bmod G$ компакт X является V_G^p-континуумом.*

Доказательство. Если $X \subset R^n$, то ясно, что X неприводимо зацеплен в R^n с каким-нибудь $(n-p-1)$-мерным циклом и, согласно теореме 1, $X \in V_G^p$.

Отметим, что обратное неверно — пусть, например, X есть бикомпактное расширение двумерного открытого диска, нарост которого гомеоморфен S^2. Нетрудно показать, что $X \in V_G^2$, но, очевидно, X не является неприводимо 2-коциклическим компактом.

Следствие 1. *Каждое n-мерное связное, ориентируемое над G замкнутое многообразие является V_G^n-континуумом.*

Действительно, каждое такое многообразие есть неприводимо n-коциклический $\bmod G$ компакт. Отсюда следует, в частности, что каждое n-мерное связное замкнутое многообразие является $V_{Z_2}^n$-континуумом, так как каждое такое многообразие ориентируемо над Z_2.

Следствие 2. *Каждый компакт в R^n, являющийся совместной границей двух или большего числа областей, — есть V_G^{n-1}-континуум.*

В этом случае каждый такой компакт неприводимо зацеплен в с 0-мерным циклом и достаточно применить теорему 1.

Следствие 3. *Если $\dim_G X = p$ (где $\dim_G$ — когомологическая размерность с коэффициентами из G), то в X существует V_G^{p-1}-континуум.*

В самом деле, если $\dim_G X = p$, то в X существует подкомпакт $X_0 \subset X$ с $H^{p-1}(X_0; G) \neq 0$, и остается применить теорему 2.

Переходим теперь к доказательству обобщения теоремы Мазуркевича, упомянутому в начале.

Теорема 4. *Пусть M — подмножество R^n с $\dim M \leq k$, и N—$(n-k-1)$ - мерное связное замкнутое дифференцируемое многообразие в R^n. Тогда каждое замкнутое подмножество N, не содержащее точек из M, содержится в V_G^{n-k-1}-континууме, также не имеющим общих точек с M.*

Доказательство. Пусть A — замкнутое подмножество N, такое, что $A \cap M = \emptyset$. Как известно, многообразие N обладает в R^n трубчатой окрестностью L, гомеоморфной $N \times B^{k+1}$. Будем предполагать для простоты, что $L \equiv N \times B^{k+1}$ и, если $x \in N$, то $x \equiv (x, 0)$. Положим $k(x) = \max\{1, \rho(x, A)\}$ и дефинируем $\varphi: L \to L$ следующим образом: $\varphi(x, y) = (x, k(x)\, y)$. Ясно, что отображение φ сжимает в точку шары вида $\{x\} \times B^{k+1}$, где $x \in A$, и гомотопно идентитету на L с гомотопией

$$H((x, y), t) = (x, (1-t)\, y + tk(x)\, y).$$

Отметим, что φ является гомеоморфизмом на множестве $(N \setminus A) \times B^{k+1}$. Положим теперь $M' = \varphi^{-1}(M)$. Тогда $\dim M' \leq k$, так как $\varphi(M') \subset M$ и $M' = \varphi^{-1}(M) \subset (N \setminus A) \times B^{k+1}$, а φ^{-1} является гомеоморфизмом на последнем множестве. Рассмотрим следующее покрытие k-мерной сферы

$$S^k = \bigcup_{i=1}^{k+1} \Phi_{\pm i}, \text{ где } \Phi_{+i} = \{x \in S^k \mid x_i \geq \frac{1}{\sqrt{k+1}}\} \text{ и } \Phi_{-i} = -\Phi_{+i}.$$

Положим $F_{\pm i} = N \times \Phi_{\pm i}$. Так как размерность множества M' не превосходит k, в R^n существуют перегородки C_i между F_{+i} и F_{-i}, такие, что $C = \bigcap_{i=1}^{k+1} C_i \subset R^n \setminus M'$. Фиксируем произвольное $x_0 \notin A$ и рассмотрим множество $\{x_0\} \times S^k$, гомеоморфное k-мерной сфере. Пусть z^k является базисным циклом $\bmod G$ множества $\{x_0\} \times S^k$. Мы докажем, что z^k зацеплен с C в R^n. Действительно, допустим, что $\partial x^{k+1} = z^k$, где $\widetilde{x}^{k+1} \subset R^n \setminus C$. Но система множеств $\{x_0\} \times \Phi_{\pm i}$ не является существенной в $R^n \setminus C$, значит и в $\widetilde{x}^{k+1}$, тогда каноническая проекция $\pi: \{x_0\} \times S^k \to S^k$ обладает продолжением $\widetilde{\pi}: \widetilde{x}^{k+1} \to S^k$, следовательно, $\widetilde{\pi}(z^k) = \widetilde{\pi}(\partial x^{k+1}) = \partial \widetilde{\pi}(x^{k+1})$, т. е. цикл $\widetilde{\pi}(z^k)$ гомологичен нулю в S^k, что является противоречием. Тогда у C есть подкомпакт $C_0 \subset C$, неприводимо зацепленный с z^k в R^n. Ясно, что $C_0 \subset L$, так как $FrL = N \times S^k$ (это следует из теоремы Брауэра об инвариантности), и $C \cap FrL = \emptyset$. Рассмотрим теперь цикл $\varphi(z^k)$ и множество $\varphi(C_0)$ (цикл $\varphi(z^k)$ невырожден, потому что $x_0 \notin A$). Они зацеплены в R^n, так как получаются из z^k и C_0 с помощью деформации H, во время которой не пересекаются. Пусть K — подкомпакт $\varphi(C_0)$, неприводимо зацепленный с $\varphi(z^k)$ в R^n. Тогда, согласно теореме 1, является V^{n-k-1} - континуумом. Остается показать, что $K \subset R^n \setminus M$ и $A \subset K$. Первое включение следует немедленно из $K \subset \varphi(C)$ и $\varphi(C) \subset R^n \setminus M$. Чтобы доказать, что $A \subset K$, допустим, что существует точка $a \in A \setminus K$. Тогда $\varphi^{-1}(a) = \{a\} \times B^{k+1}$ и $\varphi^{-1}(a) \cap \varphi^{-1}(K) = \emptyset$. Отметим, что z^k зацеплен с $\varphi^{-1}(K)$ в R^n, так как $\varphi(z^k)$ зацеплен с K там же. Пусть z_0^k есть базисный цикл $\bmod G$ множества $\{a\} \times S^k$, тогда $z_0^k \sim 0$ в $R^n \setminus \varphi^{-1}(K)$. Но $z_0^k \sim z^k$ в $N \times S^k$, так как N связно, а значит и в $R^n \setminus \varphi^{-1}(K)$, следовательно, $z^k \sim 0$ в $R^n \setminus \varphi^{-1}(K)$, что является противоречием с тем фактом, что z^k зацеплен с $\varphi^{-1}(K)$ в R^n.

Теорема доказана.

Примечание. Теорема 4 справедлива в случае произвольного конечного A, так как любое конечное множество можно включить в дифференцируемое многообразие N. Тем самым получаем усиление теоремы Тодорова [3], в которой A—двухточечное множество, и утверждается существование V^{n-k-1}-континуума в $R^n \setminus M$, содержащего A. Отметим также, что теорема верна для таких компактов A, для которых существует гомеоморфизм R^n на себя переводящий A в подмножество дифференцируемого многообразия N.

В заключение мы построим пример двумерного полиэдра P, который является V^2 и U^2_G-континуумом, но не является V^2_G-континуумом.

Пусть T_+ — двумерный тор, который получается вращением окружности $S_+ : (x-2)^2+(z-1)^2=1$; $y=0$ вокруг оси z, а T_- получается вращением окружности $S_- : (x-2)^2+(z+1)^2=1$; $y=0$ также вокруг z. Ясно, что $T_+ \cap T_- = S_0$, где S_0 — окружность с уравнением $x^2+z^2=4$; $y=0$. Продеформируем множество $S_+ \cup S_-$ в точку $(2, 0, 0)$, оставляя на месте S_0, а также множество $(-S_+) \cup (-S_-)$. Полученное множество P является двумерным полиэдром. Ясно, что P есть V^2-континуум, так как любые два маленьких диска в P можно включить в больший диск, а $B^2 \in V^2$. Докажем теперь, что P является U^2_G-континуумом для любой группы G. Пусть P_+ и P_- — образы T_+ и T_- при деформации. Тогда P_+ и P_- — совместные границы двух областей в R^3, и, следовательно, являются V^2_G-континуумами (следствие 2 теоремы 3). Пусть C — произвольная перегородка в P, и $P \setminus C = U_1 \cup U_2$. Надо показать, что $H^1(C; G) \neq 0$. Предположим, что $C \not\supset S_0$. Тогда, например, P_+ пересекает одновременно U_1 и U_2. Положим $C_+ = C \cap P_+$ и $C_- = C \cap P_-$, тогда C_+ — перегородка в P_+, и значит $H^1(C_+; G) \neq 0$, так как $P_+ \in U^2_G$. Рассмотрим точную последовательность

$$H^1(C; G) \to H^1(C_+; G) \oplus H^1(C_-; G) \to H^1(C_+ \cap C_-; G).$$

Третий член равен 0, потому что $C_+ \cap C_- = C \cap S_0 \neq S_0$, второй член отличен от 0, а значит и первый отличен от 0, т. е. $H^1(C; G) \neq 0$. Предположим теперь, что $C \supset S_0$. Отметим, что существует ретракция $r : P \to S_0$. Если $j : S_0 \to C$ — вложение, а $r' : C \to S_0$ рестрикция $r' = r|_C$, то $r'j = id$, значит $j^* r'^* = id : H^1(S_0; G) \to H^1(S_0; G)$. Следовательно, и в этом случае $H^1(C; G) \neq 0$.

Множество P, однако, не является V^2_G-континуумом. Действительно, пусть $F_+ = \{(x, y, z) \in P \mid z \geq 1\}$ и $F_- = \{(x, y, z) \in P \mid z \leq -1\}$. Тогда, пересекая P плоскостями, параллельными плоскости Oxy, можно получить перегородки между F_+ и F_- с произвольно маленьким ϑ^1_G-поперечником.

Автор благодарит Н. Г. Хаджииванова за ценные замечания и внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров. Континуумы (V^p). — В: Теория размерности и смежные вопросы М., 1978, 302—313.
2. В. И. Кузьминов. О континуумах V^n. *Доклады АН СССР*, **139**, 1961, 24—27.
3. V. T. Todorov. On a Mazurkiewicz theorem. *Serdica*, **6**, 1980, 240—244.
4. Н. Г. Хаджииванов. О канторовых многообразиях. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 941—944.

ИЧС „Г. А. Насър"
София

Поступила 8. 10. 1984