Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

# GLEICHVERTEILUNGSEIGENSCHAFTEN ZUFÄLLIGER SUMMEN, DIE VON EINEM MARKOFFSCHEN PROZESS ABHÄNGEN

GEORGI S. ČOBANOV

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir Gleichverteilungseigenschaften von Summen unabhängiger Zufallsvariablen, die durch die Realisierungen eines homogenen Markoffschen Prozesses in diskreter Zeit mit kontinuierlichem Zustandsraum bestimmt werden.

**0. Einleitung.** Es bezeichne $G$ eine lokalkompakte Abelsche Hausdorffsche topologische Gruppe: $\mathscr{G}$ sei die $\sigma$-Algebra aller Borelmengen von $G$, $\mathsf{P}$ — die Menge aller regulären Verteilungsgesetze auf $\mathscr{G}$ und $\mu$ — das Haarsche Maß auf $\mathscr{G}$. Es sei $R^1_+ = [0, +\infty)$. $\mathscr{R}^1_+$ — die $\sigma$-Algebra der Borelmengen von $R^1_+$ und $\mu_+$ — das Lebesgue Maß auf $\mathscr{R}^1_+$.

Wir bezeichnen mit $\{\tau_n\}$ einen festgewählten homogenen Markoffschen Prozeß in diskreter Zeit mit Zustandsraum $R^1_+$, Übergangswahrscheinlichkeiten $p(t, T)$, $t \in R^1_+$, $T \in \mathscr{R}^1_+$ und Anfangsverteilung $q(\Delta)$, $\Delta \in \mathscr{R}^1_+$. Wir nehmen an, daß die Verteilungsgesetze $p(t, \cdot)$, $t \in R^1_+$ und $q(\cdot)$ bezüglich $\mu_+$ Dichten besitzen, d. h.

$$p(t, T) = \int_T p_0(t, u)\mu_+(du), \ t \in R^1_+, \ T \in \mathscr{R}^1_+ \tag{0.1}$$

$$q(\Delta) = \int_\Delta q_0(t)\mu_+(dt), \quad \Delta \in \mathscr{R}^1_+ \tag{0.2}$$

Weiterhin existiere der Grenzwert

$$v_0(u) = \lim_{n\to\infty} p_0^{(n)}(t, u) \tag{0.3}$$

und sei für $\mu_+$ — fast alle $u \in R^1_+$ streng positiv mit

$$\int_{R^1_+} p_0(u)\mu_+(du) = 1.$$

Wir setzen

$$p(\Delta) = \int_\Delta p_0(u)\mu_+(du), \quad \Delta \in \mathscr{R}^1_+.$$

Der Markoffsche Prozeß $\{\tau_n\}$ besitze weiterhin eine einzige ergodische Klasse $\mathscr{E}$. Die oben erwähnten Eigenschaften des Markoffschen Prozesses setzen wir stets voraus, ohne dies in den einzelnen Sätzen extra hervorzuheben.

Es sei $\varkappa_{(1)} : R^1_+ \to \mathsf{P}$ eine schwach stetige Abbildung. Jeder Realisierung $\{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$ der Prozesses $\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots\}$ ordnen wir das Verteilungsgesetz

$$\varkappa_{\{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\}} = \varkappa_{t_0} \otimes \varkappa_{t_1} \otimes \cdots \otimes \varkappa_{t_n} \otimes \cdots$$

auf der $\sigma$-Algebra $\mathscr{G} \otimes \mathscr{G} \otimes \cdots$ zu. Ist nun $\xi_n$ für jedes $n = 0, 1, \ldots$ ein zufälliges und gemäß $\varkappa_{t_n}$ verteiltes Element in $(G, \mathscr{G})$, so bezeichnen wir mit $V_q$ das Verteilungsgesetz von $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$. Auf Grund von (0.1) und (0.2) existiert die bedingte Verteilung (hierzu siehe z. B. [5, S. 223])

$$(0.4)\qquad \lambda_{t,u,n}(\cdot)=V_{\delta_t}\Big(\sum_{k=0}^{n}\xi_k\in(\cdot)/\tau_n=u\Big).$$

Ferner bezeichnen wir

$$(0.5)\qquad \lambda_{q,n}(\cdot)=V_q\Big(\sum_{k=0}^{n}\xi_k\in(\cdot)\Big).$$

Unser Ziel ist, die Gleichverteilungseigenschaften der Folgen $\{\lambda_{t,u,n},\ n=0, 1, \ldots\}_\Gamma$ und $\{\lambda_{q,n},\ n=0, 1, \ldots\}_\Gamma$ zu untersuchen. Eine derartige Untersuchung wurde in [6] von Prehn gemacht, wobei anstelle des Markoffschen Prozesses $\{\tau_n\}$ eine Markoffsche Kette mit abzählbarem Zustandsraum betrachtet wurde. In unseren Ausführungen stützen wir auf die Ideen und Beweistechnik der Arbeiten [1, 2] von J. Kerstan und K. Matthes.

Im folgenden bezeichnen wir stets mit $P_s$ die Menge aller bezüglich des Haarschen Maßes $\mu$ absolutstetigen Verteilungsgesetze aus $P$ und mit $\mathrm{Var}(\nu)$ die totale Variation des signierten Maßes $\nu$.

Definition. *Jeder Folge $\{\nu_n\}$ von Verteilungsgesetzen auf $\mathcal{G}$ ordnen wir die Menge $V(\{\nu_n\})$ derjenigen $x$ aus $G$ zu, die für alle Verteilungsgesetze $\sigma\in P_s$ der Bedingung $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\sigma*\nu_n-\delta_x*\sigma*\nu_n)=0$ genügen. $V(\{\nu_n\})$ ist stets eine Untergruppe der Gruppe $G$. $V(\{\nu_n\})$ heißt die Verschiebungsgruppe der Folge $\{\nu_n\}$.*

Im Abschnitt 1. der vorliegenden Arbeit wird die Verschiebungsgruppe $V(\{\lambda_{t,u,n}\})$ und im Abschnitt 2 — die Verschiebungsgruppe $V(\{\varkappa_{q,n}\})$ bestimmt.

**1. Struktur der ersten Verschiebungshalbgruppe.**

Definition. *Gittergruppe $G(\nu)$ eines Verteilungsgesetzes $\nu$ auf $\mathcal{G}$ nennen wir den Durchschnitt aller abgeschlossenen Untergruppen $H$ von $G$, zu denen ein $x_H$ aus $G$ existiert, so daß $\nu(x_H+H)=1$ ist.*

1.1. Satz (vgl. Kerstan, Matthes, Mecke [3, Theorem 5.2.11.]). Für jedes Verteilungsgesetz $\nu$ auf $\mathcal{G}$ stimmt die Verschiebungsgruppe $V(\{\nu^{(n)}\})$ mit der Gittergruppe $G(\nu)$ überein.

Hier und im folgenden bezeichnet $\{\nu^{(n)}\}$ die Folge aller Faltungspotenzen von $\nu$. Für ein Verteilungsgesetz $\nu$ auf $\mathcal{G}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Tr}(\nu)$ den Träger von $\nu$. Bekanntlich gilt [3, S. 186]

$$1.2\qquad \mathrm{Tr}(\nu)-\mathrm{Tr}(\nu)\subset G(\nu)$$

für alle Verteilungsgesetze $\nu$ auf $\mathcal{G}$. Mit Hilfe von 1.2. ergibt sich:

1.3. Für alle Verteilungsgesetze $\nu_1$, $\nu_2$ auf $\mathcal{G}$ gelten die Beziehungen $G(\nu_1)\subset G(\nu_1*\nu_2)$, $G(\nu_2)\subset G(\nu_1*\nu_2)$.

1.4. Für jede diskrete Verteilung $\{p_n, n=1, 2, \ldots\}$, $p_n>0$, $n=1, 2, \ldots$ und abzählbare Familie $\{\lambda_n(\cdot), n=1, n=1, 2, \ldots\}$ von Verteilungsgesetzen auf $\mathcal{G}$ gilt $G(\lambda_n)\subset G(\alpha)$, wobei $\alpha(\cdot)=\Sigma_{n=1}^{\infty}p_n\lambda_n(\cdot)$ bezeichnet.

Beweis. Es sei $x$ aus $\mathrm{Tr}(\lambda_n)$. Für die offene Umgebung $U$ von $x$ gilt $\lambda_n(U)>0$ und somit $\alpha(V)>0$. Folglich ist $x\in\mathrm{Tr}(\alpha)$, $\mathrm{Tr}(\lambda_n)\subset\mathrm{Tr}(\alpha)$, $G(\lambda_n)\subset G(\alpha)$.

1.5. Für jede schwach stetige Familie von Verteilungsgesetzen $\{\lambda_t(\cdot), t\geq 0\}$ aus $P$ und für jedes Verteilungsgesetz $\pi(\cdot)$ auf $\mathcal{R}^1_+$ gilt $G(\gamma_t)\subset G(\gamma)$ für alle $t\in\mathrm{Tr}(\pi)$, wobei

$$\gamma(\cdot)=\int_{R^1_+}\lambda_t(\cdot)\,\pi(dt)$$

bezeichnet.

**Beweis.** Wir greifen uns ein $t_0$ aus $\mathrm{Tr}(\pi)$ heraus. Es sei $x$ aus $\mathrm{Tr}(\lambda_{t_0})$. Dann gilt für die offene Umgebung $U$ von $x$, $\lambda_{t_0}(U)>0$. Wegen der schwachen Stetigkeit von $\lambda_t$ existiert eine kompakte Umgebung $\Theta$ von $t_0$ mit $\pi(\Theta)>0$ und $\inf_{t\in\Theta}\lambda_t(U)>0$. Somit gilt

$$\int_{R^1_+}\lambda_t(U)\pi(dt)\geq\int_{R^1_+}\lambda_t(U)\pi(dt)\geq\inf_{t\in\Theta}\lambda_t(U)\int_{\Theta}\pi(dt)=\pi(\Theta)\inf_{t\in\Theta}\lambda_t(U)>0.$$

Für alle $t, u\in R^1_+$, natürlichen Zahlen $n$ mit $p_0^{(n)}(t, u)>0$ bezeichnen wir mit $G([t, u],$ $=G(\lambda_{t,u,n})$ die Gittergruppe des Verteilungsgesetzes $\lambda_{t,u,n}(\cdot)$.

1.6. Es gilt $G([t, u], n_1)\subset G([t, u], n_1+m+n_2)$, $G([u, t], m)\subset G([t, u]\ n_1+m+n_2)$, $G([t, n], n_2)\subset G([t, u], n_1+m+n_2)$ falls $p_0^{(n_1)}(t, u)>0$, $p_0^{(m)}(u, t)>0$, $p_0^{(n_2)}(t, u)>0$ ist. Der

Beweis von 1.6, ergibt sich unmittelbar aus 1.3., 1.5. und der Beziehung

$$\lambda_{t,u,n_1+m+n_2}(\cdot)=\int_{R^1_+}\int_{R^1_+}\frac{p_0^{(n_1)}(t, s_1)p_0^{(m)}(s_1, s_2)\,p_0^{(n_2)}(s_2, u)}{p_0^{(n_1+m+n_2)}(t, u)}(\lambda_{t,s_1,n_1}*\lambda_{s_1,s_2,m}*\lambda_{s_2,u,n_2}(\cdot)\mu_+(ds_1)\mu_+(ds_2)$$

Definition. Die abgeschlossene Hülle $G_i=G_i(\{\lambda_{t,u,n}\})$ der kleinsten Untergruppe, die die Menge

$$\bigcup_{(t,u)\in R^1_+\times R^1_+}\ \bigcup_{n:\,p_0^{(n)}(t,u)>0}G([t, u], n)$$

enthält, nennen wir die innere Gittergruppe der in (0.4) eingeführten Familie von Verteilungsgesetzen $\{\lambda_{t,u,n}\}$. Für ein vorgegebenes Paar $(t, u)\in R^1_+\times R^1_+$ mit $p_0^{(n)}(t, u)>0$ existiert auf Grund der vorausgesetzten Ergodizitäts- and Regularitätseigenschaften des Markoffschen Prozesses $\{\tau_n\}$ und für ein vorgegebens $\vartheta\in R^1_+$, natürliche Zahlen $m_0$, $m_1$ mit $p_0^{(m)}(\vartheta, \vartheta)>0$ für alle $m\geq m_0$ und $p_0^{(m_1)}(u, \vartheta)>0$. Mit Hilfe von 1.6. ergibt sich dann

1.7. Die innere Gittergruppe $G_i$ stimmt mit der abgeschlossenen Hülle der kleinsten Untergruppe von $G$, die die Menge

$$\bigcup_{m:\,p_0^{(m)}(\vartheta,\vartheta)>0}G([\vartheta, \vartheta], m)$$

enthält, überein.

1.8. Satz. Für jede durch (0.4) eingeführte Familie $\{\lambda_{t,u,n}\}$ von Verteilungsgesetzen stimmt die Verschiebungsgruppe $V=V(\{\lambda_{t,u,n}\})$ mit der inneren Gittergrupe $G_i=G_i(\lambda_{t,u,n}\})$ überein.

**Beweis.** I. Es sei $x$ aus $V$. Eie Annahme, daß $x$ nicht zu $G_i$ gehört, führt uns zu Widerspruch, wegen der Existenz eines $\sigma$ aus $\mathrm{P}$ mit $\sigma(U)=1$ für eine symmetrische Umgebung $U$ des Nullelementes und (vgl. [3, S. 186]).

$$\mathrm{Var}(\sigma*\lambda_{t,u,n}-\delta_x*\sigma*\lambda_{t,u,n})=2.$$

II. Es sei $x$ aus $G_i$. Auf Grund von 1.7. existiert $t\in R^1_+$. natürliche Zahl $k_0$ mit $p_0^{(k_0)}(t, t)>0$ und $x\in G([t, t], k_0)$. Wir betrachten die Folge $k_0, 2k_0, \ldots, mk_0, \ldots$. Es sei $n$ eine natürliche Zahl mit $mk_0\leq n\leq(m+1)\kappa_0$. Wir setzen kurz $R^m_+=(R^1_+)^m$, $\mathscr{R}^m_+=(\mathscr{R}^1_+)^m$, $\mu^m_+=(\mu_+)^m$ und bezeichnen mit $\Theta$ die Menge aller $\tau=(t_1, \ldots, t_m)\in R^m_+$, die wenigstens $r$ benachbarte Paare von Komponenten hat, die mit $t$ übereinstimmen. Für alle $\tau=(t_1, \ldots, t_m)\in R^m_+$ setzen wir weiterhin

$$\lambda_{t,u,n}(\tau)=\lambda_{t,u,n}((t_1,\ldots,t_m))=\lambda_{t,t_1,k_0}*\cdots*\lambda_{m-1},\ t_m,k_0 * \lambda_{t_m,u,n-mk_0}$$

$$\pi_{t,u,n}(\tau)=\pi_{t,u,n}((t_1,\ldots,t_m))=\frac{p_0^{(k_0)}(t,t_1)\,p_0^{(k_0)}(t_1,t_2)\ldots p_0^{(k_0)}(t_{m-1},t_m)p_0^{(n-mk_0)}(t_m,u)}{p_0^{(n)}(t,u)}.$$

Auf Grung der Ergodizitäts- und Regularitätseigenschaften des betrachteten Markoffschen Prozesses erhalten wir

$$(+)\qquad \int_{R_+^m\setminus\Theta}\pi_{t1u,n}(\tau)\mu_+^m(d\tau)\longrightarrow 0,\quad n\to\infty.$$

Für alle $\tau$ aus $\Theta$, $\sigma$ aus $\mathsf{P}_s$ und $r=1,2,\ldots$ ergibt sich leicht folgende Ungleichung

$$\mathrm{Var}(\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau)-\delta_x*\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau))\leqq\mathrm{Var}(\sigma*\lambda^r_{t,t,k_0}-\delta_x*\sigma*\lambda^r_{t,t,k_0}).$$

Auf Grund von Theorem 1.1. ist $G([t,\ t],\ k_0)=V(\{\lambda^r_{t,t,n}\})$ und somit gilt für alle $x\in G([t,\ t],\ k_0)=V(\{\lambda_{t,t,k_0}\})$ $\lim_{r\to\infty}\mathrm{Var}(\sigma*\lambda^r_{t,t,k_0}-\delta_x*\sigma*\lambda^r_{t,t,k_0})=0$. Das führt zu

$$(++)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Theta \mathrm{Var}(\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau)-\delta_x*\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau))\,\pi_{t,u,n}(\tau)\,\mu_+^m(d\tau)=0$$

für alle $\sigma\in\mathsf{P}_s$ und $x\in G([t,\ t],\ k_0)$. Für alle $\sigma\in\mathsf{P}_s$ ergibt sich offenbar folgende Ungleichungskette

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\sigma*\lambda_{t,u,n}-\delta_x*\sigma*\lambda_{t,u,n})&=\mathrm{Var}(\int_{R_+^m}(\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau)-\delta_x*\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau))\pi_{t,u,n}(\tau)\mu_+^m(d\tau)=0\\ &\leqq\int_\Theta\mathrm{Var}(\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau)-\delta_x*\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau))\pi_{t,u,n}(\tau)\mu_+^m(d\tau)\\ &\quad+\int_{R_+^m\setminus\Theta}\mathrm{Var}(\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau)-\delta_x*\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau))\pi_{t,u,n}(\tau)\mu_+^m(d\tau)\\ &\leqq\int_\Theta\mathrm{Var}(\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau)-\delta_x*\sigma*\lambda_{t,u,n}(\tau))\pi_{t,u,n}(\tau)\mu_+^m(d\tau)+2\int_{R_+^m\setminus\Theta}\pi_{t,u,n}(\tau)\mu_+^m(d\tau).\end{aligned}$$

Auf Grund von $(+)$ und $(++)$ konvergieren die letzten zwei Summanden gegen Null, wenn $n\to\infty$. Somit ist $x$ aus $V$ und folglich $V=G_i$.

**2. Struktur der zweiten Verschiebungshalbgruppe.** Wir bezeichnen mit $\widetilde{G}=G/G_i$ die Faktorgruppe von $G$ bezüglich der inneren Gruppe $G_i$. Für jedes Verteilungsgesetz $\lambda_{t,u,n}$ existiert eine Nebenklasse $H_{t,u,n}\in\widetilde{G}$ mit $\mathrm{Tr}(\lambda_{t,u,n})\subset H_{t,u,n}$. Die Nebenklassen genügen der Beziehung

2.1. $H_{t,u,n}+H_{u,\vartheta,m}=H_{t,\vartheta,n+m}$. Mit Hilfe dieser Beziehung können wir auf die Existenz eines wohlbestimmten Systems $\{H_{t,u},\ (t,\ u)\in R_+^1\times R_+^1\}$ von Nebenklassen und einer wohlbestimmten Nebenklasse $E$ der Faktorgruppe $\widetilde{G}$ schließen, die folgenden Beziehungen genügen

2.2 $H_{t,u,n}=H_{t,u}+nE$

2.3 $H_{t,u}+H_{u,\vartheta}=H_{t,\vartheta}$

2.4 $H_{t,t}=G_i$

2.5 $H_{t,u}=-H_{u,t}$

2.6. Satz. Für alle $t$, $u$, $\vartheta \in R^1_+$ und jedes $x \in \dot{H}_{t,u}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\sigma * \lambda_{t,u,n} - \delta_x * \sigma * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n}) = 0$ für alle $\sigma \in \mathrm{P}_s$.

Beweis. Auf Grund von 2.2, 2.3 und 2.4 erhalten wir $H_{t,u,n} - H_{u,u,n} = H_{t,u} - G_i$ Wir greifen uns $h_n$, $g_n$, $z$ für $n=1, 2, \ldots$, so heraus, daß

$$h_n \in \mathrm{Tr}(\lambda_{t,u,n}) \subset G([t, u]n) \quad g_n \in \mathrm{Tr}(\lambda_{u,u,n}) \subset G([u, u], n)$$

$z \in G_i$ und $h_n - g_n = x - z$.

Mit Hilfe von 1.6. and 1.7. erhalten wir

$$\mathrm{Var}(\sigma * \lambda_{t,u,n} - \delta_{h_n} * \sigma * \lambda_{t,u,n}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

$$\mathrm{Var}(\sigma * \lambda_{u,u,n} - \delta_{g_n} * \sigma * \lambda_{u,u,n}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Es gilt ferner $\mathrm{Var}(\sigma * \lambda_{t,u,n} - \delta_z * \sigma * \lambda_{t,u,n}) \to 0$, $n \to \infty$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der letzten drei Limesrelationen schließen wir auf $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(\sigma * \lambda_{t,u,n} - \delta_x * \sigma * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n}) = 0$ für alle $\sigma \in \mathrm{P}_s$.

Es sei $g_{t_1,t_2} = h_{t_1,t_2} + z_{t_1,t_2}$ eine meßbare Abbildung von $R^1_+ \times R^1_+$ in $G$, wobei $\{h_{t_1,t_2}, (t_1, t_2) \in R^1_+ \times R^1_+\}$ ein Repräsentantensystem der Menge der Nebenklassen $H_{t_1,t_2} \in \check{G}$ und $z_{t_1,t_2} \in G_i$ bezeichnet. Wir setzen für beliebige Agfangsverteilung $q(\cdot)$ und für die stationäre Anfangsverteilung $p(\cdot)$:

$$\pi(\cdot) = \int_{R^1_+} \int_{R^1_+} \delta_{g_{t_1,t_2}}(\cdot) p(dt_1) q(dt_2).$$

Mit Hilfe von 2.2—2.5 ergibt sich

2.7. Satz $\pi(\cdot)$ hängt von der Auswahl des Repräsentantensystems nicht ab.

Es bezeichne $\lambda^*_{t,u,n} = (\lambda_{t,u,n} * \pi)(\cdot)$ und $G^*([t, u], n)$ die zu $\lambda^*_{t,u,n}$ gehörende Gittergruppe.

Definition. *Die abgeschlossene Hülle $G_q$ der kleinsten Untergruppe von $G$, die die Menge*

$$\bigcup_{(t,u) \in R^1_+ \times R^1_+} \quad \bigcup_{n:\, p_0^{(n)}(t,u) > 0} G^*([t, u], n)$$

*enthält, nennen wir die Gittergruppe des benutzten Zufallsmechanismus mit Anfangsverteilung $q$.*

Analog zu 1.7. erhalten wir

2.8. Satz: *Die Gittergruppe $G_q$* stimmt mit der abgeschlossenen Hülle kleinsten Untergruppe von $G$, die die Menge

$$\bigcup_{n:\, p_0^{(n)}(\vartheta,\vartheta) > 0} G^*([\vartheta, \vartheta], n)$$

enthält *überein.*

2.9. Satz: *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\Big(\sigma * \lambda_{q,n} - \Big(\int_{R^1_+} \delta_{h_{s,u}}(\cdot) q(ds)\Big) * \Big(\int_{R^1_+} \delta_{-h_{t,u}}(\cdot) p(dt)\Big) * \sigma * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n}\Big) = 0$$

*für beliebiges Repräsentantensystem $\{h_{t_1,t_2}, (t_1, t_2) \in R^1_+ \times R^1_+\}$ der Menge der Nebenklassen $H_{t_1,t_2} \in G$ und für $u$, $\vartheta \in R^1_+$, $\sigma \in \mathrm{P}_s$.*

Beweis. Wir erhalten offenbar

$$\mathrm{Var}\,(\sigma * \lambda_{q,n} - (\int\limits_{R^1_+} \delta_{h_{s,u}}(\cdot) q(ds)) * (\int\limits_{R^1_+} \delta_{-h_{t,u}}(\cdot)\, p(dt)) * \sigma * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n})$$

$$= \mathrm{Var}(\sigma * \int\limits_{R^1_+} \int\limits_{R^1_+} \lambda_{s,t,n}(\cdot) p^{(n)}(s,\ dt) q(ds) - \int\limits_{R^1_+} \int\limits_{R^1_+} \sigma * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n} * (\delta_{h_{s,u}}(\cdot) q(ds) * \delta_{-h_{t,u}}(\cdot) p(dt))$$

$$\leqq \mathrm{Var}\,(\sigma * \int\limits_{R^1_+} \int\limits_{R^1_+} \lambda_{s,t,n}(\cdot)(p^{(n)}(s,dt) - p(dt))) + \mathrm{Var}\,(\sigma * \int\limits_{R^1_+} \int\limits_{R^1_+} (\lambda_{s,t,n} - \delta_{h_{s,u}-h_{t,u}} * \lambda_{v,v,n}) p(dt) q(ds))$$

$$\leqq \int\limits_{R^1_+} \int\limits_{R^1_+} | p^{(n)}(s,\ dt) - p(dt) |\, q(ds) + \mathrm{Var}\,(\sigma * \int\limits_{R^1_+} \int\limits_{R^1_+} (\lambda_{s,t,n}$$

$$- \delta_{h_{s,t} + z_{s,t}} * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n}) p(dt) q(ds) \text{ mit } z_{s,t} \in G_i.$$

Die letzten zwei Summanden konvergieren offenbar gegen Null und somit ist der Satz bewiesen.

2.10. Satz. $V(\{\lambda_{q,n}\}) = G_q$ *für jede Anfangsverteilung* $q$.

Beweis. I. Wir greifen uns ein $x$ aus $G_q$ heraus. Für $u, \vartheta \in R^1_+$ und ein beliebiges Repräsentantensystem $\{h_{t_1,t_2}, (t_1, t_2) \in R^1_+ \times R^1_+\}$ der Menge der Nebenklassen $H_{t_1,t_2} \in \widetilde{G}$ und $\sigma \in \mathrm{P}_s$ ergibt sich folgende Ungleichungskette

$$\mathrm{Var}\,(\sigma * \lambda_{q,n} - \delta_x * \sigma * \lambda_{q,n})$$

$$\leqq \mathrm{Var}\,((\int\limits_{R^1_+} \delta_{h_{s,u}}(\cdot) q(ds) * (\int\limits_{R^1_+} \delta_{-h_{t,u}}(\cdot) p(dt)) * \sigma * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n}$$

$$- \int\limits_{R^1_+} \delta_{h_{s,u}}(\cdot) q(ds)) * (\int\limits_{R^1_+} \delta_{-h_{t,u}}(\cdot) p(dt) * \delta_x * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n})$$

$$= \mathrm{Var}\,((\int\limits_{R^1_+} (\delta_{h_{s,u}}(\cdot) - \delta_{h_{s,u}+x}(\cdot) q\,(ds)) * (\int\limits_{R^1_+} \delta_{-h_{t,u}}(\cdot) p(dt) * \sigma * \lambda_{\vartheta,\vartheta n}))$$

$$= \mathrm{Var}\,((\int\limits_{R^1_+} \int\limits_{R^1_+} (\delta_{h_{s,u}-h_{t,u}} - \delta_{h_{s,u}-h_{t,u}+x}) q(ds) p(dt) * \sigma * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n})$$

$$= \mathrm{Var}\,((\int\limits_{R^1_+} \int\limits_{R^1_+} (\delta_{h_{t,s} \pm g_{t,s}} - \delta_{h_{t,s}+g_{t,s}+x}) q(ds) p(dt) * \sigma * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n})$$

$$= \mathrm{Var}\,((\int\limits_{R^1_+} \int\limits_{R^1_+} \delta_{h_{t,s}+g_{t,s}}(\cdot) q(ds) p(dt) - \delta_x * \int\limits_{R^1_+} \int\limits_{R^1_+} \delta_{h_{t,s}+g_{t,s}}(\cdot) q(ds) p(dt) * \sigma * \lambda_{\vartheta,\vartheta,n})$$

$$= \mathrm{Var}\,(\sigma * \lambda^*_{\vartheta,\vartheta,n} - \delta_x * \sigma * \lambda^*_{\vartheta,\vartheta,n}).$$

Der letzte Ausdruck strebt gegen Null, denn wir können $\vartheta \in R^1_+$ so auswählen, daß $x \in G^*([\vartheta, \vartheta],\ n) \subset G_q$. Daraus ergibt sich $G_q \subset V(\{\lambda_{q,n}\})$.

II. Der Nachweis der Inklusion $V(\{\lambda_{q,n}\}) \subset G_q$ ist analog zum Schritt I. des Beweises von Satz 1.8.

LITERATUR

1. J. Kerstan, K. Matthes. Gleichverteilungseigenschaften von Faltungen Verteilungsgesetzen auf lokalkompakten abelschen. Gruppen I. *Math. Nachr.*, 37, 1968, Heft 5/6, 267—312.
2. J. Kerstan, K. Matthes Gleichverteilungseigenschaften von Faltungen von Verteilungsgesetzen auf lokalkompakten abelschen. Gruppen II. *Math. Nathr.* 41, 1969, 121—132.
3. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке. Безгранично делимые точечные процессы. М., 1982.
4. U. Prehn. Gleichverteilungseigenschaften von Verteilungsgesetzen zufälliger Summen, deren Summanden einer verallgemeinerten Markowschen Abhängigkeit unterworfen sind. *Math. Nachr.*, 49, 1979, 27—40.
5. A. Renyi. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin, 1979.

*Eingegangen am 5. 1. 1984*

*Fakultät für Mathematik und Mechanik der Universität Sofia*
*P. O. Box 373 Bulgarien*