Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОЦЕНОК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ПРОЦЕССЕ ГАЛЬТОНА—ВАТСОНА

НИКОЛАЙ М. ЯНЕВ

Исследуются непараметрические оценки для индивидуальных вероятностей и индивидуального математического ожидания в ветвящемся процессе Гальтона—Ватсона. Получены предельные теоремы, когда начальное число частиц и время стремятся к бесконечности.

1. Введение. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ задана последовательность независимых, целочисленных, одинаково распределенных случайных величин $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ с распределением

$$(1)\qquad p_k=P\{Y_i=k\},\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k=1,\ m=\mathsf{E}\,Y_i,\ \sigma^2=\mathsf{D}\,Y_i.$$

Тогда ветвящийся процесс Гальтона—Ватсона можно определить следующим конструктивным образом

$$(2)\qquad \begin{cases} Z_0=n,\ Z_1=Y_1+\cdots+Y_{Z_0},\ Z_2=Y_{Z_0+1}+\cdots+Y_{Z_0+Z_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_{t+1}=Y_{Z_0+\ldots+Z_{t-1}+1}+\cdots+Y_{Z_0+\ldots+Z_t},\ldots \end{cases}$$

Случайные величины $\{Y_i\}$ можно интерпретировать как числа потомства из одной частицы за одно поколение, а $\{p_k\}$, m и σ^2, определенных в (1), будем называть индивидуальными характеристиками.

Введем так же и индивидуальную производящую функцию

$$(3)\qquad F(s)=\mathsf{E}\,s^{Y_i}=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k,\ |s|\leq 1.$$

Чтобы подчеркнуть, что процесс начинается n-частицами, т. е. $Z_0=n$, в дальнейшем всегда будем писать $Z_t(n)$, $t=0, 1, 2, \ldots$ Тогда

$$(4)\qquad Z_t(n)=\sum_{i=1}^{n} Z_t^{(i)},$$

где $Z_t^{(i)}$ — число частиц в t-ом поколении, получившихся из i-ой начальной частицы, причем $\{Z_t^{(i)}\}_{i=1}^{n}$ — независимые, одинаково распределенные с $Z_t=Z_t(1)$ случайные величины.

Поскольку нас будет интересовать асимптотическое поведение некоторых функций от процесса $Z_t(n)$ при $n\to\infty$, то будем считать, что процесс определен на вероятностном пространстве $(\Xi, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, которое является произведением (см. [5]) вероятностных пространств $(\Omega^{(i)}, \mathscr{F}^{(i)}, P^{(i)})$, связанных с процессами $Z_t^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots$.

Пусть $Z_{tk}(n)$ обозначает число частиц в t-м поколении, имеющих k потомков в следующем $(t+1)$-м поколении. Тогда, как показал Т. Харрис [17] (см. также [13] и [20]),

$$(5)\qquad \widehat{p}_k(n, t)=\sum_{i=0}^{t-1} Z_{ik}(n)/\sum_{j=0}^{t-1} Z_j(n)=N_k(n,t)/U_t(n)$$

являются оценками максимального правдоподобия для индивидуальных вероятностей p_k, $k=0, 1, 2, \ldots$. Здесь

$$(6)\qquad N_k(n, t)=\sum_{i=0}^{t-1} Z_{ik}(n)=\#\{j: j\in\{0, 1, \ldots, Y_0+\cdots+Y_{t-1}\}, Y_j=k\},$$

а $U_t(n)$ — общее число всех частиц, родившихся до момента $(t-1)$ включительно, если в начале было n частиц, т. е.

$$(7)\qquad U_t(n)=\sum_{j=0}^{t-1} Z_j(n)=\sum_{i=1}^{n} U_t^{(i)},$$

где $U_t^{(i)}=\Sigma_{k=0}^{t-1} Z_k^i i=1, 2, \ldots n$, — независимые, одинаково распределенные с $U_t=U_t(1)=\Sigma_{k=0}^{t-1} Z_k$ случайные величины.

Тогда

$$(8)\qquad \widehat{m}(n, t)=\sum_{k=1}^{\infty} k\widehat{p}_k(n, t)=\sum_{i=1}^{t} Z_i(n)/\sum_{j=0}^{t-1} Z_j(n)$$

является оценкой максимального правдоподобия для индивидуального математического ожидания $m=\Sigma_{k=1}^{\infty} kp_k$ в общем моделе, основанном на наблюдении потомков всех частиц в первых $(t-1)$ поколениях. Как видно из (8), $\widehat{m}(n, t)$ есть отношение общего числа всех „сыновей" на общее число всех „отцов", т. е. зависит только от наблюдений процесса в первых t-поколениях. В таком случае возникает вопрос является ли $\widehat{m}(n, t)$ оценкой максимального правдоподобия и в моделе, основанном только на наблюдениях $Z_0(n), Z_1(n), \ldots, Z_t(n)$. Как показано в [13], [14], [20] и [21] при достаточно общих предположениях ответ положителен.

Т. Харрис [17] впервые исследовал асимптотику оценки (8) и показал, что в надкритическом случае $m>1$ при $n=1$ и $t\to\infty$ она сходится по вероятности к m на множестве $\{Z_t>0\}$. К. Хейде [18] улучшил этот результат, показав, что вместо сходимости по вероятности имеет место сходимость почти наверное. Затем Дион [12] при тех же условиях получил предельные теоремы для оценок (5) и (8) (см. также [13] и [20]).

А. Лотка [22] для математического ожидания m предложил оценку

$$(9)\qquad \widetilde{m}_t=\begin{cases} Z_{t+1}/Z_t, & Z_t<0,\\ 1, & Z_t=0.\end{cases}$$

Затем А. Нагаев [6] исследовал предельное поведение (9) в докритическом, критическом и надкритическом случаях, но опять на множестве невырождающихся траекторий. Ж. Дион [12] получил предельную теорему в надкритическом случае, а И. Бадалбаев [1] и А. Пейкс [24] улучшили некоторые результаты относительно оценки (9) при $\{Z_t>0\}$. А. Пейкс [24], кроме того, исследовал следующую оценку для индивидуальных вероятностей

$$(10)\qquad \widetilde{p}_k(t)=\begin{cases} Z_{tk}/Z_t, & Z_t>0,\\ 1, & Z_t=0.\end{cases}$$

К. Хейде [19] предложил для m оценку

$$\bar{m}_t = (Z_t)^{1/t} \tag{11}$$

и показал, что на множестве $\{Z_t > 0\}$ она сильно состоятельна. Он нашел также ее предельное распределение при $\{Z_t > 0\}$.

Заметим,что С. Асмусен и Н. Кейдинг [11] исследовали многомерный случай, а. Т. Флеминг и К. Харингтон [15, 16] — процессы в случайной среде.

Основным недостатком рассматриваемых выше результатов является прежде всего то, что они получены на множестве невырождающихся траекторий, что делает их мало пригодными для практических целей.

Поэтому в [9] и [10] изучалось асимптотическое поведение оценки (8) и (5) при $Z_0 = n \to \infty$ и $t \to \infty$, не ограничиваясь множеством $\{Z_t > 0\}$. В частности, там показано, что $\widehat{m}(n, t)$ является состоятельной и асимптотически несмещенной оценкой для m и, кроме того, получены некоторые предельные теоремы для $\widehat{m}(n, t)$ и $\widehat{p}_k(n, t)$. В настоящей работе, используя новую технику (прежде всего методы случайного суммирования), получены дальнейшие результаты в этом направлении.

2. Вспомогательные результаты. Пусть $G_t(s) = \mathsf{E} s^{U_t}$, $|S| \leq 1$, где U_t — общее число частиц до $(t-1)$-ого поколения, если в начале была одна частица, т. е $U_t = 1 + Z_1 + \cdots + Z_{t-1}$. Нетрудно проверить, что

$$G_1(s) = s, \quad G_{t+1}(s) = sF(G_t(s)), \quad t = 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

Отсюда можно показать по индукции, что при $0 \leq s \leq 1$ для всех $t \geq 1$

$$0 \leq G_{t+1}(s) \leq G_t(s) \leq s. \tag{13}$$

Следовательно, существует $\lim_{t\to\infty} G_t(s) = G(s)$. Теперь в (12), переходя к пределу по $t \to \infty$, получим уравнение

$$G(s) = sF(G(s)), \quad |s| \leq 1. \tag{14}$$

Лемма 1. *Уравнение (14) имеет единственное решение в классе $\mathfrak{C}$ вероятностных производящих функций, таких, что $G(1) = q$, где q — вероятность вырождения процесса $\{Z_t\}$, т. е. $q = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}\{Z_t = 0 \mid Z_0 = 1\}$.*

Доказательство. Пусть $G_1(s)$, $G_2(s) \in \mathfrak{C}$ и удовлетворяют (14). Тогда функция $h(s) = G_1(s) - G_2(s)$ является аналитической в круге $|s| \leq 1$, а при $0 \leq s \leq 1$

$$|h(s)| = s\,|F(G_1(s)) - F(G_2(s))| \leq sF'(\max\{G_1(s), G_2(s)\})\,|G_1(s) - G_2(s)|.$$

Так как из (14) имеем $G_1(0) = G_2(0) = 0$, то $G_i(s) \leq s$ и, следовательно, $|h(s)| \leq sF'(s)|h(s)| \leq (sF'(s))^n |h(s)|$ для любого $n \geq 1$.

С другой стороны, существует такое s_0, $0 < s_0 < 1$, что $F'(s_0) \leq 1$. Тогда при $0 \leq s \leq s_0$ $|h(s)| \leq s_0^n |h(s)| \to 0$, $n \to \infty$. Как было отмечено, $h(s)$— аналитическая функция, откуда следует, что $h(s) \equiv 0$, $|s| \leq 1$.

Теперь положим $G(1) = \lim_{s\uparrow 1} G(s) = r$. Тогда из (14) следует, что r является корнем уравнения $s = F(s)$. Покажем, что r — наименьший неотрицательный корень уравнения, т. е. $r = q$.

Если $F(0) = 0$, то $G(s) \equiv 0$, потому что, если допустим, что $G(s) > 0$ при некотором $0 < s < 1$, то из (14) получим противоречие $G(s) < F(G(s) < G(s)$.

Допустим, что существует r_1 такое, что $0 < r_1 < r$ и $r_1 = G(r_1)$. Положим $G(s) = z$. Тогда уравнение (14) можно записать как $z = G^{-1}(z)F(z)$. Подставляя здесь $z = r_1$, получаем $r_1 = G^{-1}(r_1)r_1$, т. е. $G^{-1}(r_1) = 1$ и $r_1 = G(1) = r$.

Следствие 1. *Если $m \leq 1$, то при $t \to \infty$ $U_t \xrightarrow{d} U$, где $G(s) = \mathsf{E}\, s^U$ определяется уравнением (14) с $G(1) = 1$.*

Следствие 2. *Если* $m<1$, *то при* $t\to\infty$ $U_t \xrightarrow{L_1} U$, $\mathsf{E}\,U=G'(1)=(1-m)^{-1}$.

Лемма 2. *Если* $m=1$ *и* $\sigma^2<\infty$, *то предельная случайная величина* U *принадлежит нормальной области притяжения неотрицательного устойчивого закона с показателем* $1/2$.

Доказательство. Пусть $R_k=\mathsf{P}\{U>k\}$, $R(s)=\Sigma_{k=0}^{\infty} R_k s^k$. Тогда $G_*(s)=1-(1-s)R(s)$ и из (14) имеем

$$1-(1-s)R(s)=sF(1-(1-s)R(s)). \tag{15}$$

Разложим правую часть в ряд Тейлора $F(1-(1-s)R(s))=1-(1-s)R(s)+(\sigma^2/2)(1-s)^2\varphi(s)$, где $|\varphi(s)|\leqq 1$ и $\varphi(s)\to 1$ при $s\uparrow 1$ (см. [7, Гл. I, § 3]).

Теперь из (15) для $R(s)$ получим уравнение

$$(\sigma^2/2)\varphi(s)s(1-s)R^2(s)+(1-s)R(s)-1=0,$$

которое при $0\leqq s<1$ имеет неотрицательный корень

$$R(s)=-(s\sigma^2\varphi(s))^{-1}+\sqrt{1-(2\sigma^2\varphi(s)-1)s}/s\sigma^2\varphi(s)\sqrt{1-s}.$$

Следовательно, при $s\uparrow 1$

$$R(s)\sim\left(\frac{\sigma^2}{2}(1-s)\right)^{-1/2}. \tag{16}$$

Так как последовательность $\{R_n\}$ монотонна, то по известной тауберовой теореме (см., напр. [8], с. 513, теорема 5) из (16) получаем

$$R_n\sim(\pi\sigma^2 n/2)^{-1/2},\quad n\to\infty.$$

Теперь из теории суммирования случайных величин следует (см. [3] или [8], с. 515, теорема 2), что существуют постоянные $b_n\sim 2n^2/\sigma^2\pi$, так что при $n\to\infty$

$$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} U^{(i)} \xrightarrow{d} X,$$

где $\{U^{(i)}\}$ — независимые и одинаково распределенные с U случайные величины, а X — устойчивая случайная величина с показателем $1/2$, причем $\mathsf{E}\,e^{-\lambda X}=\exp\{-\lambda^{1/2}\}$.

Следствие. *Из* (16) *имеем*

$$1-G(s)\sim(2(1-s)/\sigma^2)^{1/2},\quad s\uparrow 1. \tag{17}$$

Замечание. Уравнение (14) впервые исследовано Р. Оттером [23]. Приведенные здесь доказательства проще. Дальнейшие обобщения можно найти в [7], гл. V.

Лемма 3. *Пусть* $n, t\to\infty$ *Тогда*

a) *если* $m<1$, *то* $U_t(n)/n \xrightarrow{P} (1-m)^{-1}$;

b) *если* $m>1$ *и* $\sigma^2>\infty$, *то* $U_t(n)/n\,\Sigma_{k=0}^{t-1} m^k \xrightarrow{P} 1$;

c) *при* $m=1$ *и* $\sigma^2>\infty$,

i) *если* $t/n\to 0$, *то* $U_t(n)/nt \xrightarrow{P} 1$;

ii) *если* $t/n^2\to\infty$, *то*

$$A_{n,t}(x)=\mathsf{P}\{\sigma^2 U_t(n)/2n^2\leqq x\}\to A(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_0^x y^{-2/3}\,e^{-y/2}\,dy. \tag{18}$$

Доказательство. Утверждение a) сразу вытекает из следствия 2 леммы 1, имея в виду (7) и неравенство

$$\mathsf{P}\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(U_t^{(i)}-U^{(i)})|\geqq\varepsilon\}\leqq\frac{1}{\varepsilon}\mathsf{E}\,|U_t-U|.$$

Хорошо известно, что если $m>1$ и $\sigma^2<\infty$, то при $t\to\infty$ $\xi_t=Z_t/\mathsf{E}\,Z_t \xrightarrow[\text{п. н.}]{L_2} \xi$, где $\mathsf{E}\,\xi=1$, $\mathsf{D}\,\xi=\frac{\sigma^2}{m(m-1)}$ (см. [7]).

С другой стороны, так как $\mathsf{E}\,U_t=\Sigma_{k=0}^{t-1} m^k$, то

$$\alpha_t=U_t/\mathsf{E}\,U_t-\xi=\frac{m-1}{m^t-1}\sum_{k=0}^{t-1}(\xi_k-\xi)\,m^k. \tag{19}$$

Ввиду того, что ξ_t является мартингалом, нетрудно подсчитать, что

$$\mathsf{E}\,\xi_k\xi=\mathsf{E}\,\xi_k^2=\sigma^2(1-m^{-k})/m(m-1), \tag{20}$$

а при $k<j$

$$\mathsf{E}\,\xi_k\,\xi_j=\mathsf{E}\,\xi_k^2,\ \mathsf{E}\,(\xi_k-\xi)(\xi_j-\xi)=\mathsf{E}\,(\xi_j-\zeta)^2=\sigma^2/(m-1)m^{j+1}. \tag{21}$$

Теперь из (19, 20) и (21) вытекает, что $\mathsf{E}\,\alpha_t^2=(C_1+C_2t)/(m^t-1)+C_3\,t/(m^t-1)^2$ где C_i — постоянные, независящие от t. Следовательно,

$$\mathsf{E}\,\alpha_t^2\to 0,\ t\to\infty,\ \sum_{t=1}^{\infty}\mathsf{E}\,\alpha_t^2=\mathsf{E}\sum_{t=1}^{\infty}\alpha_t^2<\infty.$$

Таким образом, мы показали, что $U_t/\mathsf{E}\,U_t \xrightarrow[\text{п. н.}]{L_2} \xi,\ t\to\infty$.

Теперь утверждение b) вытекает из (7) и неравенства

$$\mathsf{P}\{|\,U_t(n)/n\sum_{k=0}^{t-1}m^k-n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\xi^{(i)}\,|\geq\varepsilon\}\leq\mathsf{P}\{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|\,U_t^{(i)}/\mathsf{E}\,U_t^{(i)}-\zeta^{(i)}\,|\geq\varepsilon\}\leq\frac{1}{\varepsilon}\,\mathsf{E}\,\Big|\frac{U_t}{\mathsf{E}\,U_t}-\xi\Big|,$$

где $\{\xi^{(i)}\}$ — независимые, одинаково распределенные с ξ, случайные величины.

i) В этом случае $\mathsf{E}\,U_t=t$, $\mathsf{D}\,U_t=\frac{\sigma^2}{6}(t-1)\,t\,(2t-1)$, откуда следует, что

$$\mathsf{E}\,\{U_t(n)/nt\}=1,\quad \mathsf{D}\,\{U_t(n)/nt\}=\frac{\mathsf{D}\,U_t}{nt^2}\sim\frac{\sigma^2 t}{3n}.$$

Таким образом, для каждого $\varepsilon>0$

$$\mathsf{P}\Big\{\Big|\frac{U_t(n)}{nt}-1\Big|\geq\varepsilon\Big\}\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathsf{D}\,\{U_t(n)/nt\}\to 0,\ t/n\to 0.$$

ii) В этом случае для всех $\lambda>0$ $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dA_{n,t}(x)=G_t^n(\exp(-\lambda\sigma^2/2n^2))$.

Теперь из леммы 1 и (17) следует, что при $n\to\infty$ равномерно по $0<t\leq\infty$ имеем

$$\begin{cases} n\log G_t(\exp(-\lambda\sigma^2/2n^2))\sim -n\,(1-G_t(\exp(-\lambda\sigma^2/2n^2))) \\ \sim\sqrt{\lambda}+\beta(\lambda,n,t), \end{cases} \tag{22}$$

где $\beta(\lambda,n,t)=n\{G_t(\exp(-\lambda\sigma^2/2n^2))-G(\exp(-\lambda\sigma^2/2n^2))\}$.

Из (13) и (14) нетрудно вывести, что при $\lambda>0$ $0\leq\beta(\lambda,n,t)\leq n\{\exp(-\lambda\sigma^2/2n^2)-G(\exp(\lambda\sigma^2/2n^2))\}$. Отсюда, в силу (17), сразу получаем, что в условиях леммы $\beta(\lambda,n,t)\to 0$. Тогда из (22) при $\lambda>0$ и $t/n^2\to 0$ имеем

$$G_t^n(\exp(-\lambda\sigma^2/2n^2))\to\exp\{-\lambda^{1/2}\},$$

откуда по теореме непрерывности для преобразования Лапласа получаем (18).

Лемма 4. *Пусть* $m=1$, $\sigma^2<\infty$ *и* $n\to\infty$. *Тогда, если*

a) $t/n\to 0$, *то* $Z_t(n)/n \xrightarrow{P} 1$ *и*

(23) $$\sqrt{\frac{n}{\sigma^2 t}}\,(Z_t(n)/n-1) \xrightarrow{d} \eta\in N(0,1);$$

b) $t/n\to\infty$, *то* $Z_t(n)/n \xrightarrow{P} 0$;

c) $t/n\to K$, $0<K<\infty$, *то*

(24) $$\frac{Z_t(n)}{n} \xrightarrow{d} \xi, \quad \mathsf{E}\, e^{-\lambda\xi}=\exp\left\{\frac{a\lambda}{a+\lambda}\right\}, \quad a=2/\sigma^2 K.$$

Доказательство содержится в лемме 2 и предельного соотношения (17) работы [9]. Там же показано, что в (24) случайная величина ξ имеет плотность, которая явно выписывается.

Лемма 5. *Пусть* $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *независимые, одинаково распределенные случайные величины с* $\mathsf{E}\,X_k=0$ *и* $\mathsf{D}\,X_k=1$. *Пусть* $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *независимые от* $\{X_k\}$ *неотрицательные целочисленные случайные величины, для которых существуют постоянные* $a_n\to\infty$, $n\to\infty$, *так что*

(25) $$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\{\nu_n/a_n\le x\}=\mathsf{P}\{\nu\le x\}=B(x),\ \ B(0)=0.$$

Тогда

(26) $$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\nu_n} X_k/\nu_n\le x\Big\}=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,dy,$$

(27) $$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\Big\{\sqrt{a_n}\,\sum_{k=1}^{a} X_k/\nu_n\Big\}\le x\Big\}=\int_0^{\infty}\Phi(x\sqrt{y})\,dB(y).$$

Доказательство. В основе доказательства лежит следующая идея Р. Добрушина [4]: если последовательность функций распределения $\{F_n(x)\}$ слабо сходится к некоторой функции распределения $F(x)$, то можно построить последовательность случайных величин, имеющих те же функции распределения, но уже сходящихся по вероятности. Для этого достаточно взять за пространство элементарных событий интервал $[0,1]$ и положить $\xi_n=F_n^{-1}(y)$, $y\in[0,1]$, где $F_n^{-1}(y)$ — функция, обратная $F_n(x)$, аналогично — $\xi=F^{-1}(x)$.

В нашем случае за пространство элементарных событий возьмем единичный квадрат плоскости u, v. Теперь на интервале $[0,1]$ оси u строятся случайные величины α_n, имеющие то же распределение, что и величины $S_n/n^{1/2}$, $S_n=\Sigma_{k=1}^n X_k$, и сходящиеся по вероятности со случайной величиной N с распределением $\Phi(x)$, а на интервале $[0,1]$ оси v — случайные величины β_n, одинаково распределены с ν_n/a_n и сходящиеся по вероятности к случайной величине $\varkappa$ с распределением $B(x)$. Продолжим эти величины на весь квадрат, положив $\tilde\alpha_n(u,v)=\tilde\alpha_n(u,0)=\alpha_n(u)$, $\tilde\beta_n(u,v)=\tilde\beta_n(0,v)=\beta_n(v)$, $\tilde N(u,v)=\tilde N(u,0)=N$, $\tilde\nu(u,v)=\tilde\nu(0,v)=\varkappa$. Тогда случайные величины $\tilde S_n=n^{1/2}\tilde\alpha_n$ и S_n одинаково распределены. Аналогично для случайных величин $\tilde\nu_n=a_n\tilde\beta_n$ и ν_n. Кроме того, $\tilde S_n$ и $\tilde\nu_n$ независимы. Поэтому, случайные величины $\tilde S_{\tilde\nu_n}$ и S_{ν_n} распределены одинаково и изучение S_{ν_n} можно заменить изучением $\tilde S_{\tilde\nu_n}$. Но в смысле сходимости по вероятности

$$\tilde S_{[a_n]}=\tilde N\sqrt{a_n}+o(a_n),\quad \tilde\nu_n=\tilde\nu a_n+o(a_n),$$

и, следовательно,

$$\frac{\widetilde{S}_{\widetilde{\nu}_n}}{\sqrt{\widetilde{\nu}_n}}=\frac{\widetilde{N}\sqrt{\widetilde{\nu}a_n+o(a_n)}+o(\sqrt{a_n})}{\sqrt{\widetilde{\nu}\,a_n+0(a_n)}}=\widetilde{N}+o(1),$$

что доказывает (26).

С другой стороны,

$$\sqrt{a_n}\widetilde{S}_{\widetilde{\nu}_n}/\widetilde{\nu}_n=\frac{\widetilde{S}_{\widetilde{\nu}_n}}{\sqrt{\widetilde{\nu}_n}}\sqrt{\frac{a_n}{\widetilde{\nu}_n}}=\frac{\widetilde{N}+o(1)}{\sqrt{\widetilde{\nu}+o(1)}}=\frac{\widetilde{N}}{\sqrt{\widetilde{\nu}}}+o(1),$$

откуда, ввиду независимости $\widetilde{N}$ и $\widetilde{\nu}$, сразу вытекает (27).

Замечание. Предельные соотношения (26) и (27) являются частным случаем более общих результатов, которые сформулированы в [12], но приводятся там без доказательств и, кроме того, при более сильном условии $\nu_n/a_n \xrightarrow{P} \nu \geqq 0$, $n\to\infty$.

3. Предельные теоремы. Исследуем асимптотическое поведение оценок (5) и (8), когда начальное число частиц и номер поколения стремятся к бесконечности. Стандартное нормальное распределение будем обозначать через $\Phi(x)$,

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}\,du.$$

Теорема 1. *Пусть* $\sigma^2<\infty$. *Тогда в докритическом* $(m<1)$ *и надкритическом* $(m>1)$ *случае при* $n, t\to\infty$

$$\lim \mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{U_t(n)}{p_k(1-p_k)}}\,(\widehat{p}_n(n,t)-p_k)\leq x\right\}=\Phi(x), \tag{28}$$

$$\lim \mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{U_t(n)}{\sigma^2}}\,(\widehat{m}(n,t)-m)\leq x\right\}=\Phi(x). \tag{29}$$

Те же самые соотношения имеют место и для критических процессов $(m=1$ *при дополнительном условии* $t/n\to 0$.

Доказательство. Введем случайные величины $\{\xi_k\}$ следующим образом

$$\xi_k=\begin{cases}1, & \text{если } Z_1=k,\\ 0, & \text{если } Z_1\neq k.\end{cases} \tag{30}$$

Тогда $p_k=\mathsf{P}\{Z_1=k\}=\mathsf{P}\{\xi_k=1\}=1-\mathsf{P}\{\xi_k=0\}$, $\mathsf{E}\,\xi_k=p_k$, $\mathsf{D}\,\xi_k=p_k(1-p_k)$, $k=0$ 1, 2, ...

Пусть $\eta_k^{(j)}$, $j=1, 2, \ldots,$ — независимые и одинаково распределенные с $(\xi_k-p_k)/\sqrt{p_k(1-p_k)}$ случайные величины.

Тогда справедливо следующее соотношение

$$\mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{U_t(n)}{p_k(1-p_k)}}\,(\widehat{p}_k(n,t)-p_k)\leq x\right\}=\mathsf{P}\left\{\sum_{j=1}^{U_t(n)}\eta_k^{(j)}/\sqrt{U_t(n)}\leq x\right\}. \tag{31}$$

Заметим, что $\mathsf{E}\,\eta_k^{(j)}=0$, $\mathsf{D}\,\eta_k^{(j)}=1$. Теперь (28) получается сразу из (31) по лемме 3 и предельному соотношению (26) леммы 5.

Обозначим $X_k=(Y_k-m)/\sigma$. Тогда из (2, 4, 7 и 8) следует представление

$$\sqrt{\frac{U_t(n)}{\sigma^2}}\,(\widehat{m}(n,t)-m)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{U_t(n)}X_k/\sqrt{U_t(n)}, & m\neq 1,\\ (Z_t(n)-n)/\sqrt{\sigma^2 U_t(n)}, & m=1.\end{cases} \tag{32}$$

Заметим, что $\mathsf{E}\, X_k=0$, $\mathsf{D}\, X_k=1$. Тогда, если к (32) при $m\neq 1$ применить лемму 3 и соотношение (26) леммы 5, то получится утверждение (28). Этот результат вытекает и при $m=1$ из (32) и представления

$$(33)\qquad (Z_t(n)-n)/\sqrt{\sigma^2 U_t(n)}=\sqrt{\frac{n}{\sigma^2 t}}\left(\frac{Z_t(n)}{n}-1\right)\Big/\sqrt{\frac{U_t(n)}{nt}}$$

по лемме 3 i) и лемме 4 а).

Замечание. Как видно из леммы 3 а), соотношение (28) в докритическом случае справедливо и без условия $\sigma^2<\infty$.

Следствие. *В условиях теоремы 1, если*

а) $m<1$, *то* $\widehat{p}_k(n,t)\sim N(p_k,(1-m)\,p_k(1-p_k)\,n^{-1})$, $\widehat{m}(n,t)\sim N(m,\sigma^2(1-m)n^{-1})$;

б) $m=1$, $t/n\to 0$, *то* $\widehat{p}_k(n,t)\sim N(p_k, p_k(1-p_k)/nt)$, $\widehat{m}(n,t)\sim N(1,\sigma^2/nt)$;

в) $m>1$, *то* $\widehat{p}_k(n,t)\sim N(p_k,(m-1)\,p_k(1-p_k)/n(m^t-1))$, $\widehat{m}(n,t)\sim N(m,\sigma^2(m-1)/n(m^t-1))$.

Доказательство получается стандартным способом из (28, 29) и леммы 3.

Теорема 2. *Пусть* $m=1$, $\sigma^2<\infty$ *и* $t/n^2\to\infty$ *при* $n,t\to\infty$. *Тогда*

$$(34)\qquad \lim \mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{U_t(n)}{p_k(1-p_k)}}\,(\widehat{p}_k(n,t)-p_k)\leq x\right\}=\Phi(x),$$

$$(35)\qquad \lim \mathsf{P}\{n(\widehat{p}_k(n,t)-p_k)/\sqrt{\sigma^2 p_k(1-p_k)/2}\leq x\}=\int_0^\infty \Phi(x\sqrt{y})\,dA(y),$$

$$(36)\qquad \lim \mathsf{P}\left\{\frac{2n}{\sigma^2}(1-\widehat{m}(n,t))\leq x\right\}=K(x),$$

где $A(y)$ *определяется в* (18), *а*

$$(37)\qquad K(x)=\mathsf{P}\{\xi\leq x\}=(2\pi)^{-1/2}\int_0^x u^{-1/2}e^{-u/2}\,du.$$

Доказательство. Заметим, что (34) получается сразу из (31) по лемме 5, используя на этот раз предельное соотношение (18).

С другой стороны, в обозначениях из доказательства теоремы 1 имеем

$$(38)\qquad \mathsf{P}\{n(\widehat{p}_k(n,t)-p_k)/\sqrt{\sigma^2 p_k(1-p_k)/2}\leq x\}=\mathsf{P}\left\{\sqrt{\frac{2n^2}{\sigma^2}}\sum_{j=1}^{U_t(n)}\eta_k^{(j)}/U_t(n)\leq x\right\}.$$

Так как из (18) и (38) следует, что выполняются все условия леммы 5, то, применяя (27) к (38), получаем сразу (35).

Чтобы доказать (36), заметим, что

$$\frac{2n}{\sigma^2}(1-\widehat{m}(n,t))=\frac{2n^2}{\sigma^2 U_t(n)}(1-Z_t(n)/n).$$

Теперь по лемме 4 б) $Z_t(n)/n\xrightarrow{P}0$, а из (18) $2n^2/\sigma^2U_t(n)\xrightarrow{d}1$, где ξ — неотрицательная устойчивая случайная величина с параметром 1/2. Но тогда $\xi=\xi^{-1}\in\chi^2(1)=N^2(0,1)=\Gamma\left(\frac{1}{2},2\right)$, т. е. имеет распределение (37).

4. Процессы с непрерывным временем. Некоторые из результатов, полученных для процессов Гальтона—Ватсона, можно перенести на марковские ветвящиеся процессы, используя технику вложенных процессов.

Действительно, пусть $\mu(t)$, $t\geq 0$, марковский ветвящийся процесс с одним типом частиц и с непрерывным временем.

Как известно, в этом случае роль критического параметра выполняется постоянной $a=f'(1)$, где $f(s)=\Sigma_{k=0}^{\infty}f_k s^k$, $|s|\leq 1$, $f(1)=0$, инфинитезимальная (индивидуальная) производящая функция плотностей вероятностей перехода.

Введем производящие функции $H(t, s) = \mathsf{E}\{s^{\mu(t)} \mid \mu(0) = 1\}$ и рассмотрим процесс $\mu(t)$ по некоторой дискретной решетке, т. е. для некоторого $\Delta > 0$ положим $Z_t = \mu(\Delta t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Нетрудно проверить, что $\{Z_t\}$ является процессом Гальтона—Ватсона с индивидуальной производящей функцией $F(s) = H(\Delta, s)$.

Действительно, для каждого $t = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathsf{E}\{s^{Z_{t+1}} \mid Z_t = k\} = \mathsf{E}\{s^{\mu(\Delta)} \mid \mu(0) = k\} = H^k(\Delta, s) = F^k(s) = (\mathsf{E}\{s^{Z_1} \mid Z_0 = 1\})^k = \mathsf{E}\{s^{Z_1} \mid Z_0 = k\}.$$

Теперь из соотношения $m = F'(1) = H'(\Delta, 1) = e^{\Delta a}$ сразу вытекает, что $\widehat{a}(n, t) = \Delta^{-1} \log \widehat{m}(n, t)$ при $n, t \to \infty$ является состоятельной и асимптотически несмещенной оценкой для a (см. [9, теоремы 1—6]), а $\exp\{\Delta \widehat{a}(n, t)\}$ имеет соответствующие из (29) теоремы 1 и (36) теоремы 2 предельные распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Бадалбаев. О свойствах оценки регулирующего параметра ветвящегося случайного процесса. — В: Случайные процессы и смежные вопросы, часть 1. Ташкент, 1970, 31—42.
2. И. С. Бадалбаев, Ю. Жураев. О свойствах оценки для собственного числа матрицы математических ожиданий ветвящегося процесса с несколькими типами частиц, начинающего с большого числа частиц. — В; Предельные теоремы, случайные процессы и их приложения, Ташкент, 1979, 35—46.
3. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.—Л.' 1949.
4. Р. Л. Добрушин. Лемма о пределе сложной случайной функции. *Успехи матем. наук*, **10**, 1955, № 2, 157—159.
5. М. Лоэв. Теория вероятностей. М., 1962.
6. А. В. Нагаев. Об оценке среднего числа непосредственных потомков частицы в ветвящемся случайном процессе. Теория вероятн. и ее примен., 12, 1967, 363—369.
7. Б. А. Севастьянов. Ветвящиеся процессы. М., 1971.
8. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., 1967.
9. Н. М. Янев. О статистике ветвящихся процессов. *Теория вероятн. и ее примен.*, 20, 1975, 623—633.
10. Н. М. Янев. О статистике ветвящегося процесса Гальтона—Ватсона. *Пятая конф. Союза болг. матем.*, Габрово, 1976.
11. S. Asmussen, N. Keiding. Martingale central limit theorems and asymptotic estimation theory for multitype branching processes. *Adv. Appl. Prob.*, **10**, 1978, 109—129.
12. J.-P. Dion. Estimation of the mean and the initial probabilities of a branching process. *J. Appl Prob.*, **11**, 1974, 687-694.
13. J.-P. Dion, N. Keiding. Statistical inference in branching processes. Advances in Probability vol. 5.: Branching processes. New York, 1978, 105-140.
14. P. D. Feigin. A note on maximum likelihood estimation for simple branching processes. Austr. J. Statist., **19**, 1977, No 2, 152-154.
15. T. R. Flemming, D. R. Harrington. A note of efficiencies for estrmators in varying environments. *Math., Biosci.* 45, 1979, 95-97.
16. D. P. Harrington, T. R. Fleming. Estimation for branching processes with varying and random environments. *Math. Biosci.*, **39**, 1978, 255-271.
17. T. E. Harris. Branching processes. *Ann. Math. Statist.*, **19**, 1948, 474-494.
18. C. C. Heide. Extension of a result of Seneta for the super-critical Galton-Watson process. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 1970, 739-742.
19. C. C. Heide. Remarks on efficiency in estimation for branching processes. *Biometrika*, **62**, 1975, 49—55.
20. P. Jagers. Branching processes with biological applications. NewYork, 1975.
21. N. Keiding, S. Lauritzen. Marginal maximum likelihood estimates and estimation of the offs pring mean in a process. *Scand. J. Statist.*, **5**, 1978, 106-110.
22. A. J. Lotka. Théorie analytique des associations biologiques. (*Actualités Sci. Indust.*, **2**, no. 780) Paris, 1939, 123-136.
23. R. Otter. The multiplicative process. *Ann. Math. Statist.*, **20**, 1949, 206-224.
24. A. G. Pakes. Nonparametric estimation in the Galton-Watson process. *Math. Biosci.*, **26**, 1975, 1-18.

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. Я. 373*

Поступила 16. I. 1984