# Serdica

## Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

## Българско математическо списание

# ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОЦЕНОК ДИСПЕРСИЙ В ВЕТВЯЩЕМСЯ ПРОЦЕССЕ С ИММИГРАЦИЕЙ

НИКОЛАЙ М. ЯНЕВ, СТЕФАНКА С. ЧУКОВА

Исследуются асимптотические свойства оценок для дисперсий в докритическом ветвящемся процессе с иммиграцией при известных или неизвестных математических ожиданиях. Показано, что эти оценки являются асимптотически нормальными и удовлетворяют закон повторного логарифма.

**1. Введение.** Настоящая работа является продолжением статей [4, 5, 13] по статистике ветвящегося процесса с иммиграцией (ВПИ). Сначала напомним определение этого процесса.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$ заданы два независимых множества независимых между собой случайных величин $\{\xi_{it}\}$ и $\{\eta_t\}$ с производящими функциями

$$F(s)=\mathsf{E}\, s^{\xi}=\sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k, \quad G(s)=\mathsf{E}\, s^{\eta}=\sum_{k=0}^{\infty} g_k s^k, \ |s|\leqq 1. \tag{1}$$

Здесь и везде в дальнейшем, мы будем опускать, когда это не приводит к недоразумению, нижние индексы случайных величин $\xi_{it}$ и $\eta_t$.

Тогда ВПИ $\{Z_t\}$ может быть определен следующим конструктивным способом

$$Z_{t+1}=\sum_{i=1}^{Z_t} \xi_{i,\,t+1}+\eta_{t+1}, \quad t=0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Без ограничения общности будем предполагать, что $Z_0$ — некоторое фиксированное состояние.

Напомним, что впервые ВПИ в непрерывном времени был полностью исследован Б. Севастьяновым [2]. Затем Ч. Хийткот [8, 9] получил некоторые интересные результаты в дискретном случае. В настоящее время существует довольно большое количество работ по ВПИ, так что с вероятностной точки зрения они хорошо изучены, тогда как в области их статистики (см. [7]) существуют еще нерешенные проблемы.

Введем следующие обозначения

$$\begin{cases} \lambda_1=\mathsf{E}\,\xi, \ \lambda_2=\mathsf{E}\,\eta, \ \sigma_1^2=\mathsf{D}\,\xi, \ \sigma_2^2=\mathsf{D}\,\eta, \\ \mu=\lambda_2/(1-\lambda_1), \ c^2=\mu\sigma_1^2+\sigma_2^2, \ \Delta^2=c^2/(1-\lambda_1^2), \\ \nu_1=\mathsf{E}\,(\xi-\lambda_1)^3, \ \nu_2=\mathsf{E}\,(\eta-\lambda_2)^3, \ \rho_1=\mathsf{E}\,(\xi-\lambda_1)^4, \ \rho_2=\mathsf{E}\,(\eta-\lambda_2)^4, \\ \alpha=\mu\nu_1+\nu_2, \ \beta=\mu\rho_1+\rho_2, \ \gamma=(\alpha+3\lambda_1\sigma_1^2\Delta^2)/(1-\lambda_1^3), \\ \delta=\{\beta+6\lambda_1\sigma_1^2\gamma+\Delta^2(4\lambda_1\nu_1+6\lambda_1^2c^2+3\sigma_1^2\sigma_2^2)+3\sigma_1^2\sigma_2^2\mu(\mu+1)\}/(1-\lambda_1^4). \end{cases} \tag{3}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\{Z_t\}$ является докритическим ВПИ и выполняются условия

$$0<\lambda_1<1, \quad f_0+f_1<1, \quad g_0+g_1<1. \tag{4}$$

Для таких процесов, при некоторых дополнительных предположениях (см. [8, 9]), существует предельное стационарное распределение $\{\Pi_i\}$, для которого $\mu$, $\Delta^2$, $\gamma$ и $\delta$ является соответственно математическим ожиданием, дисперсией, третьим и четвертым центральным моментом.

Ч. Хейде и Е. Сенета [10, 11] впервые начали исследования по статистике докритического ВПИ и показали, что оценки

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k, \quad T_n=\sum_{k=1}^{n}(Z_k-S_n)(Z_{k+1}-S_n)/\sum_{k=1}^{n}(Z_k-S_n)^2 \tag{5}$$

являются состоятельными (а также и сильно состоятельными при дополнительных условиях) соответственно для параметров $\mu$ и $\lambda_1$.

М. Куайн [12] показал сильную (строгую) состоятельность оценок

$$\begin{cases} \widehat{\lambda}_{1,n}=\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k(Z_{k+1}-S_n)/\sum\limits_{k=1}^{n}(Z_k-S_n)^2, \\ \widehat{\lambda}_{2,n}=\dfrac{S_n}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}(-Z_{k+1}Z_k)^2/\sum\limits_{k=1}^{n}(Z_k-S_n)^2, \end{cases} \tag{6}$$

т. е. при $n\to\infty$ $\widehat{\lambda}_{i,n}\xrightarrow{\text{п. н.}}\lambda_i$, $i=1, 2$.

Кроме того, для оценок (5) и (6) в [10—12] доказана асимптотическая нормальность и закон повторного логарифма. При этом дисперсии $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$, также $c^2$, предполагаются известными. Таким образом, вполне естественно возникает вопрос об оценивании этих параметров.

Для этой цели в работах [4, 5, 13] предложены два типа оценок для $c^2$, $\sigma_1^2$ и $\sigma_0^2$ соответственно при известных или неизвестных математических ожиданиях, которые в обоих случаях являются сильно состоятельными.

Введем обозначения

$$\begin{cases} \widetilde{\xi}_{i,t}=\xi_{i,t}-\lambda_1, \quad \widetilde{\eta}_t=\eta_t-\lambda_2, \quad \widetilde{Y}_k=Z_k-\mu, \\ \widetilde{U}_k=\widetilde{Y}_{k+1}-\lambda_1\widetilde{Y}_k=\sum\limits_{i=1}^{Z_k}\widetilde{\xi}_{i,k+1}+\widetilde{\eta}_{k+1}, \\ \overline{Y}_k=Z_k-S_n, \ \overline{U}_k=\overline{Y}_{k+1}-\widehat{\lambda}_{1,n}\overline{Y}_k, \ k=1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{7}$$

где $S_n$ определяется в (5), а $\widehat{\lambda}_{1,n}$ — в (6).

Теперь рассмотрим оценки

$$\widetilde{c}_n^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{U}_k^2, \tag{8}$$

$$\widetilde{\sigma}_{1,n}^2=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{U}_k^2\widetilde{Y}_k/\sum_{k=1}^{n}\widetilde{Y}_k^2, \tag{9}$$

$$\overline{c}_n^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{U}_k^2, \tag{10}$$

(11) $$\overline{\sigma}^2_{1,n} = \sum_{k=1}^{n} \overline{U}_k^2 \overline{Y}_k / \sum_{k=1}^{n} \overline{Y}_k^2 .$$

В [5] показано, что (8) и (9) являются сильно состоятельными оценками для параметров $c^2$ и $\sigma_1^2$ при известных математических ожиданиях $\lambda_1$ и $\lambda_2$. В работе [4] доказано тоже самое для оценок $C_n$ и $D_n$, но при неизвестных математических ожиданиях, где оценки $C_n$ и $D_n$ отличаются от (10) и (11) только тем, что вместо $\widehat{\lambda}_{1,n}$ из (6) используется оценка $T_n$ из (5), причем из приведенного в [4] доказательства видно, что полученные там результаты не зависят от конкретного вида оценки для $\lambda_1$, лишь бы она была состоятельной, т. е. полностью переносятся на оценки (10) и (11). С другой стороны, если в (10) и (11) заменим $\overline{U}_k$ на $\widehat{U}_k = Z_{k+1} - \widehat{\lambda}_{1,n} Z_k - \widehat{\lambda}_{2,n}$, то получим оценки $\widehat{c}^2_n$ и $\widehat{\sigma}^2_{1,n}$, для которых в [5] доказано, что являются сильно состоятельными для параметров $c^2$ и $\sigma_1^2$. Пользуясь методами работы [5] вполне аналогично можно получить то же самое и для оценок (10) и (11).

Основной целью настоящей работы является доказательство асимтотической нормальности и закона повторного логарифма для оценок (8—10).

**2. Вспомогательные результаты.** Как было отмечено в [12], пространство состояний процесса содержит счетный неразложимый класс $I^*$, который является носителем $\{Z_1, Z_2, \ldots\}$, причем состояние $\varkappa = \inf\{k:\ g_k > 0\} = \inf\{i:\ i \in I^*\}$ достижимо для всех $t \geqq 1$, т. е. класс $I^*$ — непериодичен.

Обозначим

(12) $$\tau = \inf\{i \geqq 1:\ Z_i = \varkappa\}\, I\{Z_0 = \varkappa\},\ h(s) = \mathsf{E} s^{\tau},$$

(13) $$T = \inf\{j \geqq 1:\ Z_j = Z_{j+1} = \varkappa\}\, I\{Z_0 = Z_1 = \varkappa\},\ H(s) = \mathsf{E}\, s^{T}.$$

М. Куайн [12] показал, что между производящими функциями (12) и (13) существует зависимость

(14) $$H(s) = as/(1 + as - h(s)),$$

где $a = \mathsf{P}\{T = 1 \mid Z_0 = Z_1 = \varkappa\}$.

Так как Зубковым [1] было доказано, что в докритическом случае периоды жизни ВПИ имеют конечные моменты любого порядка, то отсюда вытекает тоже самое для $\sigma$. Тогда из (14) следует, что $\mathsf{E}\, T^r < \infty$, $r = 1, 2, \ldots$ .

Введем обозначения

(15) $$\mathscr{F}_k = \sigma\{Z_0, Z^1, \ldots, Z_k\},\ k = 1, 2, \ldots .$$

Лемма 1. *Если* $\mathsf{E}\,\xi^r < \infty$, $\mathsf{E}\,\eta^r < \infty$ *и выполняется (4), то*

(16) $$Q_r = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{T > j\}} Z_j^r d\mathsf{P} < \infty.$$

Доказательство. Из (13) следует, что

(17) $$\begin{aligned} \{T = j\} &= \{Z_0 = Z_1 = \varkappa,\ Z_2 \neq \varkappa, \ldots,\ Z_{j-1} \neq \varkappa,\ Z_j = Z_{j+1} = \varkappa\}, \\ \{T > j\} &= \{Z_0 = Z_1 = \varkappa,\ Z_2 \neq \varkappa, \ldots,\ Z_j \neq \varkappa\}. \end{aligned}$$

Так как $\{T > j\} \subset \{T > j-1\} \in \mathscr{F}_{j-1}$, то

$$a_j = \int_{\{T > j\}} Z_j d\mathsf{P} \leq \int_{\{T > j-1\}} \mathsf{E}\{Z_j \mid \mathscr{F}_{j-1}\}\, d\mathsf{P} = \lambda_1 \int_{\{T > j-1\}} Z_{j-1} d\mathsf{P} + \lambda_2 \mathsf{P}\{T > j-1\}.$$

Последнее равенство получается сразу из (2). Следовательно,

$$a_j \leq \lambda_1 a_{j-1} + \lambda_2 \mathsf{P}\{T > j-1\} \leq \lambda_1^j a_0 + \lambda_2 \sum_{i=1}^{j} \lambda_1^{i-1} \mathsf{P}\{T > j-i\}.$$

Отсюда, имея в виду, что $\mathsf{E}\,T = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{T > k\}$, получаем

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \leq a_0\lambda_1/(1-\lambda_1) + \lambda_2 \mathsf{E}\,T/(1-\lambda_1).$$

Аналогично находим

$$b_j = \int_{\{T>j\}} Z_j^2 d\,\mathsf{P} \leq \int_{\{T>j-1\}} \mathsf{E}\{Z_j^2 \mid \mathscr{F}_{j-1}\} d\,\mathsf{P}.$$

Теперь из (2) нетрудно получить, что $\mathsf{E}\{Z_j^2 \mid \mathscr{F}_{j-1}\} = \lambda_1^2 Z_{j-1}^2 + A_1 Z_{j-1} + A_2$, где $A_1 = \sigma_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2$, $A_2 = \mathsf{E}\,\eta^2$. Следовательно,

$$b_j \leq \lambda_1^2 b_{j-1} + A_1 a_{j-1} + A_2 \mathsf{P}\{T > j-1\} \leq \lambda_1^{2j} b_0 + A_1 \sum_{k=1}^{j} \lambda_1^{2(k-1)} a_{j-1} + A_2 \sum_{k=1}^{j} \lambda_1^{2(k-1)} \mathsf{P}\{T > j-k\},$$

$$Q_2 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \leq b_0\lambda_1^2/(1-\lambda_1^2) + \frac{A_1}{1-\lambda_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \frac{A_2 \mathsf{E}\,T}{1-\lambda_1^2} < \infty.$$

Теперь из (2) нетрудно показать, что

$$\mathsf{E}\{Z_j^3 \mid \mathscr{F}_{j-1}\} = \lambda_1^3 Z_{j-1}^3 + B_1 Z_{j-1}^2 + B_2 Z_{j-1} + B_3,$$

$$\mathsf{E}\{Z_j^4 \mid \mathscr{F}_{j-1}\} = \lambda_1^4 Z_{j-1}^4 + K_1 Z_{j-1}^3 + K_2 Z_{j-1}^2 + K_3 Z_{j-1} + K_4,$$

где постоянные $B_i$ и $K_i$ вычисляются точно, $B_i$ зависит от первых трех моментов $\xi$ и $\eta$, а $K_i$ — от первых четырех.

Следовательно,

$$c_j = \int_{\{T>j\}} Z_1^3 d\,\mathsf{P} \leq \lambda_1^3 C_{j-1} + B_1 b_{j-1} + B_2 a_{j-1} + B_3 \mathsf{P}\{T > j-1\},$$

$$d_j = \int_{\{T>j\}} Z_j^4 d\,\mathsf{P} \leq \lambda_1^4 d_{j-1} + K_1 c_{j-1} + K_2 b_{j-1} + K_3 a_{j-1} + K_4 \mathsf{P}\{T > j-1\},$$

откуда последовательно получаем $Q_3 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j < \infty$, $Q_4 = \sum_{j=1}^{\infty} d_j < \infty$.

Вполне аналогично доказывается, что $Q_5 < \infty$ и т. д.

Замечание. На самом деле в дальнейшем мы будем пользоваться (16) только при $r = 1, 2, 3, 4$.

Лемма 2. *Если* $\mathsf{E}\,\xi^{m+n} < \infty$, $\mathsf{E}\,\eta^{m+n} < \infty$ *и выполняется* (4), *то*

$$R_{m,n} = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} \int_{\{T>j\}} Z_i^m Z_j^n d\,\mathsf{P} < \infty. \tag{18}$$

Доказательство. При $m = 0$ (18) следует из леммы 1. При $n = 0$ нетрудно заметить, что

$$R_m = \mathsf{E}_0 \sum_{j=2}^{T} \sum_{i=1}^{j-1} Z_i^m < \infty, \tag{19}$$

где конечность математического ожидания показана в [12].

С другой стороны,

$$r_j=\sum_{i=1}^{j-1}\int_{\{T>j\}} Z_i^m Z_j d\,\mathsf{P} \leqq \sum_{i=1}^{j-1}\int_{\{T>j-1\}} Z_i^m\,\mathsf{E}(Z_j\mid \mathscr{F}_{j-1})d\,\mathsf{P}$$

$$=\lambda_1 r_{j-1}+\lambda_1\int_{\{T>j-1\}} Z_{j-1}^{m+1}d\,\mathsf{P}+\lambda_2\sum_{i=1}^{j-1}\int_{\{T>j-1\}} Z_i^m d\,\mathsf{P}.$$

Из этого рекурентного соотношения нетрудно получить, что

$$r_j\leqq \lambda_1^{j-2}r_2+\sum_{k=1}^{j-2}\lambda_1^k\int_{\{T>j-k-2\}} Z_{j-k}^{m+1}d\,\mathsf{P}+\lambda_2\sum_{k=1}^{j-2}\lambda_1^{k-1}\sum_{i=1}^{j-k}\int_{\{T>j-k\}} Z_j^m d\,\mathsf{P}.$$

Следовательно,

$$R_{m,1}=\sum_{j=2}^{\infty} r_j\leqq r_2/(1-\lambda_1)+(1-\lambda_1)^{-1}\sum_{l=2}^{\infty}\int_{\{T>l\}} Z_l^{m+1}d\,\mathsf{P}+(1-\lambda_1)^{-1}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{l}\int_{\{T>l\}} Z_i^m d\,\mathsf{P}<\infty,$$

ввиду (16) и (19).

Вполне аналогично доказывается, что $R_{m,2}<\infty$ и т. д.

**Замечание.** В дальнейшем мы будем пользоваться утверждением (18) только при $m=0, 1, 2, 3$ и $n=0, 1, 2$.

**Лемма 3.** *Если* $\mathsf{E}\,\xi^4<\infty$, $\mathsf{E}\,\eta^4<\infty$ *и выполняется* (4), *то*

$$\mathsf{E}\Big(\sum_{k=1}^{T}\widetilde{U}_k^2\Big)^2<\infty. \tag{20}$$

**Доказательство.** Сначала заметим, что

$$\mathsf{E}\Big(\sum_{k=1}^{T}\widetilde{U}_k^2\Big)^2=\mathsf{E}\sum_{k=1}^{T}\widetilde{U}_k^4+2\,\mathsf{E}\sum_{j=2}^{T}\sum_{i=1}^{j-1}\widetilde{U}_j^2\widetilde{U}_i^2. \tag{21}$$

С другой стороны, имея в виду (17), получаем

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{T}\widetilde{U}_k^4=\mathsf{E}\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{U}_k^4 I_{\{T\geqq k\}}=\mathsf{E}\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{U}_k^4 I_{\{T=k\}}+\mathsf{E}\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{U}_k^4 I_{\{T>k\}}=(\varkappa-\lambda_1\varkappa-\lambda_2)^4\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{T=k\}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\{T>k\}}\widetilde{U}_k^4 d\,\mathsf{P}.$$

Так как для независимых случайных величин $\tilde\xi=\xi-\lambda_1$ и $\tilde\eta=\eta-\lambda_2$ имеем $\mathsf{E}\,\tilde\xi=\mathsf{E}\,\tilde\eta=0$, $\mathsf{E}\,\tilde\xi^2=\sigma_1^2$, $\mathsf{E}\,\tilde\eta^2=\sigma_2^2$, $\mathsf{E}\,\tilde\xi^4=\rho_1$ и $\mathsf{E}\,\tilde\eta^4=\rho_2$, то из (7) нетрудно подсчитать, что

$$\mathsf{E}(\widetilde{U}_k^4\mid\mathscr{F}_k)=\mathsf{E}\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{Z_k}\tilde\xi_{i,k+1}+\tilde\eta_{k+1}\Big)^4\Big|\mathscr{F}_k\Big\}=\alpha_1 Z_k^2+\alpha_2 Z_k+\alpha_3, \tag{22}$$

где $\alpha_1=3\sigma_1^4$, $\alpha_2=6\sigma_1^2\sigma_2^2+\rho_1-3\sigma_1^4$, $\alpha_3=\rho_2$.

Следовательно, из $\{T>k\}\in\mathscr{F}_k$ находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\{T>k\}}\widetilde{U}_k^4 d\,\mathsf{P}=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\alpha_1\int_{\{T>k\}} Z_k^2 d\,\mathsf{P}+\alpha_2\int_{\{T>k\}} Z_k d\,\mathsf{P}+\alpha_3\mathsf{P}\{T>k\}\Big),$$

откуда по лемме 1 и того, что $\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}\{T>k\}=\mathsf{E}\,T<\infty$, получаем

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{T}\widetilde{U}_k^4<\infty. \tag{23}$$

Аналогично

$$\mathsf{E}\sum_{j=2}^{T}\sum_{i=1}^{j-1}\widetilde{U}_j^2\widetilde{U}_i^2=\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\mathsf{E}\,\widetilde{U}_j^2\widetilde{U}_i^2 I_{\{T\geq j\}}$$

$$=\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\mathsf{E}\,\widetilde{U}_j^2\widetilde{U}_i^2 I_{\{T>j\}}+(\varkappa-\lambda_1\varkappa-\lambda_2)^2\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\mathsf{E}\,\widetilde{U}_i^2 I_{\{T=j\}}=S_1+(\varkappa-\lambda_1\varkappa-\lambda_2)^2 S_2.$$

Теперь, применяя неравенство Коши — Буняковского — Шварца, получаем

$$S_2=\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\int_{\{T=j\}}\widetilde{U}_i^2 d\,\mathsf{P}=\int_{\{T\geq 2\}}\sum_{i=1}^{T-1}\widetilde{U}_i^2 d\,\mathsf{P}$$

$$\leq \mathsf{E}\sum_{i=1}^{T}\widetilde{U}_i^2\leq(\mathsf{E}\,T^2)^{1/2}(\mathsf{E}\max_{1\leq i\leq T}\widetilde{U}_i^4)^{1/2}\leq(\mathsf{E}\,T^2)^{1/2}(\mathsf{E}\sum_{i=1}^{T}\widetilde{U}_i^4)^{1/2}<\infty.$$

Так как при $j>i$ случайные величины $U_i$ являются $\mathscr{F}_j$ — измеримыми, а $\{T>j\}\in\mathscr{F}_j$ (см. (15) и (17)), то из (7) вытекает, что $\mathsf{E}(\widetilde{U}_j^2\,|\,\mathscr{F}_j)=\sigma_1^2 Z_j+\sigma_2^2$ и, следовательно,

$$\mathsf{E}\,\widetilde{U}_j^2\widetilde{U}_i^2 I_{\{T>j\}}=\int_{\{T>j\}}\widetilde{U}_i^2\,\mathsf{E}(\widetilde{U}_j^2\,|\,\mathscr{F}_j)d\,\mathsf{P}=\sigma_1^2\int_{\{T>j\}}\widetilde{U}_i^2 Z_j d\,\mathsf{P}+\sigma_2^2\int_{\{T>j\}}\widetilde{U}_i^2 d\,\mathsf{P}.$$

Отсюда, имея в виду, что $\widetilde{U}_i=Z_{i+1}-\lambda_1 Z_i-\lambda_2$, нетрудно заметить, что

$$S_1=\sigma_1^2\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\int_{\{T>j\}}\widetilde{U}_i^2 Z_j d\,\mathsf{P}+\sigma_2^2\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\int_{\{T>j\}}\widetilde{U}_i^2 d\,\mathsf{P}<\infty,$$

потому что $S_1$ можно представить как линейную комбинацию выражений $Q_r$ и $R_{m,1}$ из леммы 1 и леммы 2, где $r\leq 3$, $m\leq 2$.

Следовательно,

$$\mathsf{E}\sum_{j=2}^{T}\sum_{i=1}^{j-1}\widetilde{U}_j^2\widetilde{U}_i^2<\infty. \tag{24}$$

Теперь из (21 — 24) получаем (20).

Лемма 4. *Если* $\mathsf{E}\xi^5<\infty$, $\mathsf{E}\eta^5<\infty$ *и выполняется* (4), *то*

$$\mathsf{E}(\sum_{i=1}^{T}|\widetilde{Y}_k(\widetilde{U}_k^2-\sigma_1^2 Y_k)|)^2<\infty. \tag{25}$$

Доказательство. Заметим, что (25) — эквивалентно соотношениям

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{T}V_k^2<\infty,\quad \mathsf{E}\sum_{j=2}^{T}\sum_{i=1}^{j-1}|V_iV_j|<\infty, \tag{26}$$

где

$$V_k=\widetilde{Y}_k(\widetilde{U}_k^2-\sigma_1^2\widetilde{Y}_k). \tag{27}$$

С другой стороны,

$$\mathsf{E}\sum_{k=1}^{T}V_k^2=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\{T\geq k\}}V_k^2 d\,\mathsf{P}$$

$$=\{(\varkappa-\mu)[(\varkappa-\lambda_1\varkappa-\lambda_2)^2-\sigma_1^2(\varkappa-\mu)]\}^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}\{T\geq k\}+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\{T>k\}}\widetilde{Y}_k^2\,\mathsf{E}\{(\widetilde{U}_k^2-\sigma_1^2\widetilde{Y}_k)^2\mid\mathscr{F}_k\}d\,\mathsf{P}.$$

Из (7) нетрудно подсчитать, что $\mathsf{E}\{\widetilde{U}_k\mid\mathscr{F}_k\}=0$,

$\mathsf{E}(\widetilde{U}_k^2\mid\mathscr{F}_k)=\sigma_1^2Z_k+\sigma_2^2$ и, следовательно,

$$\widetilde{Y}_k^2\,\mathsf{E}\{(\widetilde{U}_k^2-\sigma_1^2\widetilde{Y}_k)^2\mid\mathscr{F}_k\}=C_1Z_k^4+C_2Z_k^3+C_3Z^2+C_4,\ \text{т. е. }\ \mathsf{E}\sum_{k=1}^{T}V_k^2<\infty,$$

потому что выражается линейной комбинацией $\mathsf{E}\,T<\infty$ и выражений $Q_r$, $r=2, 3, 4$, которые по лемме 1 конечны.

Далее,

$$\mathsf{E}\sum_{j=2}^{T}\sum_{i=1}^{j-1}|V_iV_j|=\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\mathsf{E}\,|V_iV_j|\,I_{\{T>j\}}+|(\varkappa-\mu)[(\varkappa-\lambda_1\varkappa-\lambda_2)^2\tag{28}$$

$$-\sigma_1^2(\varkappa-\mu)]|\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\mathsf{E}\,|V_i|\,I_{\{T=j\}}.$$

Теперь из неравенства Коши — Буняковского — Шварца

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{j-1}\int\limits_{\{T=j\}}|V_i|\,d\,\mathsf{P}=\int\limits_{\{T\geq 2\}}\sum_{i=1}^{T-1}|V_i|\,d\,\mathsf{P}\leq\mathsf{E}\sum_{i=1}^{T}|V_i|\leq\mathsf{E}\{T\max_{1\leq i\leq T}|V_i|\}\leq\{\mathsf{E}\,T^2\,\mathsf{E}\sum_{i=1}^{T}V_i^2\}^{1/2}<\infty,$$

по только что доказанному.

Так как при $i<j$ случайные величины $V_i$ являются $\mathscr{F}_j$-измеримыми, а $\{T>j\}\in\mathscr{F}_j$, то

$$\mathsf{E}(|V_iV_j|\,I_{\{T>j\}})=\int\limits_{\{T>j\}}|V_i|\,\mathsf{E}(|V_j|\,|\,\mathscr{F}_j)d\,\mathsf{P},$$

$$\mathsf{E}(|V_j|\,|\,\mathscr{F}_j)\leq K_1Z_j^2+K_2Z_j+K_3,$$

где $K_i$ — положительные константы.

Следовательно, первую сумму в (28) можно представить как линейную комбинацию $\mathsf{E}\,T<\infty$, $Q_r<\infty$, $r\leq 4$, $R_{m,n}<\infty$, $m\leq 3$, $n\leq 2$ (см. лемму 1 и лемму 2).

Таким образом соотношение (26), а, следовательно, и (25), полностью доказано.

Лемма 5. *Если выполняется (4) и* $\mathsf{E}\,\xi^4<\infty$, $\mathsf{E}\,\eta^4<\infty$, *то*

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathsf{E}\{\sum_{k=1}^{n}\widetilde{U}_k^2-c^2)\}^2\tag{28 a}$$

$$=\beta+c^4+\sigma_1^2\{2[\alpha+\sigma_1^2\Delta^2(1-3\lambda_1)]+3\lambda_2(c^2+\sigma_1^2-\mu)\}(1-\lambda_1)^{-1}.$$

Доказательство. Сначала вычислим математическое ожидание случайной величины

$$W_n=(\sum_{k=1}^{n}\widetilde{U}_k^2-nc^2)^2=\sum_{k=1}^{n}\widetilde{U}_k^4+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i}\widetilde{U}_i^2\widetilde{U}_{i+j}^2-2nc^2\sum_{k=1}^{n}\widetilde{U}_k^2+n^2c^4.\tag{29}$$

Из (7) нетрудно подсчитать, что

$$\mathsf{E}\,\widetilde{U}_k^2=\mathsf{E}\{\mathsf{E}(\widetilde{U}_k^2\mid\mathscr{F}_k)\}=\sigma_1^2\,\mathsf{E}\,Z_k+\sigma_2^2=c^2+\mu(\mathsf{E}\,Z_0-\lambda_2)\lambda_1^k,\tag{30}$$

так как из (2) имеем

$$\mathsf{E}\,Z_k=\mu+\mu(\mathsf{E}\,Z_0-\lambda_2)\lambda_1^k.\tag{31}$$

Теперь из (22) находим

(32) $$\mathsf{E}\,\widetilde{U}_k^4=3\sigma_1^4\,\mathsf{E}\,Z_k^2+(6\sigma_1^2\sigma_2^2+\rho_1-3\sigma_1^4)\,\mathsf{E}\,Z_k+\rho_2$$
$$=\beta+6\mu\sigma_1^2\sigma_2^2+3\sigma_1^4(\Delta^2+\mu^2-\mu)+O(\lambda_1^n),$$

имея в виду (31) и того, что из (2) имеем

(33) $$\mathsf{E}\,Z_n^2=\Delta^2+\mu^2+O(\lambda_1^n).$$

С другой стороны, имея в виду (7) и (3), последовательно получаем

$$\mathsf{E}\,\widetilde{U}_i^2\widetilde{U}_{i+j}^2=\mathsf{E}\,\{\widetilde{U}_i^2\,\mathsf{E}\,(\widetilde{U}_{i+j}^2\mid\mathcal{F}_{i+j})\}=\sigma_1^2\,\mathsf{E}\,(\widetilde{U}_i^2\widetilde{Y}_{i+j})+c^2\,\mathsf{E}\,\widetilde{U}_i^2,$$

$$\mathsf{E}\,\widetilde{U}_i^2\widetilde{Y}_{i+j}=\mathsf{E}\,\{\widetilde{U}_i^2\,\mathsf{E}\,(\widetilde{Y}_{i+j}\mid\mathcal{F}_{i+j})\}=\lambda_1\,\mathsf{E}\,(\widetilde{U}_i^2Y_{i+j-1})=\ldots=\lambda_1^{j-1}\,\mathsf{E}\,\widetilde{U}_i^2\widetilde{U}_{i+1},$$

$$\mathsf{E}\,\widetilde{U}_i^2\widetilde{Y}_{i+1}=\mathsf{E}\widetilde{U}_i^3-\lambda_1\,\mathsf{E}\,\widetilde{Y}_i\widetilde{U}_i^2=\nu_1\,\mathsf{E}\widetilde{Y}_i+\alpha-\lambda_1\,\mathsf{E}\,\{\widetilde{Y}_i\,\mathsf{E}\,(\widetilde{U}_i^2\mid\mathcal{F}_i)\}$$
$$=\alpha+(\nu_1-\lambda_1c^2)\,\mathsf{E}\,\widetilde{Y}_i-\lambda_1c^2\,\mathsf{E}\,\widetilde{Y}_i^2=\alpha-\lambda_1\sigma_1^2\Delta^2+O(\lambda_1^i).$$

Следовательно, $\mathsf{E}\,\widetilde{U}_i^2\widetilde{U}_{i+j}^2=\sigma_1^2\lambda_1^{j-1}(\alpha-\lambda_1\sigma_1^2\Delta^2)+c^2\,\mathsf{E}\,\widetilde{U}_i^2+O(\lambda_1^{i+j})$,

(34) $$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i}\mathsf{E}\,\widetilde{U}_i^2\widetilde{U}_{i+j}^2=\frac{2\sigma_1^2}{1-\lambda_1}(\alpha-\lambda_1\sigma_1^2\Delta^2)n+2c^2\sum_{i=1}^{n-1}\mathsf{E}\,\widetilde{U}_i^2(n-i)+o(n).$$

Теперь из (29, 30, 32) и (34) вытекает

$$\mathsf{E}\,W_n=n\{\beta+6\mu\sigma_1^2\sigma_2^2+3\sigma_1^4(\Delta^2+\mu^2-\mu)+c^4+2\sigma_1^2(\alpha-\lambda_1\sigma_1^2\Delta^2)/(1-\lambda_1)\}+o(n),$$

откуда очевидным образом получаем (28 а).

Лемма 6. *Если выполняется* (4) *и* $\mathsf{E}\,\xi^5<\infty$, $\mathsf{E}\,\eta^5<\infty$, *то*

(35) $$M_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\mathsf{E}\,\{\sum_{k=1}^{n}\widetilde{Y}_k(\widetilde{U}_k^2-\sigma_1^2\widetilde{Y}_k)\}^2$$
$$=2\delta(\sigma_1^4+2\lambda_1(1+\lambda_1)\Delta^2)+\gamma[\rho_1+3\sigma_1^2(2\sigma_2^2-\sigma_1^2)-2\Delta^2(1+\lambda_1)(\lambda_1^2+\sigma_1^2)]$$
$$+\Delta^2[\rho_2+\Delta^2(1+\lambda_1)(\nu_1-3\lambda_1c^2-2\lambda_1\sigma_1^2)].$$

Доказательство. В обозначениях (27) леммы 4 имеем

(36) $$\mathsf{E}\,(\sum_{k=1}^{n}V_k)^2=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}\,V_k^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i}\mathsf{E}\,V_iV_{i+j}.$$

Из (27, 22) и (7) последовательно получаем

(37) $$\mathsf{E}\,V_k^2=\mathsf{E}\,\{\widetilde{Y}_k^2\,\mathsf{E}\,\{\widetilde{U}_k^4\mid\mathcal{F}_k)\}-2\sigma_1^2\,\mathsf{E}\,\{\widetilde{Y}_k^3\,\mathsf{E}\,(\widetilde{U}_k^2\mid\mathcal{F}_k)\}+\sigma_1^4\,\mathsf{E}\,\widetilde{Y}_k^4$$
$$=2\sigma_1^4\,\mathsf{E}\,\widetilde{Y}_k^4+(\rho_1+6\sigma_1^2\sigma_2^2-3\sigma_1^4-2\sigma_1^2c^2)\,\mathsf{E}\,\widetilde{Y}_k^3+\rho_2\,\mathsf{E}\,\widetilde{Y}_k^2.$$

С другой стороны, так как $\mathsf{E}\,(V_{i+j}\mid\mathcal{F}_{i+j})=\widetilde{Y}_{i+j}\{\,\mathsf{E}\,(\widetilde{U}_{i+j}^2\mid\mathcal{F}_{i+j})-\sigma_1^2\widetilde{Y}_{i+j}\}=c^2\widetilde{Y}_{i+j}$, то

(38) $$\mathsf{E}\,V_iV_{i+j}=c^2\,\mathsf{E}\,V_i\widetilde{Y}_{i+j}=c^2\,\mathsf{E}\,\{V_i\,\mathsf{E}\,(\widetilde{Y}_{i+j}\mid\mathcal{F}_{i+j-1})\}$$

$$=c^2\lambda_1 \mathsf{E} V_i \widetilde{Y}_{i+j-1} = \ldots = c^2\lambda_1^{j-1} \mathsf{E} V_i \widetilde{Y}_{i+1}.$$

Из (2) и (7) нетрудно заметить, что в обозначениях (3)

$$\mathsf{E}\{\widetilde{Y}_{i+1} \mid \mathcal{F}_i\} = \lambda_1 \widetilde{Y}_i, \quad \mathsf{E}\{\widetilde{Y}^2_{i+1} \mid \mathcal{F}_i\} = \lambda_1 \widetilde{Y}^2_i + \sigma_1^2 \widetilde{Y}_i + c^2, \tag{39}$$

$$\mathsf{E}\{\widetilde{Y}^3_{i+1} \mid \mathcal{F}_i\} = \lambda_1^3 Y_i^3 + 3\lambda_1\sigma_1^2 \widetilde{Y}_i + (\nu_1 + 3\lambda_1 c^2)\widetilde{Y}_i + \alpha.$$

Следовательно,

$$\mathsf{E}\, V_i \widetilde{Y}_{i+1} = \mathsf{E}\, \widetilde{Y}_i \widetilde{Y}_{i+1}(\widetilde{U}_i^2 - \sigma_1^2 \widetilde{Y}_i) = \mathsf{E}\, \widetilde{Y}_i Y^3_{i+1} - 2\lambda_1 \mathsf{E}\, \widetilde{Y}^2_i \widetilde{Y}^2_{i+1} + \lambda_1 \mathsf{E}\, \widetilde{Y}_i \widetilde{Y}_{i+1} - \sigma_1^2 \mathsf{E}\, \widetilde{Y}^2_i \widetilde{Y}_{i+1} \tag{40}$$

$$= 2\lambda_1^3 \mathsf{E}\, \widetilde{Y}^4_i - \lambda_2(\lambda_1 + \sigma_1^2) \mathsf{E}\, \widetilde{Y}^3_i + (\nu_1 + 3\lambda_1 c^2 - 2\lambda_1\sigma_1^2) \mathsf{E}\, \widetilde{Y}^2_i + (\alpha - 2\lambda_1 c^2) \mathsf{E}\, \widetilde{Y}_i.$$

С другой стороны, из (39) получаются рекурентные соотношения для моментов $\widetilde{Y}_i$, откуда нетрудно заметить, что в обозначениях (3)

$$\mathsf{E}\, \widetilde{Y}_i = \lambda_1^i(\mathsf{E}\, Z_0 - \mu), \quad \mathsf{E} Y_i^2 = \Delta^2 + O(\lambda_1^i), \quad \mathsf{E}\, Y_i^3 = \gamma + O(\lambda_1^i). \tag{41}$$

Вполне аналогично можно показать, что

$$\mathsf{E}\, \widetilde{Y}^4_i = \delta + O(\lambda_1^i), \tag{42}$$

где $\delta$ определяется в (3).

Теперь из (36, 37, 38) и (40), имея в виду (41) и (42), окончательно получаем

$$\mathsf{E}\Big(\sum_{k=1}^n V_k\Big)^2 = n\{2\sigma_1^4\delta + (\rho_1 + 6\sigma_1^2\sigma_2^2 - 3\sigma_1^4 - 2\sigma_1^2 c^2)\gamma$$

$$+ \rho_2\Delta^2 + 2c^2(1-\lambda_1)^{-1}[2\lambda_1\delta - \lambda_1(\lambda_1^2 + \sigma_1^2)\gamma + \Delta^2(\nu_1 + 3\lambda_1 c^2 - 2\lambda_1\sigma_1^2)]\} + o(n),$$

откуда сразу вытекает (35).

**3. Асимптотическая нормальность и закон повторного логарифма.** Напомним, что асимптотическая нормальность (АН) $\xi_n \backsim N(a_n, b_n)$ означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big\{\frac{\xi_n - a_n}{\sqrt{b_n}} \le x\Big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

Тогда закон повторного логарифма (ЗПЛ) определяется соотношениями

$$\limsup \frac{\xi_n - a_n}{\sqrt{2b_n \log\log n}} = 1 \text{ п. н.}, \quad \liminf \frac{\xi_n - a_n}{\sqrt{2b_n \log\log n}} = -1 \text{ п. н.}$$

Теорема 1. *Если* $\mathsf{E}\,\xi^4 < \infty$, $\mathsf{E}\,\eta^4 < \infty$ *и выполняется* (4), *то* $\widetilde{c}^2_n \backsim N(c^2, L/n)$ *и* $\widetilde{c}^2_n$ *удовлетворяет ЗПЛ, где постоянная* $L$ *определяется в* (28 а) *леммы 5.*

Доказательство. Рассмотрим марковский процесс $\widetilde{Z} = (Z_k, Z_{k+1})$, для которого случайная величина $T$, определенная в (13), является временем между двумя последовательными моментами восстановления. Теперь лемма 3 показывает, что для функционала от процесса $f(\widetilde{Z}_k) = (Z_{k+1} - \lambda_1 Z_k - \lambda_2)^2 = \widetilde{U}^2_k$ выполняются условия (16.7) из [3].

Тогда АН вытекает из теоремы 16.1. [3], где нормировочная константа $L$ в соответствии с теоремой 16. 3. [3] должна быть определена как в (28 а) леммы 5. Теперь из леммы 3 и леммы 5 по теореме 16. 5. [3] получаем ЗПЛ.

Теорема 2. *Если* $\mathsf{E}\xi^5<\infty$, $\mathsf{E}\eta^5<\infty$ *и выполняется* (4), *то* $\tilde{\sigma}^2_{1,n}\backsim N(\sigma_1^2, M/n)$ *и* $\tilde{\sigma}^2_{1,n}$ *удовлетворяет ЗПЛ, где постоянная* $M=M_1/\Delta^4$, *а* $M_1$ *определяется в* (35) *леммы 6.*

Доказательство. Для марковского процесса $\tilde{Z}_k=(Z_k, Z_{k+1})$ рассмотрим теперь функционал

$$f(\tilde{Z}_k)=(Z_k-\mu)\{(Z_{k+1}-\lambda_1 Z_k-\lambda_2)^2-\sigma_1^2(Z_k-\mu)\}=\tilde{Y}_k(\tilde{U}_k^2-\sigma_1^2\tilde{Y}_k).$$

Если обозначим $W_n=\Sigma_{k=1}^n f(\tilde{Z}_k)$, то нетрудно заметить, что

$$\sqrt{\frac{n}{M}}(\tilde{\sigma}^2_{1,n}-\sigma_1^2)=\frac{W_n}{\sqrt{M_1 n}}\{\frac{1}{\Delta^2 n}\sum_{k=1}^n\tilde{Y}_k^2\}^{-1}. \tag{43}$$

Лемма 4 показывает, что для функционала $f(\tilde{Z}_k)$ справедливы условия (16.7) из [3], откуда по теореме 16.1. [3] имеем АН, т. е. $W_n/\sqrt{M_1 n}\xrightarrow{d}N(0,1)$, $n\to\infty$, где по теореме 16.3 [3] нормировочная константа $M_1$ определяется как в (35) леммы 6. Теперь АН оценки $\tilde{\sigma}^2_{1,n}$ вытекает сразу из (43), имея в виду, что $\frac{1}{n}\Sigma_{k=1}^n\tilde{Y}_k^2\xrightarrow{\text{п. н.}}\Delta^2$, $n\to\infty$, как это показано в (15) из работы [5].

ЗПЛ получается из леммы 4 и леммы 6 в соответствии с теоремой 16.3 из [3].

Теорема 3. *Если* $\mathsf{E}\xi^4<\infty$, $\mathsf{E}\eta^4<\infty$ *и выполняется* (4), *то* $\bar{c}_n^2\backsim N(c^2, L/n)$ *и, кроме того,* $\bar{c}_n^2$ *удовлетворяет ЗПЛ, где постоянная* $L$ *определяется в* (28) *леммы 5.*

Доказательство. Из (7), имея в виду, что $\bar{Y}_k=\tilde{Y}_k+(\mu-S_n)$, получаем

$$\bar{U}_k^2=(\bar{Y}_{k+1}-\hat{\lambda}_{1,n}\bar{Y}_k)^2=\{\tilde{U}_k-\tilde{Y}_k(\hat{\lambda}_{1,n}-\lambda_1)-(S_n-\mu)(1-\hat{\lambda}_{1,n})\}^2. \tag{44}$$

Тогда из (10) находим

$$\sqrt{n}\,(\bar{c}_n^2-c^2)=\sqrt{n}\,(\tilde{c}_n^2-c^2)+R_n, \tag{45}$$

где

$$R_n=\sqrt{n}\,(\hat{\lambda}_{1,n}-\lambda_1)^2(\frac{1}{n}\Sigma_{k=1}^n\tilde{Y}_k^2)+\sqrt{n}(S_n-\mu)^2(1-\hat{\lambda}_{1,n})$$
$$-2\sqrt{n}\,(\hat{\lambda}_{1,n}-\lambda_1)(\frac{1}{n}\Sigma_{k=1}^n\tilde{U}_k\tilde{Y}_k)-2\sqrt{n}\,(S_n-\mu)(1-\hat{\lambda}_{1,n})(\frac{1}{n}\Sigma_{k=1}^n\tilde{U}_k)$$
$$+2\sqrt{n}\,(S_n-\mu)^2(\hat{\lambda}_{1,n}-\lambda_1)(1-\hat{\lambda}_{1,n}).$$

Из [10, 11] имеем $S_n\xrightarrow{\text{п. н.}}\mu$, $\sqrt{n}\,(S_n-\mu)\backsim N(0,K)$, а из [12] — $\hat{\lambda}_{1,n}\xrightarrow{\text{п. н.}}\lambda_1$, $\sqrt{n}\,(\hat{\lambda}_{1,n}-\lambda)\backsim N(0,K_1)$. С другой стороны, соотношение (16) работы [5] показывает, что п. н.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\tilde{U}_k\to 0,\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\tilde{U}_k\tilde{Y}_k\to 0.$$

Таким образом $R_n\xrightarrow{\text{п. н.}}0$, $n\to\infty$, что доказывает теорему, ввиду (45) и теорему 1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Зубков. Периоды жизни ветвящегося процесса с иммиграцией. *Теория вероятн. и ее применен.*, 27, 1972, № 1 179 — 188.
2. Б. А. Севастьянов. Предельные теоремы для ветвящихся процессов специального вида. *Теория вероятн. и ее применен.*, 2. 1957, № 2, 339 — 348.
3. Чжун Кай — лай. Однородные цепи Маркова. М., 1964.
4. Н. М. Янев. Оценки дисперсий в докритическом ветвящемся процессе с иммиграцией. *Годишник Соф. унив.*, фак. мат. мех., 71, 2 ч., 1982, 39—44.
5. Н. М. Янев, С. С. Данчева. Оценивание дисперсий в ветвящемся процессе с иммиграцией. *Математика и мат. образование*, С., 1979, 608 — 617.
6. P. Billingsley. Statistical Inference for Markov Prosesses. Chicago, 1961.
7. J.-P. Dion, N. Keiding. Statistical inference in branching processes. — In: "Advances in Probability, vol. 5: Branching processes". New York, 1978, 105-140.
8. C. R. Heathcote. A branching process allowing immigration. *J. Roy. Statist. Soc.*, 27 1965, 138-143.
9. C. R. Heathcote. Corrections and comments on the paper: "A branching process allowing immigration". *J. Roy. Statist. Soc.*, 28, 1966, 213-217.
10. C. C. Heyde, E. Seneta. Estimation theory for growth and immigration rates in multiplicative process. *J. Appl. Probab.*, 9, 1972, 235-256.
11. C. C. Heyde, E. Seneta. Notes on "Estimation theory for growth and immigration rates in a multiplicative process". *J. Appl. Probab.*, 11, 1974, 572-577.
12. M. P. Quine. Asymptotic results for estimators in a subcritical branching process with immigration. *Ann. Probab.*, 4, 1976, 319-325; *Corr. Note*, 5, 1977, 318.
13. N. M. Yanev, S. Tchoukova-Dantcheva. On the statistics of branching processes with immigration. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 33, 1980, 469-471.

*Единый центр математики и механики*
*София 1090* *П. Я. 373*

*Поступила 15. 2. 1984*