Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О МЕТРИЗАЦИИ ГРУБОЙ СХОДИМОСТИ

СВЕТЛОЗАР Т. РАЧЕВ, ГЕОРГИ С. ЧОБАНОВ

В предлагаемой работе определяются и изучаются две метрики, имеющие простую метрическую структуру и метризующих грубую топологию в пространстве реализаций случайных мер.

1. В теории случайных мер и теории точечных процессов основным аппаратом является грубая (vague) топология в пространстве мер (см. [1—4]).

Пусть U — метрическое пространство с метрикой d и борелевской σ-алгеброй $\mathfrak{L}$. Обозначим через $\mathfrak{L}_0$ кольцо всех ограниченных множеств B из $\mathfrak{L}$ и через $\mathfrak{M}$ — множество всех неотрицательных мер на $\mathfrak{L}$ и принимающих конечные значения на $\mathfrak{L}_0$. Грубой топологией в $\mathfrak{M}$ называется самая слабая из топологий в $\mathfrak{M}$ относительно которых функция

$$\mu\to\int f(x)\mu(dx),\quad \mu\in\mathfrak{M}$$

непрерывна для всех $f\in\mathfrak{F}_C$, где $\mathfrak{F}_C$ — множество всех ограниченных действительных функций на U, имеющих ограниченным носителем. Грубую сходимость последовательности $\{\mu_n\}$ к μ, т. е. сходимость в грубой топологии, обозначается $\mu_n\xrightarrow{\text{э}}\mu$.

Известны два способа метризации грубой топологии в $\mathfrak{M}$, когда U — польское (полное сепарабельное метрическое) пространство.

I. (см. [3, с. 95]) Пусть $\mathfrak{S}$ — счетная база окрестностей в U, причем можно предполагать, что $\mathfrak{S}\subset\mathfrak{L}_0$ и $\mathfrak{S}$ является замкнутым по отношению конечных объединений. Для любого $C\in\mathfrak{S}$ существует последовательность $f_{C_1}, f_{C_2},\dots$, такая, что $\{f_{C_n}\}$ монотонно возрастая сходится к индикатору I_C. Пусть $f_1, f_2,\dots$ — последовательность, состоящая из всех $f_{C_1}, f_{C_2},\dots$; $C\in\mathfrak{S}$. Следовательно, любая мера $\mu\in\mathfrak{M}$ однозначно определяется последовательностью $\mu f_k=\int f_k d\mu$, $k=1, 2,\dots$ и метрика

$$\rho_1(\mu',\mu'')=\sum_{k=1}^{n}2^{-k}[1-\exp(|\mu' f_k-\mu'' f_k|)],\quad \mu',\mu''\in\mathfrak{M}$$

метризует грубую сходимость в $\mathfrak{M}$.

II. (см. [4, с. 88]) Пусть a — фиксированная точка U, и $g_1, g_2,\dots$ — последовательность функций из $\mathfrak{F}_C$ таких, что $I_{S_n}\leq g_n\leq I_{S_{n+1}}$, где $S_n=S_n(a)=\{x: d(x,a)<n\}$. Для любого $\mu\in\mathfrak{M}$ и $n=1, 2,\dots$ функция множеств

$$g_n\mu(\cdot)=\int_{(\cdot)}g_n(x)\mu(dx)$$

есть конечная мера на $\mathfrak{L}$. Если π — метрика Леви — Прохорова [8] в пространстве всех конечных неотрицательных мер на $\mathfrak{L}$, то метрика

$$\rho_2(\mu',\mu'')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(g_n\mu, g_n\mu'')}{1+\pi(g_n\mu', g_n\mu'')}2^{-n},\quad \mu',\mu''\in\mathfrak{M}$$

метризует грубую сходимость в $\mathfrak{M}$. В [3, 4] показано, что пространство $\mathfrak{M}$ — польское относительно метрик ρ_1 и ρ_2. Цель настоящей работы — определение и изучение двух метрик индуцирующих грубую топологию в $\mathfrak{M}$ и имеющих простую метрическую структуру.

2. Для любой вещественной функции f, заданной на метрическом пространстве (U, d) определим липшицувую норму

$$\|f\|_L = \sup\{|f(x)-f(y)|/d(x, y):\ x \neq y,\ x, y \in U\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{F}\mathfrak{L}$ пространство всех функций с ограниченным носителем и $\|f\| \leq 1$. Очевидно $\mathfrak{F}\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}_C$.

Лемма 1. *Для любого математического пространства (U, d) необходимым и достаточным условием для сходимости $\mu_n \xrightarrow{\text{з}} \mu$ является сходимость*

(1) $$\mu_n f \to \mu f \text{ для всех } f \in \mathfrak{F}\mathfrak{L}.$$

Доказательство: Очевидно соотношение $\mu_n \xrightarrow{\text{з}} \mu$ эквивалентно тому, что для всех f из $\mathfrak{F}_C$ имеет место сходимость $\mu_n f \to \mu f$ и тем самым (1) выполнено. Пусть теперь выполнено (1). Обозначим

$$f_{\varepsilon,B}(x) = \max(0,\ 1 - d(x, B)/\varepsilon)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $B \in \mathfrak{L}_0$. Тогда $\varepsilon f_{\varepsilon,B} \in \mathfrak{F}\mathfrak{L}$ и, следовательно,

(2) $$\mu_n f_{\varepsilon,B} \to \mu f_{\varepsilon,B} \text{ для всех } \varepsilon > 0,\ B \in \mathfrak{L}_0.$$

Для любых $\varepsilon > 0$ и $B \in \mathfrak{L}_0$ определим множества $B^\varepsilon = \{x:\ d(x, B) < \varepsilon\}$, $B_{-\varepsilon} = \{x:\ d(x, U \setminus B) \geq \varepsilon\}$ $Fr^\varepsilon B = B^\varepsilon \setminus B_{-\varepsilon}$. Для любых мер μ' и μ'' из $\mathfrak{M}$ и для любого $B \in \mathfrak{L}_0$ выполнено

$$\mu'(B) \leq \int f_{\varepsilon,B}\, d\mu' \leq \int f_{\varepsilon,B}\, d(\mu' - \mu'') + \mu''(B^\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\mu'(B) \leq \mu'(B_{-\varepsilon}) + \mu'(Fr^\varepsilon B) \leq \int f_{\varepsilon,B_{-\varepsilon}}\, d(\mu' - \mu'') + \mu''(B) + \mu'(Fr^\varepsilon B)$$

и

$$\mu'(B) \leq \int f_{\varepsilon,B}\, d(\mu' - \mu'') + \mu''(B^\varepsilon) \leq \int f_{\varepsilon,B}\, d(\mu' - \mu'') + \mu''(B) + \mu''(Fr^\varepsilon B).$$

Таким образом, в силу симметрии между μ' и μ''

$$|\mu'(B) - \mu''(B)| \leq \left|\int f_{\varepsilon,B_{-\varepsilon}}\, d(\mu' - \mu'')\right| + \left|\int f_{\varepsilon,B}\, d(\mu' - \mu'')\right| + \min(\mu'(Fr^\varepsilon B), \mu''(Fr^\varepsilon B)).$$

Следовательно, для любого

$$|\mu_n(B) - \mu(B)| \leq \left|\int f_{\varepsilon,B_{-\varepsilon}}\, d(\mu_n - \mu)\right| + \left|\int f_{\varepsilon,B}\, d(\mu_n - \mu)\right| + \mu(Fr^\varepsilon B).$$

Следовательно, согласно (2) $\lim_n \sup|\mu_n(B) - \mu(B)| \leq \mu(Fr^\varepsilon B)$ для всех $\varepsilon > 0$, $B \in \mathfrak{L}_0$. Множество $Fr^\varepsilon B$ является ε-окрестностью границы FrB множества B. Следовательно, $\mu_k(B) \to \mu(B)$ для всех $B \in \mathfrak{L}_0$ с $\mu(FrB) = 0$ и тем самым из Т.1.9.2, [4] (см. также Т.А.7.2., [3]) следует, что $\mu_n \xrightarrow{\text{з}} \mu$.

Пусть $\mathscr{F}\mathfrak{L}_m$, $m = 1, 2, \ldots$ — множество всех $f \in \mathfrak{F}\mathfrak{L}$, для которых $f(x) = 0$ при $x \in \bar{S} = \{x:\ d(x, a) \leq m\}$ и $K_m(\mu', \mu'') = \sup\{|\mu' f - \mu'' f|:\ f \in \mathfrak{F}\mathfrak{L}_m\}$, $\mu', \mu'' \in \mathfrak{M}$. Положим

$$K(\mu', \mu'') = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{K_m(\mu', \mu'')}{1 + K_m(\mu', \mu'')},\quad \mu', \mu'' \in \mathfrak{M}.$$

В пространстве $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$ всех мер с общим ограниченным носителем метрика K — метрически эквивалентна метрике Л. Канторовича [5—7].

Теорема 1. *Пусть (U, d) — сепарабельное метрическое пространство. Тогда K метризует грубую сходимость в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство: Согласно лемме 1, нам достаточно показать, что соотношение (1) влечет

$$K(\mu_n, \mu)\to 0. \tag{3}$$

Класс $\mathfrak{FL}$ не изменяется при пополнении пространства и мы без ограничения общности можем предполагать, что (U, d) — польское пространство. Согласно лемме 1 условие (1) влечет $\mu_n \xrightarrow{\vartheta} \mu$. Таким образом, для любых $m=1, 2, \ldots$ и $\varepsilon>0$, существуют компакт $K_\varepsilon\subset\bar{S}_m$ и число $M>0$ такие, что

$$\mu(\bar{S}_m\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon,\quad \mu(\bar{S}_m)<M, \tag{4}$$

$$\sup_n \mu_n(\bar{S}_m\setminus K_\varepsilon)<\varepsilon,\quad \sup_n \mu_n(\bar{S}_m)<M, \tag{5}$$

(см. Т.4.1.3., [4]). Так как множество всех функций $\{f(x),\ x\in K_\varepsilon,\ f\in\mathfrak{FL}_m\}$ — компактно относительно равномерной нормы $\|f\|=\sup\{|f(x)|:\ x\in K_\varepsilon\}$, то существуют функции $f_1,\ldots,f_u$ из $\mathfrak{FL}$ такие, что

$$\sup_{f\in\mathfrak{FL}}\ \inf_{1\le l\le u}\|f-f_l\|<\varepsilon. \tag{6}$$

Пусть N_m такое число, что $\sup_{1\le l\le u}|\mu_n f_l-\mu f_l|<\varepsilon$ для всех $n\ge N_m$. Следовательно для любого $n\ge N_m$

$$\sup_{f\in\mathfrak{FL}_m}|\mu_n f-\mu f|\le \sup_{f\in\mathfrak{FL}}\ \inf_{1\le l\le u}\left|\int (f-f_l)d(\mu_n-\mu)\right|+\varepsilon. \tag{7}$$

Так как $|f(x)|\le 2m$, для всех $f\in\mathfrak{FL}$, то из (4—6) получаем следующую оценку

$$\sup_{f\in\mathfrak{FL}_m}\ \inf_{1\le l\le u}\left|\int (f-f_l)d(\mu_n-\mu)\right|\le \sup_{f\in\mathfrak{FL}_m}\ \inf_{1\le l\le u}\Big\{\int_{K_\varepsilon}|f-f_l|d(\mu_n-\mu) \tag{8}$$

$$+\int_{\bar{S}_m\setminus K_\varepsilon}(|f|+|f_l|)d(\mu_n-\mu)\le\varepsilon\,.\,2M+4m\,.\,2\varepsilon.$$

Согласно (7) и (8) $\lim_{n\to\infty}K_m(\mu_n, \mu)=0$ для всех $m=1, 2, \ldots$. Следовательно, $K(\mu_n, \mu)\to 0$ при $n\to\infty$, что и требовалось доказать.

Теорема 1 дает возможность изучить равномерные классы относительно грубой сходимости. Класс $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{F}_C$ назовем ϑ-равномерным классом, если сходимость $\mu_n\xrightarrow{v}\mu$ влечет

$$\lim_n \sup_{f\in\mathfrak{F}_m}|\mu_n f-\mu f|=0,\ \text{для всех}\ m=1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где $\mathfrak{F}_m\,\|\,\{f\in\mathfrak{F}$ и $f(x)=0,\ x\bar{\in}S_m\}$. Напомним, что семейство $\mathfrak{A}$ вещественных функций $\mathfrak{f}$ на U называется равностепенно непрерывным, если для каждого $x\in U$ $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{\mathfrak{f}\in\mathfrak{A}}\omega_{\mathfrak{f}}(x:\varepsilon)=0$, где $\omega_f(x:\varepsilon)=\sup\{|f(y)-f(z)|:\ d(y, x)<\varepsilon,\ d(z, x)<\varepsilon\}$.

Следствие 1. Пусть (U, d)— *сепарабельное метрическое пространство. Класс $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{F}_C$ является ϑ-равномерным классом тогда и только тогда, когда для всех $m=1, 2, \ldots$ класс $\mathfrak{F}_m$ — равномерно ограничен и равностепенно непрерывен.*

Доказательство: Пусть $\mu_n\xrightarrow{\vartheta}\mu$. Положим

$$\rho_m(x, y)=\sup_{f\in\mathfrak{F}_m}|f(x)-f(y)|;\quad x, y\in U,\ m=1, 2, \ldots.$$

Тогда ρ_m является непрерывной псевдо-метрикой на U. Считая $x=y$, если $\rho_m(x, y)=0$, пространство (U, ρ_m) становится сепарабельным метрическим пространством. Тогда $|f(x)-f(y)|/\rho_m(x, y)\leqq 1$, для всех $x\neq y$ и $f\in\mathfrak{F}_m$. Согласно теореме 1 имеем (9).

Пусть $\mathfrak{F}_{m_0}$ не является равностепенно непрерывным классом, т. е. существуют число $\delta>0$ и точка $x_0\in U$ для которых

$$\inf_{\varepsilon>0}\ \sup_{f\in\mathfrak{F}_{m_0}} \omega_f(x_0: \varepsilon)>0.$$

Следовательно, существуют последовательность $x_1, x_2, \ldots$, сходящаяся к x_0, и последовательность $\{f_n\}\subset\mathfrak{F}_{m_0}$ такие, что $|f_n(x_n)-f_n(x_0)|>\delta/2$, $n=1, 2, \ldots$. Пусть $\mu=\delta_{x_0}$ и $\mu_n=\delta_{x_n}$, $n=1, 2, \ldots$. Тогда $\mu_n\xrightarrow{\vartheta}\mu$, но $\sup_{f\in\mathfrak{F}_{m_0}}|\mu_n f-\mu f|\geqq\sup_n|\mu_n f_n-\mu f_n|$ $=|f_n(x_n)-f_n(x_0)|>\delta/2$ $n=1, 2, \ldots$. Поэтому $\mathfrak{F}$ не является ϑ-равномерным классом. Аналогичным образом проверяется, что условие равномерной ограниченности необходимо для ϑ-равномерности класса $\mathfrak{F}$.

3. В этом разделе введем вторую метрику Π, метризующую грубую сходимость Для всех $m=1, 2, \ldots$ определим

$$\Pi_m(\mu', \mu'')=\inf\{\varepsilon>0: \mu'(B)\leqq\mu''(B^\varepsilon)+\varepsilon,$$

$$\mu''(B)\leqq\mu'(B^\varepsilon)+\varepsilon, \text{ для всех } B\in\mathfrak{L}_0,\ B\subset\bar{S}_m\},\ \mu', \mu''\in\mathfrak{M},$$

$$\Pi(\mu', \mu'')=\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\frac{\Pi_m(\mu', \mu'')}{1+\Pi_m(\mu', \mu'')}.$$

Метрика Π не изменяется, если заменим $\mathfrak{L}_0$ на множество всех замкнутых ограниченных подмножеств U и также если заменим $B^\varepsilon=\{x: d(x, B)<\varepsilon\}$ на его замыкание $B^{\varepsilon]}$. В подпространстве $\mathfrak{M}_0$ метрика Π метрически эквивалентна метрике Леви — Прохорова.

Лемма 2. *Если $K_{m+1}(\mu', \mu'')<\varepsilon$, то*

$$\Pi_m^2(\mu', \mu'')\leqq K_{m+1}(\mu', \mu''). \tag{10}$$

Доказательство: Пусть $B\in\mathfrak{L}_0$, $B\subset S_m$, $\varepsilon\in(0,1)$ и $f_{\varepsilon,B}(x)=\max(0, 1-d(x, B)/\varepsilon)$. Тогда $\|f_{\varepsilon,B}\|\leqq 1/\varepsilon$ и $\varepsilon f\in\mathfrak{F}\mathfrak{L}_m$. Следовательно,

$$\mu'(B)\leqq\mu' f\leqq\mu'' f+\varepsilon^{-1}K(\mu', \mu'')\leqq\mu''(B^\varepsilon)+\varepsilon^{-1}K(\mu', \mu'').$$

Следовательно, если $K_{m+1}(\mu', \mu'')<\varepsilon^2<1$, то в силу симметрии $\Pi_m^2(\mu', \mu'')\leqq\varepsilon$. Тем самым $\Pi_m^2\leqq K_{m+1}$.

Неравенство (10), без дополнительных ограничений μ' и μ'' не улучшаемо. Так как для любых $m, n=1, 2, \ldots$ и $\lambda>0$

$$K_m(\lambda\mu', \lambda\mu'')=\lambda K_m(\mu', \mu''),$$

$$\Pi_n(\lambda\mu', \lambda\mu'')\leqq\max(1, \lambda^{-1})\Pi_n(\mu', \mu''),$$

то оценить K_m сверху через Π_n нельзя. Тем не менее метрика Π метризует грубую сходимость.

Теорема 2. *Пусть (U, d) — сепарабельное метрическое пространство. Тогда Π метризует грубую сходимость в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство: Согласно теореме 1 и лемме 2 грубая сходимость $\mu_n\xrightarrow{\vartheta}\mu$ влечет $\Pi(\mu_n, \mu)\to 0$. Пусть, наоборот, $\Pi(\mu_n, \mu)\to 0$. Аналогично лемме 1, неравенство $\Pi_m(\mu', \mu'')<\varepsilon$ влечет $|\mu'(B)-\mu''(B)|\leqq\varepsilon+\min(\mu'(Fr^\varepsilon B), \mu''(Fr^\varepsilon B))$, для всех

$B \in \mathfrak{L}_0$ и $B \subset \bar{S}_m$. Тем самым для любых $B \in \mathfrak{L}_0$ с $\mu(FrB)=0$ имеется $\mu_n(B) \to \mu(B)$ при $n \to \infty$ и, следовательно $\mu_n \xrightarrow{\vartheta} \mu$.

Теорема 3. *Если (U, d) — польское пространство, то $(\mathfrak{M}, \Pi)$ — польское пространство.*

Доказательство: Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots$ — последовательность Коши в метрике Π и тем самым в метрике Π_m, для любого $m=1, 2, \ldots$. Пусть B — произвольное замкнутое множество из $\mathfrak{L}_0$, $B \subset \bar{S}_m$ и $\lambda \in (0, 1)$. Выберем число $n_0 = n_0(\lambda)$, для которого

$$\Pi_{m+2}(\mu_{n_0}, \mu_n) < \lambda \text{ при всех } n \geq n_0. \tag{11}$$

Определим компакт $K \subset B^{\lambda]}$ со свойством $\mu_{n_0}(K) > \mu_{n_0}(B^{\lambda]}) - \lambda$. Для компакта K имеем покрытие C_λ, являющееся объединением конечного числа замкнутых шаров радиуса λ. Если $C_{2\lambda}$ — объединение концентрических им шаров радиуса 2λ, то $(C_\lambda)^\lambda \subset C_{2\lambda}$ и согласно (11) и определению Π_m имеем

$$\mu_n(B) \leq \mu_{n_0}(B^{\lambda]}) + \lambda \leq \mu_{n_0}(K) + 2\lambda \leq \mu_{n_0}(C_\lambda) + 2\lambda \leq \mu_n(C_{2\lambda}) + 3\lambda \tag{12}$$

при $n \geq n_0$. Условие $n \geq n_0(\lambda)$ может быть отброшено вследствие сепарабельности U за счет добавления конечного числа замкнутых шаров радиуса 2λ. Полагая $\lambda_k = \varepsilon 2^{-k}$ видим, что $K_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_n} \subset B$ удовлетворяет неравенству $\sup_n \mu_n(B \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и компактно. Согласно (12), $\sup_n \mu_n(B) < \infty$. Следовательно, последовательность $\mu_1, \mu_2, \ldots$ относительно компактна в грубой топологии (см. Т.4.1.3., [4]). Таким образом $\mu_1, \mu_2, \ldots$ грубо сходится к некоторой мере из $\mathfrak{M}$. Согласно теореме 2, $\Pi(\mu_n, \mu) \to 0$. Так как $\mathfrak{M}$ сепарабельно относительно грубой сходимости (см. Т.1.9.1., [4]), то $\mathfrak{M}$ — сепарабельно в метрике Π.

Следствие: *Если (U, d) — польское пространство, то $(\mathfrak{M}, K)$ — польское пространство.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М., 1967.
2. H. Bauer. Probability theory and elements of measure theory. New York, 1972.
3. O. Kallenberg. Random measures, Berlin, 1975.
4. Й. Керстан, К. Маттес, Й. Мекке. Безгранично делимые точечные процессы. М., 1982.
5. R. M. Dudley. Probability and metrics. Aarhus Univ., Lect. Notes Ser., 45, 1976.
6. В. М. Золотарев. Вероятностные метрики. *Теория вероятн. и ее примен.*, 28, 264—287.
7. Л. В. Канторович. О перемещении масс. *Докл. АН СССР*, 37, 1942, № 7—8, 227—229.
8. Ю. В. Прохоров. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей. *Теория вероятн. и ее примен.*, 1956, 1, 177—238.

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. Я. 373*

Поступила 2. 04. 1984