Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ПРОДОЛЖЕНИИ, С СОХРАНЕНИЕМ РОСТА, ГОЛОМОРФНЫХ НА НУЛЕВОМ МНОЖЕСТВЕ ПОЛИНОМА ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ЗАДАННУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

МАРИЯ МИТРЕВА

Строится продолжение голоморфной функции многих комплексных переменных, заданной, вместе со своей производной, на множестве нулей полинома и удовлетворяющей там некоторому условию роста, до целой функции, сохраняющей рост. Построение основано на результатах Хермандера о существовании решения проблемы Неймана.

Пусть $P(z)$ — полином в C^n, $\Lambda_P=\{z\in C^n,\ P(z)=0\}$ — его нулевое множество. Функцию $\varphi:\Lambda_P\to C$ называют голоморфной на множестве Λ_P, если для любого $z^0\in C^n$ существует окрестность $V_{z^0}\subset C^n$ и такая голоморфная в ней функция f_{z^0}, что для любой точки $z\in\Lambda_P\cap V_{z^0}$ выполнено $f_{z^0}(z)=\varphi(z)$. Множество всех голоморфных на Λ_P функций обозначаем через $H(\Lambda_P)$, а множество всех целых в C^n функций через $H(C^n)$. Если $\varphi\in H(\Lambda_P)$, $\mathscr{F}\in H(C^n)$, то

$$M_\varphi(r;\ \Lambda_P)=\max_{\substack{z\in\Lambda_P\\ |z|=r}}|\varphi(z)|,\quad M_{\mathscr{F}}(r)=\max_{|z|=r}|\mathscr{F}(z)|.$$

Непрерывно дифференцируемую функцию $\rho(r)$, $\rho>0$ называют уточненным порядком, если существует неотрицательное число ρ, что $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$, $\lim\limits_{r\to\infty}r\rho'(r)\ln r=0$. Типом функции $\varphi\in H(\Lambda_P)$ или $\mathscr{F}\in H(C^n)$, при уточненном порядке $\rho(r)$ называют соответственно

$$\sigma_\varphi(\rho(r);\ \Lambda_P)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M_\varphi(r;\ \Delta_P)}{r^{\rho(r)}},$$

$$\sigma_{\mathscr{F}}(\rho(r))=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M_{\mathscr{F}}(r)}{r^{\rho(r)}}.$$

В работах Л. И. Ронкина [6, 7] доказана следующая теорема о продолжении с оценками:

Теорема. *Если $f\in H(\Lambda_P)$ и имеет конечный тип $\sigma_f(\rho(r);\ \Lambda_P)$ при уточненном порядке $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$, $\rho>0$, то существует целая функция $\mathscr{F}$, для которой*

1) $\mathscr{F}(z)=f(z)$, $z\in\Lambda_P$, 2) $\sigma_{\mathscr{F}}(\rho(r))=\sigma_f(\rho(r);\ \Lambda_P)$.

Настоящая работа обобщает этот результат в случае, когда заданная голоморфная функция обладает еще производной по одной из переменных. Возникающая таким образом задача является естественным аналогом одномерной задачи Эрмита об интерполяции функции полиномами с кратными узлами интерполяции. Доказано, что если такая функция имеет данный рост, то ее продолжение будет

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 12, 1986, с. 159—165.

обладать таким же ростом. Проведенные рассуждения проходят для произвольной, размерности пространства. Случай, когда размерность пространства n равна двум был рассмотрен в [10].

Для доказательства основных теорем приведем сначала три леммы. Пусть $P(z, w)$ полином в $\mathbb{C}^{n+1}$, $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}$, $\Lambda_P \subset \mathbb{C}^{n+1}$ его нулевое множество. Если $\varphi \in H(\Lambda_P)$ обозначаем

$$M_\varphi(r, R;\ \Lambda_P) = \max_{\substack{(z, w) \in \Lambda_P \\ |z| \leq r \\ |w| \leq R}} |\varphi(z, w)|.$$

Если $G = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1},\ |z| < r_0,\ |w| > R_0\}$ и $\mathscr{F} \in H(G)$

$$M_{\mathscr{F}}(r, R) = \sup_{\substack{(z, w) \in G \\ |z| \leq r \\ |w| = R}} |\mathscr{F}(z, w)|.$$

Лемма 1. *Пусть полином $P(z, w)$ имеет вид $P(z, w) = \Sigma_{k=0}^m a_k(z) w^{m-k}$, где $a_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots, m$ — полиномы. Тогда, для любого $\varepsilon_1 > 0$ существуют, зависящие от ε_1 числа $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ и $R_0 > 0$ такие, что в области $G = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1}, |z| < \varepsilon_2, |w| > R_0\}$ для любых двух функций $\varphi_0, \varphi_1 \in H(\Lambda_P)$, для которых существует целая функция f, равная φ_0 на множестве Λ_P и имеющая производную $\partial f / \partial z_1$, равную φ_1 на Λ_P, существует такая голоморфная в G функция $\Phi(z, w)$, что*

1) $\Phi(z, w) = \varphi_0(z, w)$, $(z, w) \in \Lambda_P$, 2) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z_1}(z, w) = \varphi_1(z, w)$, $(z, w) \in \Lambda_P$ *и*

3) $M_\Phi(\varepsilon_2, R) \leq C(1 + R^2)^N M_{\varphi_0}(\varepsilon_1, R;\ \Lambda_P) M_{\varphi_1}(\varepsilon_1, R;\ \Lambda_P)$, $\forall R > R_0$.

Константы C и N зависят только от ε_1 и от полинома P.

Доказательство. Случай $a_0(z) \neq 0$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$ тривиален. Пусть существует $z^0 \in \mathbb{C}^n$, в которой $a_0(z^0) = 0$. Не нарушая общности, можем считать $z^0 = 0$ и $a_0(z_1, 0, \ldots, 0) \neq 0$. Тогда, существует $0 < \delta < \frac{1}{2}$, такое, что $a_0(z_1, 0, \ldots, 0) \neq 0$ при $0 < |z_1| < \delta$ и существует $\varepsilon \in (0, \delta)$, что $a_0(z_1, 'z) \neq 0$ при $|'z| < \varepsilon$, $\delta - \varepsilon < |z_1| < \delta + \varepsilon$. Обозначим

$$\nu_k = \max_{\substack{\delta - \varepsilon < |z_1| < \delta + \varepsilon \\ |'z| < \varepsilon}} |a_k(z)|, \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$\mu = \min_{\substack{\delta - \varepsilon < |z_1| < \delta + \varepsilon \\ |'z| < \varepsilon}} |a_0(z)|, \quad R_0 = \mu^{-1} \sum_{k=1}^m \nu_k.$$

Из свойств полинома P следует, что при $\delta - \varepsilon < |z_1| < \delta + \varepsilon$, $|'z| < \varepsilon\ |w| > R'_0$ не имеются точки множества Λ_P, значит там $|P(z, w)| > 0$. И, если рассмотрим $P(z, w)$ как функцию переменного z_1, при фиксированных остальных переменных, то, согласно теореме Руше, она будет иметь одно и то же число корней в круге $|z_1| < \delta + \varepsilon$ при любых фиксированных $|'z| < \varepsilon$, $|w| > R'_0$. Обозначим их $z_1^{(1)}('z, w), \ldots, z_1^{(m')}('z, w)$, $m' \leq m$.

Построим по ним полином

$$P^*(z_1, 'z, w) = (z_1 - z_1^{(1)}('z, w)) \ldots (z_1 - z_1^{(m')}('z, w)) = z_1^{m'} + \sum_{k=1}^{m'} a_k^*('z, w) z_1^{m'-k}.$$

По теореме об алгебраических функциях, коэффициенты $a_k^*('z, w)$ будут голоморфными функциями в области $G^* = \{('z, w) \in \mathbb{C}^n,\ |'z| < \varepsilon,\ |w| > R'_0\}$, а значит, таким будет и дискриминант этого полинома $\mathscr{D}_{P^*}('z, w)$. Не нарушая общности результата можем считать, что P не имеет кратных делителей. В этом случае $\mathcal{D}_{P^*}('z, w)\neq 0$. Пусть $E=\{('z, w)\in \mathbf{C}^k,\ |'z|<\varepsilon,\ |w|>R_0',\ \mathcal{D}_{P^*}('z, w)=0\}$. Положим $\Omega(z, w)=(P^*(z, w))^2$ и по целой функции f построим

$$\Phi(z, w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|<\delta+\frac{\varepsilon}{2}} f(\zeta, 'z, w)\frac{\Omega(\zeta, 'z, w)-\Omega(z_1, z, w)}{(\zeta-z_1)\Omega(\zeta, 'z, w)}d\zeta. \tag{1}$$

При $('z, w)\notin E$ функция $\Phi(z, w)$ является относительно переменной z_1, интерполяционным полиномом Эрмита функции f с узлами интерполяции в точках $z_1^{(j)}('z, w)$, $j=1, \ldots, m'$, и значит $\Phi=\varphi_0$, $\partial\Phi/\partial z_1=\varphi_1$, когда $(z, w)\in\Lambda_P\cap(\{z_1, |z_1|<\delta+\varepsilon\}\times(G^*\setminus E))$. Кроме того, при $('z, w)\in G^*$, $|z_1|<\delta+\frac{\varepsilon}{2}$ имеем $\Omega(z, w)\neq 0$ и $\Phi(z, w)$ голоморфна для всех $z_1\in\mathbf{C}$, $('z, w)\in G^*$, а по теореме единственности равенства $\Phi(z, w)=\varphi_0(z, w)$, $(\partial\Phi/\partial z_1)(z, w)=\varphi_1(z, w)$ выполняются всюду во множестве $\Lambda_P\cap(\{z_1\in\mathbf{C}, |z_1|<\delta+\varepsilon\}\times G^*)$. Наконец, Φ удовлетворяет оценке 2). Действительно, когда $|z_1|=\delta$, $|'z|=\varepsilon/2$ функция $\ln|\Phi(z, w)|$ плюрисубгармоническа по переменному z, поэтому имеет место неравенство

$$\ln|\Phi(z, w)|\leq\frac{2^{2n-2}}{\pi\varepsilon^{2n}\omega_{n-1}}\int\limits_{\substack{|z_1-\lambda_1|<\varepsilon\\ |'z-'\lambda|<\frac{\varepsilon}{2}}}\ln^+|\Phi(\lambda, w)|\,dv(\lambda),$$

где ω_{n-1} — объем единичного шара в $\mathbf{C}^{n-1}$, $dv(\lambda)$ — элемент объема в $\mathbf{C}^n$.

С другой стороны, так как $\Phi(z, w)$ есть интерполяционный полином Эрмита, при $('z, w)\notin E$ для нее имеем и представление

$$\Phi(z, w)=\sum_{j=1}^{m'}\sum_{k=0}^{1}\sum_{s=0}^{k}\frac{\varphi_k(z_1^{(j)}, 'z, w)}{k!\,s!}\left[\frac{(z_1-z_1^{(j)})^2}{\Omega(z, w)}\right]^{(k)}_{z_1=z_1^{(j)}}\frac{\Omega(z, w)}{(z_1-z_1^{(j)})^{2-k-s}}. \tag{2}$$

Множество E имеет в $\mathbf{C}^n$ лебеговую меру ноль. Следовательно,

$$\int\limits_{\substack{|z_1-\lambda_1|<\varepsilon\\ |'z-\lambda|>\varepsilon/2}}\ln^+|\Phi(z, w)|\,dv(\lambda)\leq\frac{\pi\omega_{n-1}\varepsilon^{2n}}{4^{n-1}}\{3\ln 3m'+\ln 2 \tag{3}$$

$$+\ln^+M_{\varphi_0}(\delta, |w|;\ \Lambda_P)+\ln^+M_{\varphi_1}(\delta, |w|;\ \Lambda_P)+4\sum_{j=1}^{m'}\ln^+\prod_{k\neq j}\left|\frac{z_1-z_1^{(k)}}{z_1^{(j)}-z_1^{(k)}}\right|$$

$$+\sum_{j=1}^{m'}\ln^+|z_1-z_1^{(j)}|+\sum_{j=1}^{m'}\ln^+\Big(1+2\sum_{k\neq j}\frac{z_1^{(j)}-z_1}{z_1^{(j)}-z_1^{(k)}}\Big)\}.$$

Последние три члена суммы выражаем через дискриминанту $\mathcal{D}_P('z, w)$ полинома $P(z, w)$ и оцениваем $\ln|\mathcal{D}_P('z, w)|$ при помощи неравенства Й е н с е н а (см. [7]). Тогда

$$\max_{\substack{|z_1|=\delta\\ |'z|=\frac{\varepsilon}{2}}}\ln|\Phi(z, w)|\leq C+\ln^+M_{\varphi_0}+\ln^+M_{\varphi_1}+N\ln(1+|w|^2), \tag{4}$$

с некоторыми константами C и N, независящими от φ_0, φ_1 и f. Однако $\ln M_\Phi(\varepsilon/2, R)\leq\max\limits_{\substack{|z_1|<\delta,\ |'z|<\varepsilon/2\\ |w|=R}}\ln|\Phi(z, w)|$. И если положим в (4) $\varepsilon_1=\delta$, $\varepsilon_2=\varepsilon/2$ получим

$$\ln M_\Phi(\varepsilon_2, R)\leq\ln^+M_{\varphi_0}+\ln^+M_{\varphi_1}+N\ln(1+R^2)+C, \tag{5}$$

что эквивалентно условию 3). Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $\pi: \mathsf{C}^n \to \mathsf{P}^{n-1}$ *есть отображение проективизации в пространстве* C^n, $P(z)$ — *полином в* C^n, *то для любой точки* $\varkappa_0 \in \mathsf{P}^{n-1}$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют окрестность* $\varkappa_0 - \omega_0 \subset \mathsf{P}^{n-1}$ *и число* $R > 0$, *такие, что в области* $G_0 = \{z, z \in \pi^{-1}\omega_0, |z| > R\}$ *для любых двух функций* $\varphi_0, \varphi_1 \in H(\Lambda_P)$, *для которых существует целая функция* f, *совпадающая с* φ_0 *на множестве* Λ_P *и имеющая частную производную по* z_1, *равную* φ_1 *на множестве* Λ_P, *можно найти голоморфную в* G_0 *функцию* $\mathscr{F}$, *такую, что*

$$\varphi_0(z) = \mathscr{F}(z), \quad z \in \Lambda_P \cap G_0,$$

$$\varphi_1(z) = (\partial \mathscr{F} / \partial z_1)(z), \quad z \in \Lambda_P \cap G_0,$$

$$\max_{\substack{z \in G_0 \\ |z| < R}} |\mathscr{F}(z)| \leq C(1+R^2)^N M_{\varphi_0}((1+\varepsilon)R) M_{\varphi_1}((1+\varepsilon)R), \quad \forall R > R_0, \tag{6}$$

с константами C *и* N, *не зависящими от функций* φ_0, φ_1, f.

Лемма 3. *Если* ω — *область в* P^{n-1}, *а* $\varphi(z)$ *такая голоморфная в области* $\mathscr{D} = \{z, z \in \pi^{-1}\omega, |z| > R_0 > 0\}$ *функция, что* $\varphi(z) = \varphi_1(z) P(z)$, *где* $P(z)$ — *полином*, $\varphi_1 \in H(\mathscr{D})$; *если* $\omega_1 \subset\subset \omega$ *тоже область в* P^{n-1}, *а* $\mathscr{D}_1 = \{z, z \in \pi^{-1}\omega_1, |z| > 2R_0\}$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует, не зависящая от* φ *константа* C_ε, *такая, что*

$$\max_{\substack{z \in \mathscr{D}_1 \\ |z| < R}} |\varphi_1(z)| \leq C_\varepsilon \max_{\substack{z \in \mathscr{D} \\ |z| < (1+\varepsilon)R}} |\varphi(z)|. \tag{7}$$

О доказательствах лемм 1 и 2 см. [7].

Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $P(z)$ — *полином в* C^n *степени* m, Λ_P *его нулевое множество. Пусть* $\varphi_0, \varphi_1 \in H(\Lambda_P)$, *такие, что существует целая функция* f, *для которой* $\varphi_0 = f|_{\Lambda_P}$, $\varphi_1 = \left.\frac{\partial f}{\partial z_1}\right|_{\Lambda_P}$, *а* $\alpha(t)$ — *монотонно растущая, выпуклая функция относительно* $\ln t$ *на интервале* $[0, +\infty]$, *удовлетворяющая неравенствам*

$$\ln M_{\varphi_0}(r;\ \Lambda_P) \leq \alpha(r), \quad r \geq 0,$$

$$\ln M_{\varphi_1}(r;\ \Lambda_P) \leq \alpha(r), \quad r \geq 0.$$

Тогда, для любого $\varepsilon > 0$ *существует целая функция* $\mathscr{F}_\varepsilon$, *такая, что* $\varphi_0 = \mathscr{F}_\varepsilon|_{\Lambda_P}$, $\varphi_1 = \partial \mathscr{F}_\varepsilon / \partial z_1|_{\Lambda_P}$,

$$\ln M_{\mathscr{F}_\varepsilon}(r) \leq C_\varepsilon + N_\varepsilon \ln(1+r^2) + 2\alpha((1+\varepsilon)r), \quad r > 0, \tag{8}$$

где C_ε *и* N_ε *зависят только от* ε *и* $P(z)$.

Доказательство. Ввиду компактности пространства P^{n-1}, выберем его конечное покрытие окрестностями $\omega_\varkappa$, найденными в лемме 2, с соответствующими функциями $\mathscr{F}_\varkappa$ и числами $R_\varkappa$. Пусть это будут окрестности $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\mu$ и числа $R_1, R_2, \ldots, R_\mu$. Рассмотрим в пространстве P^{n-1} разбиение единицы (η_k, j_k), $k = 1, \ldots, \mu'$, подчиненное покрытию $\{\omega_s, s = 1, \ldots, \mu\}$. Перейдем в пространство C^n и дополним полученную систему областей

$$G_s = \{z, z \in \pi^{-1}\omega_s, |z| > R_s\}, \quad s = 1, \ldots, \mu$$

областью $G_0 = \{z, |z| < 2R_0\}$, где $R_0 = \max(R_1, \ldots, R_\mu)$, а систему функций $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_\mu$ — функцией $\mathscr{F}_0$, равной f на множестве G_0.

Возьмем произвольную бесконечно дифференцируемую функцию в C^n — $\eta_0(z)$, для которой $\eta_0(z) = 1$, $|z| \leq R_0$, $\eta_0(z) = 0$, $|z| > 2R_0$ и с ее помощью построим функции

$$\psi_k(z)=\frac{(1-\eta_0(z))\,\eta_k(z)}{\eta_0(z)+\sum\limits_{\nu=1}^{\mu'}(1-\eta_0(z))\,\eta_\nu(z)},\quad k=1,\ldots,\mu',$$

$$\psi_0(z)=\frac{\eta_0(z)}{\eta_0(z)+\sum\limits_{\nu=1}^{\mu'}(1-\eta_0(z))\,\eta_\nu(z)}$$

и функции

$$\mathcal{F}_{ij}=(\mathcal{F}_i-\mathcal{F}_j)/P^2,$$

$$\alpha_{i,\nu}=\begin{cases}\mathcal{F}_{ij\nu}\psi_\nu, & z\in G_i\cap G_{j\nu}\\ 0\quad, & z\in G_i\setminus G_{j\nu},\end{cases}\quad b_i=\sum_{\nu=1}^{\mu'}\alpha_{i,\nu},\quad i=1,\ldots,\mu.$$

Функции $\mathcal{F}_{i,j}$ удовлетворяют соотношениям соседства первой проблемы Кузена. Поэтому $\mathcal{F}_{ij}=b_i-b_j$, $\bar\partial b_i=\bar\partial b_j$, $z\in G_i\cap G_j$ и $b_i\in C^\infty(G_i)$. Следовательно, внешняя дифференциальная форма u, $u=\bar\partial b_i$, $z\in G_i$, $i=1,\ldots,\mu$ определена корректно. Из ее построения видно, что она принадлежит пространству $C^\infty_{(0,1)}$ ($\mathbf{C}^n$) и что $\bar\partial u=0$.

Кроме того, согласно леммам 1, 2 и 3, существуют константы C_ε и N_ε, такие, что для $i,j=1,\ldots,\mu$

$$|\mathcal{F}_{ij}|\leq C_\varepsilon(1+|z|^2)^{N_\varepsilon}e^{2\alpha((1+\varepsilon)|z|)}. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию $\varphi_\varepsilon(z)=4\alpha((1+\varepsilon)|z|)+(2N_\varepsilon+n/2+2)\ln(1+|z|^2)$. Она плюрисубгармонична в $\mathbf{C}^n$, так как $\alpha(t)$ возрастает и выпукла относительно $\ln r$. Ссылаясь снова на лемму 3, для формы u получаем

$$\int_{\mathbf{C}^n}|u|^2e^{-\varphi_\varepsilon}dv\leq\sum_{i=1}^{\mu}\int_{G_i}|\bar\partial b_i|^2e^{-\varphi_\varepsilon}dv \tag{10}$$

$$\leq\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{\nu=1}^{\mu'}\int_{G_i\cap G_{j\nu}}|\mathcal{F}_{ij\nu}|^2\,|\bar\partial\psi\nu|^2e^{-\varphi_\varepsilon}dv$$

$$\leq\mu\mu'\,\mathrm{const}\int_{\mathbf{C}^n}(1+|z|^2)^{2N_\varepsilon}e^{4\alpha((1+\varepsilon)|z|)}\,e^{-\varphi_\varepsilon}dv\leq\mathrm{const}\int_{\mathbf{C}^n}\frac{dv}{(1+|z|^2)^{n/2+1}}<\infty.$$

Это означает, что $u\in h^2_{(0,1)}$, (φ_ε, $\mathbf{C}^n$) и согласно теореме существования Л. Хермандера ([2], теорема 4. 4. 2.) уравнение $\bar\partial U=u$ имеет решение $U\subset L^2(\varphi,\mathbf{C}^n)$ с некоторой другой функцией веса φ, которая в данном случае может быть взята равной $\varphi_\varepsilon(z)+\ln(1+|z|^2)$.

Обозначим $g_i=U-b_i$ на множествах G_i, $i=1,\ldots,\mu$ и положим $\mathcal{F}(z)=\mathcal{F}_i(z)-g_i(z)P^2(z)$, $z\in G_i$. Из построения b_i и U ясно, что $g_i\in H(G_i)$, а поскольку на пересечениях $G_i\cap G_j$ выполнены соотношения соседства, дефиниция функции $\mathcal{F}$ корректно. Она является целой и при $z\in\Lambda_P$, $\varphi(z)=\mathcal{F}(z)$, $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z_1}(z)=\frac{\partial\mathcal{F}_i}{\partial z_i}(z)-(\frac{\partial g_i}{\partial z_1}P^2)(z)-(2g_iP\frac{\partial P}{\partial z_1})(z)=\varphi_1(z)$. Покажем, что $\ln M_{\mathcal{F}}$ удовлетворяет неравенству (8). Действительно, для плюрисубгармонической функции $\psi(z)=\varphi_\varepsilon(z)+(2m+2)\ln(1+|z|^2)$, где $m=\deg P$, выполнено

$$\int_{\mathbf{C}^n}|\mathcal{F}|^2e^{-\psi}dv<\infty. \tag{11}$$

Тогда

$$M=\int_{C^n}|\mathscr{F}|^2e^{-\psi}dv\geq\int_{|z-z^0|<1}|\mathscr{F}|^2e^{-\psi}dv\geq\max_{|z|=|z^0|+1}e^{-\psi(z)}\int_{|z-z^0|<1}|\mathscr{F}|^2dv$$

$$\geq|\mathscr{F}(z^0)|^2\omega_n e^{-2\alpha((1+\varepsilon)(1+|z^0|))-2N\ln(1+(1+|z^0|)^2)}$$

и, следовательно, $\ln M_{\mathscr{F}}(R)\leq\mathrm{const}+\alpha((1+\varepsilon)R)+N\ln(1+R^2)$, где $N=N_\varepsilon+n/2+m+3$ не зависит от функций φ_0, φ_1 и f.

Теорема 2. *Пусть P — полином в C^n, Λ_P — его нулевое множество, φ_0, $\varphi_1\in H(\Lambda_P)$ такие, как в теореме 1 и имеют конечный тип σ при уточненном порядке $\rho(r)$. Тогда существует целая функция $\mathscr{F}$ типа σ при уточненном порядке $\rho(r)$, совпадающая с φ_0 на множестве Λ_P и имеющая производную по Z_1, равную r_1 на множестве Λ_P.*

Доказательство. Пусть $\rho(r)$ — заданный уточненный порядок. Рассмотрим уточненный порядок $\widetilde{\rho}(r)$, эквивалентный $\rho(r)$ и такой, что $\lim\limits_{r\to\infty}\widetilde{\rho}(r)r^2\ln r=0$, [9]. Положим $L(r)=\sigma r^{\widetilde{\rho}(r)}$. Непосредственно проверяется, что начиная с некоторого r, $h'(r)>0$ и $(rh'(r))'>0$. Это означает, что она выпукла и монотонно возрастает относительно $\ln r$ при всех достаточно больших r. Изменим $\widetilde{\rho}(r)$ на конечном интервале так, чтобы $h(r)$ удовлетворяла этим свойствам при всех $r>0$. (Это изменение, очевидно, не влечет за собой изменение величины σ, см. [1].)

Пусть ε_1, $\varepsilon_2,\ldots$ — произвольная, монотонно убывающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю. Из свойств функции $h(r)$ следует, что для любого $\delta>0$ существует такое $\delta^*(\delta)>0$, что, начиная с некоторого положительного $\hat{r}$, выполнено неравенство $L((1+\delta^*)r)\leq(\sigma+\delta)r^{\widetilde{\rho}(r)}$. Положим $\delta=\varepsilon_i$ и применим теорему 1, когда $\alpha(t)=h(t)$ и $\varepsilon=\delta^*(\varepsilon_i)$. Существуют константы C_i, N_i, положительные числа r_i и целые функции $\mathscr{F}_i$, $i=1,2,\ldots$, для которых

$$(12)\quad \ln M_{\mathscr{F}_i}(R)\leq C_i+N_i\ln(1+R^2)+(\sigma+\varepsilon_i)R^{\widetilde{\rho}(R)}\leq(\sigma+\varepsilon_{i-1})R^{\widetilde{\rho}(R)},\ \forall R>r_i\ i=1,2,\ldots$$

Пусть последовательность положительных чисел R_0, $R_1,\ldots$. такая, что выполнено (12) и удовлетворяет рекурентным связям $R_0>2$, $R_i>R_{i-1}+2$. Возьмем бесконечно дифференцируемую на вещественной оси функцию $\beta(t)$, $0\leq\beta(t)\leq1$, $\beta(t)=1$, $t<0$, $\beta(t)=0$, $t>2$ и положим $\psi_0(z)=\beta(|z|-R_0+1)$, $\psi_i(z)=(1-\beta(|z|-R_{i-1}+1))\beta(|z|-R+1)$, $i=1,2,\ldots$. Эти функции образуют разбиение единицы, подчиненное покрытию C^n областями

$G_0=\{z,\ |z|<R_0+2\}$, $G_i=\{z,\ R_{i-1}-2<|z|<R_i+2\}$, $i=1,2,\ldots$. Определим дифференциальную форму $u=\bar{\partial}b_i$ на множествах G_i, полагая

$$b_0=\frac{\mathscr{F}_1-\mathscr{F}_0}{P^2}(\psi_0-1),\quad b_i=\frac{\mathscr{F}_i-\mathscr{F}_{i-1}}{P^2}\psi_{i-1}-\frac{\mathscr{F}_{i+1}-\mathscr{F}_i}{P^2}\psi_{i+1},\quad i=1,2,\ldots.$$

Форма u определена корректно, так как $P^{-2}(\mathscr{F}_i-\mathscr{F}_{i-1})$ голоморфны в и $b_i-b_{i-1}=P^{-2}(\mathscr{F}_i-\mathscr{F}_{i-1})$, $i=1,2,\ldots$.

Возьмем плюрисубгармоническую функцию $\varphi(z)=2h(|z|)+2\gamma(|z|)h(|z|)+(\frac{n}{2}+1)\ln(1+|z|^2)$, где $\gamma(r)$ такая монотонно убывающая функция, что $\lim_{r\to\infty}\gamma(r)=0$,

$$(13)\qquad \gamma(r)>\frac{\varepsilon_{i-1}}{\sigma},\quad r\in[R_i,R_{i+1}],$$

и $\gamma(|z|)h(|z|)$ плюрисубгармоническа. (Доказательство существования такой функции γ можно найти в работах [7, 9].) Учитывая (12), (13) и (7), примененные к функциям $P^{-2}(\mathcal{F}_{i+1}-\mathcal{F}_i)$ получаем, что $u\in h^2_{(0,1)}(\varphi, \mathbf{C}^n)$, откуда следует существование решения уравнения $\bar{\partial}U=u$, принадлежащее пространству $h^2(\varphi+2\ln(1+|z|^2, \mathbf{C}^n)$.

Как в теореме 1 на множестве G_i, $i=0, 1, \ldots$ полагаем $g_i=U-b_i$, $\mathcal{F}=\mathcal{F}_i-g_iP^2$. Из свойств b_i следует, что $\mathcal{F}$ определена корректно, целая, на множестве Λ_P совпадает с φ_0 и имеет производную $\partial\mathcal{F}/\partial z_1$, равную φ_1 на множестве Λ_P. Кроме того $\mathcal{F}\in h^2(\varphi+2\ln(1+|z|^2), \mathbf{C}^n)$. Снова оценивая $|\mathcal{F}|$ в шаре с центром фиксированной точки z^0 и радиусом единицей получаем

$$\ln M_{\mathcal{F}}(r)\leq \mathrm{const}+\varphi(r+1)+2\ln(1+r^2).$$

Это означает, что $\sigma_{\mathcal{F}}\leq\sigma(\rho(r))$. Обратное неравенство может быть выполнено всегда. Функция $\mathcal{F}$ имеет тип σ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. М., 1956.
2. Л. Хермандер. Введение в теорию функций нескольких переменных. М., 1968.
3. Л. И. Ронкин. Введение в теорию целых функций многих переменных. М., 1971.
4. Л. И. Ронкин. Элементы теории аналитических функций многих переменных. Киев, 1977.
5. М. Эрве. Функции многих комплексных переменных. М., 1965.
6. Л. И. Ронкин. О продолжении функций конечного порядка, голоморфной на нулевом множестве полинома от двух переменных. — В: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 32. Харьков, 1977.
7. Л. И. Ронкин. О продолжении с оценками функций, голоморфных на нулевом множестве полинома. — В: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 36. Харьков, 1981.
8. A. Martinau. Indicatrices de croissance des fonctions entieres de N variables. *Invent. Math.*, 3, 1967, 16—19.
9. П. З. Агранович. О существовании голоморфной в конусе функции с заданным индикатором при уточненном порядке. — В: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 24. Харьков, 1975.
10. М. И. Митрева. О продолжении функции конечного порядка с заданной производной на нулевом множестве полинома. *Годишник ВПИ Шумен*, 95, 1985.

Высший педагогический институт
Шумен *Болгария*

Поступила 27. 4. 1984
В переработанном виде 8. 10. 1985