Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

О ПРОСТРАНСТВАХ, ЧЬИ НАРОСТЫ В СТОУН-ЧЕХОВСКОМ ЛИБО ФРЕЙДЕНТАЛЕВСКОМ РАСШИРЕНИИ ИМЕЮТ СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВИД

ГЕОРГИ Д. ДИМОВ

В этой работе охарактеризованы некоторые свойства стоун-чеховского и фрейденталевского нароста в терминах самих пространств. Точнее, рассматриваются следующие свойства наростов: дискретность при заданной мощности; существование подмножества заданной мощности, состоящего из изолированных точек; существование всюду плотного подмножества заданной мощности, состоящего из изолированных точек; существование дизъюнктного семейства заданной мощности, состоящего из открытых подмножеств (только для фрейденталевского нароста; характеристика этого свойства для стоун-чеховского нароста была получена В. Комфортом и Х. Гордоном [9]); иметь заданное наперед число Суслина и др. Характеристика этих свойств получена при помощи развития техники „n-звезд" К. Магилля [17] и техники Комфорта и Гордона из [9]. Обобщены теоремы Е. Хьюитта [15] и П. Фирби [11] о конечных стоун-чеховских наростах.

Введение. В ч. 1 этой работы дана внутренняя, т. е. в терминах самого пространства, характеристика тех периферических бикомпактных пространств, нарост которых в их фрейденталевском расширении имеет заданное наперед число Суслина. Аналогичная задача, но для стоун-чеховского нароста, была рассмотрена Комфортом и Гордоном в [9]. Нам будет нужен результат, полученный ими в [9], и поэтому приведем его:

0.1 Теорема (Комфорт, Гордон). Число Суслина стоун-чеховского нароста $\beta X\setminus X$ пространства X не меньше кардинального числа τ тогда и только тогда, когда в X существует семейство $\mathcal{U}=\{U_\alpha : \alpha\in A\}$ открытых в X множеств такое, что:

а) мощность множества A равна τ,

б) U_α является конуль-множеством для любого $\alpha\in A$,

в) U_α содержит небикомпактное нуль-множество для любого $\alpha\in A$,

г) замыкание сечения $U_\alpha\cap U_\beta$ бикомпактно для любых различных $\alpha, \beta\in A$.

В ч. 2 охарактеризованы внутренним образом те периферически бикомпактные пространства X, для которых в наросте $FX\setminus X$ фрейденталевского расширения FX имеется множество заданной наперед мощности τ и состоящее из изолированных в $FX\setminus X$ точек. Кроме того, охарактеризованы те пространства, для которых множество $I(FX\setminus X)$ всех изолированных в $FX\setminus X$ точек имеет наперед заданную мощность (и всюду плотно в $FX\setminus X$). Как следствие, получено одно достаточное условие для того, чтобы пространство $FX\setminus X$ имело наперед заданную плотность.

В ч. 3 приведены некоторые необходимые условия для того, чтобы данное пространство X имело бикомпактное расширение cX с дискретным наростом $cX\setminus X$. Введено понятие R-периферически бикомпактного пространства и показано, что R-периферическая бикомпактность является одним из этих необходимых условий. Указано также место класса периферически бикомпактных пространств при изучении пространств этого типа.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 12, 1986, с. 171—188.

В ч. 4 дана характеристика тех периферических бикомпактных пространств X, для которых пространство $FX\setminus X$ дискретно и имеет заданную наперед мощность τ (другая характеристика этих пространств дана в [4]). Тем самым, в этом классе пространств решена задача К. Морита, поставленная в [16], о характеристике пространств со счетным фрейденталевским наростом.

В ч. 5 (ч. 6) рассматриваются те же задачи, что и в ч. 2 (ч. 4), но уже относительно стоун-чеховского нароста $\beta X\setminus X$ произвольного вполне регулярного пространства X. В [15] Е. Хьюитт охарактеризовал те пространства X, для которых $|\beta X\setminus X|=1$, а в [11] П. Фибри дал внутреннюю характеристику тех пространств X, для которых $|\beta X\setminus X|=n$ (где n — любое натуральное число). Очевидно, что в обоих теоремах пространство $\beta X\setminus X$ дискретно. Следовательно, результаты, полученные в ч. 6 настоящей работы, являются обобщением (на любые кардинальные числа) результатов Е. Хьюитта и П. Фирби, упомянутых выше. Наконец, в ч. 6. получено, как следствие одной теоремы А. К. Штейнер и Е. Ф. Штейнер из [20], одно необходимое и достаточное условие, для того чтобы для данного периферически бикомпактного пространства X, расширения Фрейденталя и Стоуна-Чеха были эквивалентными.

Большинство из результатов этой работы были анонсированы (без доказательств) в [3], а все содержатся в [5].

Все рассматриваемые в этой работе пространства будут предполагаться вполне регулярными и хаусдорфовыми, а все бикомпактные расширения — хаусдорфовыми. Если X — периферически бикомпактное пространство (т. е. в X имеется база, состоящая из открытых множеств с бикомпактными границами), то через FX будем обозначать бикомпактное расширение Фрейденталя пространства X (см. [12, 18, 7]). Если X — пространство, то через $\mathscr{L}(X)$ будем обозначать множество всех точек пространства X, в которых оно локально бикомпактно, а через $R(X)$ — множество $X\setminus\mathscr{L}(X)$. Число Суслина пространства X будем обозначать через $c(X)$, а плотность пространства X — через $d(X)$. Если $A\subset X$, то $\overline{A}^X$ (либо просто $\overline{A}$) будет обозначать замыкание множества A в пространстве X, а $|A|$ — мощность множества A. Всегда через τ будем обозначать кардинальное число, а через $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел. Будем пользоваться также следующими обозначениями: если A — подмножество пространства X, а cX — расширение пространства X (т. е. $\overline{X}^{cX}=cX$), то $Ex_cA=cX\setminus\overline{X\setminus A}^{cX}$ и $A^c=(Ex_cA)\cap(cX\setminus X)$. Если $cX=\beta X$, то вместо $Ex_\beta A$ будем писать просто ExA. Как известно, если A — открытое в X множество, то любое открытое в cX множество B, такое, что $B\cap X=A$, содержится в Ex_cA. Пустое множество будет обозначаться через $\emptyset$, а множество всех изолированных в пространстве X точек — через $I(X)$. Если $\mathscr{H}=\{H_\alpha:\ \alpha\in A\}$ — семейство подмножеств данного множества X, то через $\bigcup\mathscr{H}$ будем обозначать множество $\bigcup\{H_\alpha:\alpha\in A\}$, а если $\mathscr{F}$ — другое семейство подмножеств множества X, то будем писать $\mathscr{F}\succ\mathscr{H}$, если семейство $\mathscr{F}$ вписано в семейство $\mathscr{H}$. О всех остальных неопределенных в этой работе, но использованных в ней обозначений и понятий см. [10].

1. О числе Суслина фрейденталевского нароста

1.1 Пусть X — топологическое пространство. Если U и V — подмножества пространства X, то говорят, что множества U и V квазидизъюнктны, если множество $\overline{U\cap V}$ бикомпактно. Пусть $\mathscr{H}$ — семейство подмножеств пространства X. Говорят, что $\mathscr{H}$ — квазидизъюнктное семейство, если любые два различных элемента семейства $\mathscr{H}$ — квазидизъюнктны. Семейство $\mathscr{H}$ называется π-семейством, если оно состоит из открытых в X множеств с бикомпактными границами.

Определение. *π-семейство $\mathscr{H}=\{H_\alpha:\ \alpha\in A\}$ в пространстве X будем называть о-звездой (звездой), если оно квазидизъюнктно и замыкание любого его элемента H небикомпактно (и, кроме того, $H\subset\mathscr{L}(X)$). Если мощность* $|A$

множества A равна кардинальному числу τ, то о-звезду (звезду) $\mathscr{H}$ будем называть τ-о-звездой (τ-звездой).

Отметим, что получающееся при $\tau=n$, где $n\in\mathbb{N}$, понятие n-звезды является более общим, чем у К. Магилля [17]. n-звезду в смысле Магилля будем называть n-M-звездой.)

1.2 Напомним, что бикомпактное расширение cX пространства X называется совершенным относительно открытого подмножества U пространства X, если имеет место равенство $\overline{Fr_X U}^{cX} = Fr_{c_X}(Ex_c U)$ (см. [7]); cX называется совершенным бикомпактным расширением пространства X [7], если оно совершенно относительно любого открытого подмножества пространства X.

Замечание (см. [4]). Пусть cX — бикомпактное расширение пространства X, а A и B — подмножества пространства X. Тогда имеют место следующие равенства:
а) $Ex_c A)\cap Ex_c B=Ex_c(A\cap B)$,
б) Если $\bar A^X$ — бикомпактное множество, то $A^c=\emptyset$,
в) Если cX совершенно относительно открытого в X множества U с бикомпактной границей и $U^c=\emptyset$, то $\bar U^X$ — бикомпакт,
г) Если $X\setminus A$ — бикомпактное множество, то $A^c=X^c$.

1.3 Предложение. *Пусть $\mathscr{H}$ — τ-о-звезда в пространстве X, а bX — совершенное бикомпактное расширение пространства X. Тогда $c(bX\setminus X)\geqq\tau$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H}=\{H_\alpha\colon \alpha\in A\}$, где $|A|=\tau$. Тогда, согласно 1.2а), $(Ex_b H_\alpha)\cap Ex_b H_\beta=Ex_b(H_\alpha\cap H_\beta)$, для любых $\alpha,\beta\in A$. Но из 1.2б) получаем, что $(H_\alpha\cap H_\beta)^b=\emptyset$. Следовательно, $(Ex_b H_\alpha)\cap Ex_b H_\beta=H_\alpha\cap H_\beta$, т. е. $H_\alpha^b\cap H_\beta^b=\emptyset$. Кроме того, $H_\alpha^b\neq\emptyset$, для любого $\alpha\in A$, так как если $H_\alpha^b=\emptyset$, то из 1.2в) получим, что $\bar H_\alpha^X$ — бикомпакт, что неверно. Следовательно, $\{H_\alpha^b\colon \alpha\in A\}$ — дизъюнктное семейство мощности τ непустых открытых в $bX\setminus X$ множеств, т. е. $c(bX\setminus X)\geqq\tau$.

1.4. Следствие. *Если в пространстве X имеется τ-о-звезда, то $d(cX\setminus X)\geqq\tau$, для любого совершенного бикомпактного расширения cX пространства X.*

1.5 Напомним, что подмножество A пространства X называется нульмерно расположенным в X, если для любой точки x пространства X существует открытая база $\mathscr{B}_x$ точки x в X такая, что если $B\in\mathscr{B}_x$, то $Fr_X B\subset X\setminus A$.

Предложение. *Пусть cX — бикомпактное расширение пространства X, такое, что множество $cX\setminus X$ нульмерно расположено в cX и, кроме того, в пространстве $cX\setminus X$ имеется дизъюнктное семейство мощности τ непустых открытых в $cX\setminus X$ множеств. Тогда в пространстве X имеется τ-о-звезда.*

Доказательство. Пусть $\lambda=\{\Lambda_\alpha\colon \alpha\in A\}$ — дизъюнктное семейство мощности τ непустых открытых подмножеств пространства $cX\setminus X$. Для любого $\alpha\in A$ зафиксируем $x_\alpha\in\Lambda_\alpha$ и Λ'_α — открытое в cX и такое, что $\Lambda'_\alpha\cap(cX\setminus X)=\Lambda_\alpha$. Так как $cX\setminus X$ нульмерно расположено в cX, то для любого $\alpha\in A$ существует открытое в cX множество V_α, такое, что $x_\alpha\in V_\alpha\subset\bar V_\alpha^{cX}\subset\Lambda'_\alpha$ и $Fr_{cX}V_\alpha\subset X$. Положим $H_\alpha=V_\alpha\cap X$, для любого $\alpha\in A$. Покажем, что $\mathscr{H}=\{H_\alpha\colon \alpha\in A\}$ — τ-о-звезда в пространстве X. Действительно, $Fr_X H_\alpha=\bar H_\alpha^X\setminus H_\alpha=\overline{V_\alpha\cap X}^X\setminus(V_\alpha\cap X)=(\overline{V_\alpha\cap X}^{cX}\setminus V_\alpha)\cap X=(\bar V_\alpha^{cX}\setminus V_\alpha)\cap X=(Fr_{cX}V_\alpha)\cap X=Fr_{cX}V_\alpha$, т. е. $Fr_X H_\alpha$ — бикомпакт для любого $\alpha\in A$. Кроме того, $\overline{H_\alpha\cap H_\beta}^X=\overline{(V_\alpha\cap V_\beta)\cap X}^X=\overline{V_\alpha\cap\bar V_\beta^{cX}\cap X}\subset\bar V_\alpha^{cX}\cap\bar V_\beta^{cX}\cap X=\bar V_\alpha^{cX}\cap\bar V_\beta^{cX}$ (последнее равенство выполнено, так как $\bar V_\alpha^{cX}\cap\bar V_\beta^{cX}\subset\Lambda'_\alpha\cap\Lambda'_\beta$, а $\Lambda'_\alpha\cap\Lambda'_\beta\cap(cX\setminus X)=\Lambda_\alpha\cap\Lambda_\beta=\emptyset$ и, следовательно, $\Lambda'_\alpha\cap\Lambda'_\beta\subset X$), т. е. $\overline{H_\alpha\cap H_\beta}^X$ — бикомпакт для любых $\alpha,\beta\in A$, $\alpha\neq\beta$. Наконец, так как $x_\alpha\in\bar V_\alpha^{cX}=\bar H_\alpha^{cX}$, то $\bar H_\alpha^X$ — небикомпактно для любого $\alpha\in A$. Тем самым предложение доказано.

1.6 Теорема. *Пусть X — периферически бикомпактное пространство. $c(FX\setminus X)\geq\tau$ тогда и только тогда, когда в пространстве X имеется τ-о-звезда.*

Доказательство. Так как FX является совершенным бикомпактным расширением пространства X с нульмерно расположенным наростом (см. [7]), то теорема непосредственно следует из предложений 1.3 и 1.5.

1.7. Определение. Пусть X — топологическое пространство. Положим $S_F(X)=\sup\{\tau:$ в X имеется τ-о-звезда$\}$.

1.8. Замечание. Так как для любой τ-о-звезды $\mathfrak{N}$ в пространстве $(X\mathcal{T})$, имеем, что $\tau\leq|\mathcal{T}|\leq 2^{|X|}$, то определение кардинального числа $S_F(X)$, данное в 1.7, корректно.

1.9. Следствие. *Пусть X — периферически бикомпактное пространство. Тогда $c(FX\setminus X)=S_F(X)$.*

1.10. Примеры. Подсчитаем значение кардинального инварианта $S_F(X)$ для некоторых конкретных пространств X.

Пусть R — множество реальных чисел с естественной топологией. Так как любое открытое подмножество пространства R является объединением дизъюнктной системы мощности не больше чем $\aleph_0$ открытых интервалов, то становится очевидным, что $S_F(\mathsf{R})=2$. Следовательно, согласно 1.9, $c(F\mathsf{R}\setminus\mathsf{R})=2$, т. е. $|F\mathsf{R}\setminus\mathsf{R}|=2$.

Пусть Q — множество рациональных чисел в интервале $(0,\ 1)\subset\mathsf{R}$ с естественной топологией. Так как $\mathsf{Q}=R(\mathsf{Q})$, то любое квазидизъюнктное семейство открытых подмножеств пространства Q дизъюнктно. Так как $c(\mathsf{Q})\aleph_0$, то получаем, что $S_F(\mathsf{Q})=\aleph_0$. Следовательно, $c(F\mathsf{Q}\setminus\mathsf{Q})=\aleph_0$, а из $F\mathsf{Q}\equiv\beta\mathsf{Q}$ получаем, что $c(\beta\mathsf{Q}\setminus\mathsf{Q})=\aleph_0$.

Если D_τ — дискретное пространство мощности τ, то из известной теоремы А. Тарского [21] о неравенстве $m\leq n^{\aleph_0}$ между кардинальными числами m и n получаем, что $S_F(D_\tau)=\tau^{\aleph_0}$ и, следовательно, $c(FD_\tau\setminus D_\tau)=\tau^{\aleph_0}$. Так как и в этом случае $FD_\tau=\beta D_\tau$, то мы показали, что $c(\beta D_\tau\setminus D_\tau)=\tau^{\aleph_0}$.

Конечно, все эти результаты о $F\mathsf{R}$, $\beta\mathsf{Q}$ и βD_τ давно и хорошо известны. Они были приведены здесь только чтобы показать, как работает следствие 1.9. В дальнейшем мы также будем иллюстрировать примерами новые теоремы, не делая больше таких оговорок.

2. О множестве изолированных точек фрейденталевского нароста.

2.1. Определение. *Звезду $\mathscr{H}=\{H_\alpha:\ \alpha\in A\}$ в пространстве X будем называть F-звездой, если для любого $\alpha\in A$, из любых двух канонически замкнутых в X подмножеств с бикомпактными границами элемента H_α звезды $\mathscr{H}$, хотя бы одно является бикомпактом. Если $|A|=\tau$, то будем говорить, что $\mathscr{H}$ является F-звездой мощности τ в X.*

2.2. Следующая лемма, которая непосредственно следует из результатов Ю. М. Смирнова [8] и Е. Г. Скляренко [7], будет нужна нам в дальнейшем:

Лемма. *Пусть. X — периферически бикомпактное пространство. Тогда любые два дизъюнктные замкнутые подмножества X с бикомпактными границами имеют непересекающиеся замыкания в пространстве FX.*

2.3 Теорема *Если X — периферически бикомпактное пространство и τ — кардинальное число, то в пространстве $FX\setminus X$ имеется множество J мощности τ, состоящее из изолированных в $FX\setminus X$ точек, тогда и только тогда, когда в X имеется F-звезда мощности τ.*

Доказательство. А) Пусть в пространстве $FX\setminus X$ имеется множество J мощности τ, состоящее из изолированных в $FX\setminus X$ точек. Очевидно, $J\subset\mathscr{L}(FX\setminus X)$. Следовательно, $J\cap\overline{R(X)}^{FX}=\emptyset$. Для любого $x\in J$ зафиксируем открытые в FX множества Ox и Vx такие, что $Ox\cap(FX\setminus X)=\{x\}$, $x\in Vx\subset\overline{V}_x^{FX}\subset Ox\cap(FX$

$\setminus \overline{R(X_F}^X)$ и $Fr_{FX}Vx \subset X$. Положим $H_x = Vx \cap X$. Как и в доказательстве предложения 1.5, можно показать, что семейство $\mathscr{H} = \{H_x:\ x \in J\}$ является τ-о-звездой в пространстве X, а так как $\overline{H}_x^X \subset \mathfrak{L}(X)$ для любого $x \in J$, то $\mathscr{H}$ является τ-звездой в X. Пусть теперь A и B — дизъюнктные замкнутые в X небикомпактные подмножества с бикомпактными границами некоторого элемента H_x звезды $\mathscr{H}$. Тогда из леммы 2.2 получаем, что $\overline{A}^{FX} \cap \overline{B}^{FX} = \emptyset$. Имеем также, что $\overline{A}^{FX} \cup \overline{B}^{FX} \subset \overline{H}_x^{FX} = \overline{V}_x^{FX} = Vx \cup Fr_{FX}Vx \subset X \cup \{x\}$. Но так как $\overline{A}^{FX} \cap (FX \setminus X) \neq \emptyset$ и $\overline{B}^{FX} \cap (FX \setminus X) \neq \emptyset$, то получаем, что $x \in \overline{A}^{FX} \cap \overline{B}^{FX}$. Это противоречие показывает, что $\mathscr{H}$ является F-звездой мощности τ в пространстве X.

Б). Пусть $\mathscr{H} = \{H_\alpha:\ \alpha \in A\}$ — F-звезда мощности τ в X. Можно показать, рассуждая также, как и в доказательстве предложения 1.3, что семейство $\{H_\alpha^F:\ \alpha \in A\}$ является дизъюнктным семейством мощности τ непустых открытых в $FX \setminus X$ множеств. Зафиксируем для любого $\alpha \in A$ по точкам $x_\alpha \in H_\alpha^F$. Покажем, что $H_\alpha^F = \{x_\alpha\}$ для любого $\alpha \in A$. Действительно, допустим, что существует $y_\alpha \in H_\alpha^F$, $y_\alpha \neq x_\alpha$. Тогда существуют открытые в FX множества Ox_α и Oy_α такие, что $x_\alpha \in Ox_\alpha \subset \overline{Ox}_\alpha^{FX} \subset Ex_F H_\alpha$, $y_\alpha \in Oy_\alpha \subset \overline{Oy}_\alpha^{FX} \subset Ex_F H_\alpha$, $Fr_{FX}Ox_\alpha \subset X$, $Fr_{FX}Oy_\alpha \subset X$ и $\overline{Ox}_\alpha^{FX} \cap \overline{Oy}_\alpha^{FX} = \emptyset$. Пусть $F_1 = \overline{Ox_\alpha \cap X}^X$, $F_2 = \overline{Oy_\alpha \cap X}^X$. Очевидно, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $F_1 \cup F_2 \subset H_\alpha$, $x_\alpha \in \overline{F}_1^{FX}$, $y_\alpha \in \overline{F}_2^{FX}$ и F_1, F_2 — канонически замкнутые подмножества пространства X. Кроме того, рассуждая как и в доказательстве предложения 1.5, можно показать, что $Fr_X(Ox_\alpha \cap X) = Fr_{FX}Ox_\alpha$ и $Fr_X(Oy_\alpha \cap X) = Fr_{FX}Oy_\alpha$ и, следовательно, множества F_1 и F_2 имеют бикомпактные границы. Так как F_1 и F_2 не являются бикомпактными подмножествами пространства X, то мы получаем противоречие с определением F-звезды. Следовательно, $H_\alpha^F = \{x_\alpha\}$, для любого $\alpha \in A$, а тогда множество $J = \{x_\alpha:\ \alpha \in A\}$ — искомое подмножество пространства $FX \setminus X$.

2.4. Определение. *о-звезду (F-звезду) $\mathscr{H}$ в пространстве X будем называть максимальной о-звездой (максимальной F-звездой) в X, если любая о-звезда (F-звезда) $\mathfrak{F}$ в пространстве X, которая содержит $\mathscr{H}$, совпадает с $\mathscr{H}$.*

2.5. Теорема. *Пусть X — периферически бикомпактное пространство. $|I(FX \setminus X)| = \tau$ тогда и только тогда, когда в X имеется максимальная F-звезда мощности τ.*

Доказательство. А). Пусть $|I(FX \setminus X)| = \tau$. Теперь, как и в доказательстве теоремы 2.3 (п. А), можно построить F-звезду $\mathscr{H} = \{H_x:\ x \in I(FX \setminus X)\}$ мощности τ в X; при этом $H_x^F = \{x\}$. Допустим теперь, что $\mathscr{H}$ не является максимальной F-звездой в X. Тогда существует F-звезда $\mathfrak{F}$ в X, такая, что $\mathfrak{F} \supset \mathscr{H}$ и $\mathfrak{F} \neq \mathscr{H}$. Пусть $\Phi \in \mathfrak{F} \setminus \mathscr{H}$. Как и в доказательстве теоремы 2.3 (п. Б), можно показать, что $|\Phi^F| = 1$. Пусть $y = \Phi^F$. Тогда $y \in I(FX \setminus X)$, так как y — изолированная точка пространства $FX \setminus X$, а, с другой стороны, $y \notin I(FX \setminus X)$, так как $I(FX \setminus X) = \cup \{H_x^F:\ x \in I(FX \setminus X)\}$ и $\Phi^F \cap H_x^F = \emptyset$, для любого $x \in I(FX \setminus X)$ ($\Phi^F \cap H_x^F = \emptyset$, так как $\mathfrak{F}$ — о-звезда, а FX — совершенное бикомпактное расширение пространства X, и, следовательно, можно рассуждать как в доказательстве предложения 1.3). Полученное противоречие показывает, что $\mathscr{H}$ — максимальная F-звезда в пространстве X.

Б). Пусть $\mathscr{H} = \{H_\alpha:\ \alpha \in A\}$ — максимальная F-звезда в пространстве X и $|A| = \tau$. Тогда $|H_\alpha^F| = 1$, для любого $\alpha \in A$, и множество $J = \{H_\alpha^F:\ \alpha \in A\}$ состоит из изолированных в $FX \setminus X$ точек; при этом $H_\alpha^F \neq H_\beta^F$, если $\alpha \neq \beta$. Допустим, что $J \neq I(FX \setminus X)$. Тогда существует изолированная в $FX \setminus X$ точка y, такая, что $y \notin J$. Теперь, следуя схеме доказательства предложения 1.5 и имея в виду, что FX — совершенное расширение (см. (7)), можно построить F-звезду $\mathfrak{F} = \mathscr{H} \cup \{\Phi\}$, где Φ — открытое в X множество, такое, что $Fr_X\Phi$ — бикомпакт, $\Phi^F=\{y\}$ и $\overline{\Phi}^X$ — небикомпактно. Тогда $\mathfrak{F}\supset\mathscr{H}$ и $\mathfrak{F}\neq\mathscr{H}$, что противоречит максимальности F-звезды $\mathscr{H}$. Следовательно, $J=I(FX\setminus X)$, а тогда $|I(FX\setminus X)|=\tau$.

Следствие. *Если X — периферически бикомпактное пространство, то любые две максимальные F-звезды в нем имеют одинаковую мощность.*

2.7. Примеры. Будем пользоваться обозначениями пункта 1.10.

Так как в любом небикомпактном (т. е. бесконечном) подмножестве пространства D_τ можно найти непересекающиеся канонически замкнутые в D_τ небикомпактные подмножества с бикомпактными границами, то в D нет F-звезд. Следовательно, согласно теореме 2.3, в $FD_\tau\setminus D_\tau$ нет изолированных точек, т. е. в $\beta D_\tau\setminus D_\tau$ нет изолированных точек.

В пространстве Q также нет F-звезд, так как в Q нет канонически замкнутых непустых бикомпактных подмножеств. Следовательно, в $F\mathsf{Q}\setminus\mathsf{Q}$ нет изолированных точек, т. е. в $\beta\mathsf{Q}\setminus\mathsf{Q}$ нет изолированных точек.

Если в пространстве R положим $H_1=(-\infty,\ 0)$ и $H_2=(0,\ \infty)$, то $\mathscr{H}=\{H_1,\ H_2\}$, очевидно, является максимальной F-звездой в R. Следовательно, $|I(F\mathsf{R}\setminus\mathsf{R})|=2$.

2.8. Теорема. *Если X — периферически бикомпактное пространство, то множество $I(FX\setminus X)$ всюду плотно в $FX\setminus X$ и имеет мощность τ тогда и только тогда, когда в X имеется F-звезда мощности τ, являющаяся максимальной о-звездой в пространстве X.*

Доказательство. А). Пусть $I(FX\setminus X)$ всюду плотно в пространстве $FX\setminus X$ и $|I(FX\setminus X)|=\tau$. Тогда можно построить, как и в доказательстве теоремы 2.5 (п. А)), F-звезду $\mathscr{H}=\{H_x:\ x\in I(FX\setminus X)\}$ мощности τ, такую, что $H_x^F=\{x\}$, для любого $x\in I(FX\setminus X)$. Пусть $\mathfrak{F}$ — о-звезда в пространстве X, $\mathfrak{F}\supset\mathscr{H}$ и $\mathfrak{F}\neq\mathscr{H}$. Тогда существует $\Phi\in\mathfrak{F}\setminus\mathscr{H}$, и, как в доказательстве предложения 1.3, можно показать, что $\Phi^F\neq\emptyset$ и $\Phi^F\cap I(FX\setminus X)=\emptyset$. Полученное противоречие показывает, что $\mathscr{H}$ является максимальной о-звездой в пространстве X.

Б). Пусть $\mathscr{H}=\{H_\alpha:\ \alpha\in A\}$ — F-звезда мощности τ в пространстве X, являющаяся максимальной о-звездой в X. Тогда, очевидно, $\mathscr{H}$ является и максимальной F-звездой в X. Следовательно, по теореме 2.5, $|H_\alpha^F|=1$, для любого $\alpha\in A$, и $\{H_\alpha^F:\ \alpha\in A\}=I(FX\setminus X\}$. Тем самым мы доказали, что $|I(FX\setminus X)|=\tau$. Если мы допустим, что $I(FX\setminus X)$ не является всюду плотным подмножеством пространства $FX\setminus X$, то, следуя схеме доказательства предложения 1.5, мы построим о-звезду $\mathfrak{F}$, содержащую $\mathscr{H}$ и не совпадающую с $\mathscr{H}$, что будет в противоречии с максимальностью о-звезды $\mathscr{H}$. Следовательно, $I(FX\setminus X)$ всюду плотно в пространстве $FX\setminus X$.

2.9. Следствие. *Пусть в периферически бикомпактном пространстве X имеется F-звезда мощности τ, являющаяся максимальной о-звездой в пространстве X. Тогда $d(FX\setminus X)=\tau$.*

2.10. Пример. Построенная в 2.7 максимальная F-звезда $\mathscr{H}=\{H_1,\ H_2\}$ в R является, очевидно, и максимальной о-звездой в R. Следовательно, $d(F\mathsf{R}\setminus\mathsf{R})=2$, и значит $|F\mathsf{R}\setminus\mathsf{R}|=2$.

2.11. В связи с теоремой 2.8 докажем следующее простое предложение:

Предложение. *Если cX — бикомпактное расширение пространства X и в пространстве $cX\setminus X$ имеется локально бикомпактное всюду плотное в $cX\setminus X$ подмножество A, то $\mathscr{L}(X)$ всюду плотно в X.*

Доказательство. Пусть $Y=cX\setminus A$. Тогда $X\subset Y$ и $bY=cX$ является бикомпактным расширением пространства Y. Так как $bY\setminus Y=A$ — локально бикомпактно, то пространство $R(Y)$ — бикомпактно. Следовательно, $\mathscr{L}(Y)$ всюду плотно в пространстве Y (действительно, так как $R(Y)$ — бикомпакт, то $\mathrm{Int}_Y R(Y)=\emptyset$, т. е. $Y\setminus\overline{Y\setminus R(Y)}^Y=\emptyset$ и, следовательно, $Y=\overline{\mathscr{L}(Y)}^Y$). Покажем, что $\mathscr{L}(Y)=\mathscr{L}(X)$. Действительно, $R(Y)=\overline{bY\setminus Y}^{bY}\cap Y=\overline{A}^{cX}\cap(cX\setminus A)=\overline{cX\setminus X}^{cX}\cap(cX\setminus A)=((cX\setminus X)$

$\cup R(X)) \cap Y = R(X) \cup ((cX \setminus X) \cap Y)$, а тогда $\mathscr{L}(Y) = Y \setminus R(Y) = \mathscr{L}(X)$. Так как $\overline{\mathscr{L}(X)}^Y = Y$, то $\overline{\mathscr{L}(X)}^X = X$.

3. О пространствах, которые имеют бикомпактное расширение с дискретным наростом, — некоторые необходимые условия.

3.1. Прежде всего отметим следующий хорошо известный факт (см., напр. [2]).

Предложение. *Если пространство X имеет бикомпактное расширение с локально бикомпактным (в частности, с дискретным) наростом, то множество $R(X)$ бикомпактно.*

3.2. Определение. *Пространство X будем называть R-периферически бикомпактным пространством, если существует определяющая система окрестностей множества $R(X)$ в X, состоящая из открытых в X множеств с бикомпактными границами.*

3.3. Замечание. Легко доказывается, что если пространство X периферически бикомпактно, а множество $R(X)$ бикомпактно, то пространство X R-периферически бикомпактно. Обратное, вообще говоря, не верно. Если, например, $X = I^2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} ([0, 1/2] \times \{1/2\})$, где $I = [0, 1] \subset \mathrm{R}$ — отрезок со своей естественной топологией, то $R(X) = [0, 1/2] \times \{0\}$ — бикомпакт, X — R-периферически бикомпактно, но X не является периферически бикомпактным пространством.

3.4. Предложение. *Пусть пространство X имеет бикомпактное расширение cX с дискретным наростом. Тогда X — R-периферически бикомпактное пространство.*

Доказательство. Если $R(X) = \varnothing$, то наше утверждение тривиально. Пусть $R(X) \neq \varnothing$ и пусть O' — открытая в X окрестность множества $R(X)$. Если $O = Ex_c O'$, то $O \cap (cX \setminus X) \neq \varnothing$ и даже $|X^c \setminus O| < \aleph_0$. Действительно, если $Y = X^c \cup R(X)$, то Y — бикомпакт, X^c — всюду плотно и открыто в Y, а $O \cap Y$ — открыто в Y и содержит $R(X)$. Следовательно, $Y \setminus O$ — бикомпактное подмножество пространства X^c, и значит $Y \setminus O = X^c \setminus O$ — конечное множество. Пусть $X^c \setminus O = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Так как $R(X)$ — бикомпакт, то для любого $i = 1, \ldots, n$, существует открытое в cX множество V_i, такое, что $x_i \in V_i \subset \overline{V}_i^{cX} \subset cX \setminus R(X)$ и $\overline{V}_i^{cX} \cap X^c = \{x_i\}$. Пусть $U = O \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_i^{cX}$. Тогда U открыто в cX, $R(X) \subset U \subset O$, $X^c \setminus O = X^c \setminus U$ и, очевидно, $X^c \setminus \overline{U}^{cX} = X^c \setminus U$, т. е. $(\overline{U}^{cX} \setminus U) \cap X^c = \varnothing$. Тогда $Fr_{cX} U = \overline{U}^{cX} \setminus U = ((\overline{U}^{cX} \cap X) \setminus (U \cap X)) \cup ((\overline{U}^{cX} \setminus U) \cap X^c) = \overline{U \cap X}^X \setminus (U \cap X) = Fr_X (U \cap X)$. Следовательно, $V = U \cap X$ — искомая открытая в X окрестность с бикомпактной границей множества $R(X)$, содержащаяся в O', т. е. X — R-периферически бикомпактное пространство.

3.5. Если A — замкнутое подмножество пространства X, то через X/A будем обозначать, как обычно, пространство, полученное из пространства X стягиванием подмножества A в точку. Нетрудно увидеть, что имеет место следующее утверждение:

Предложение. *Пусть cX — бикомпактное расширение пространства X и пусть $R(X)$ — бикомпакт. Если $Z = X/R(X)$ и $cZ = cX/R(X)$, то cZ является хаусдорфовым бикомпактным расширением пространства Z. Кроме того, пространства $cX \setminus X$ и $cZ \setminus Z$ гомеоморфны, естественная проекция $\varphi: X \to Z$ является совершенным отображением, а если пространство X R-периферически бикомпактно, то пространство Z периферически бикомпактно.*

3.6. Предложение. *Если пространство X имеет бикомпактное расширение cX с дискретным наростом $cX \setminus X$ мощности τ, то пространство $Z = X/R(X)$ имеет бикомпактное расширение с нульмерно расположенным дискретным наростом мощности τ.*

Доказательство. Имея в виду предложение 3.5, мы должны показать только, что $cZ \setminus Z$ нульмерно расположено в cZ, где $cZ = cX/R(X)$. Но так как

$|R(Z)|=1$, то мы можем закончить наше доказательство, рассуждая как в доказательстве предложения 3.4.

3.7. Предложение. *Пусть пространство X имеет бикомпактное расширение cX с дискретным наростом. Если bX — другое бикомпактное расширение пространства X и $cX \geqq bX$, то и $bX \setminus X$ — дискретное пространство. Если $|cX \setminus X| \geqq \aleph_0$, то $|bX \setminus X| = |cX \setminus X|$.*

Доказательство. Пусть $\varphi: cX \to bX$ — отображение, оставляющее точки пространства X неподвижными. Тогда $\varphi_1 = \varphi|_{cX \setminus X}: cX \setminus X \to bX \setminus X$ — совершенное отображение (см. [14]). Так как $cX \setminus X$ — дискретное пространство, то любое бикомпактное подмножество в нем конечно. Следовательно, и любое бикомпактное подмножество пространства $bX \setminus X$ конечно, так как его прообраз при отображении φ_1 является бикомпактом. Так как $cX \setminus X$ — локально бикомпактное пространство, то $bX \setminus X$ является к-пространством. Следовательно, $bX \setminus X$ — дискретное пространство. Если $|cX \setminus X| \aleph_0$, то из $|\varphi_1^{-1}(y)| < \aleph_0$, для любого $y \in bX \setminus X$, и из равенства $cX \setminus X = \cup \{\varphi_1^{-1}(y): y \in bX \setminus X\}$ следует, что $|cX \setminus X| = |bX \setminus X|$.

3.8. Следствие. *Если X — пространство, для которого пространство $\beta X \setminus X$ бесконечно и дискретно, то все наросты пространства X в его бикомпактных расширениях гомеоморфны между собой.*

3.9. Предложение. *Если X — пространство, cX — его бикомпактное расширение и $cX \setminus X$ — дискретное пространство, то $|cX \setminus X| \leqq 2^{d(X)}$ и $|cX| \leqq 2^{w(X)}$.*

Доказательство. Так как $w(cX) \leqq 2^{d(X)}$ и $d(X) \leqq w(X)$, а $|cX \setminus X| = w(cX \setminus X)$ и $w(cX \setminus X) \leqq w(cX)$, то получаем, что $|cX \setminus X| \leqq w(cX) \leqq 2^{d(X)}$. С другой стороны, $|X| \leqq 2^{w(X)}$ и, следовательно, $|cX| \leqq 2^{w(X)} + 2^{d(X)} = 2^{w(X)}$.

3.10. Следствие. *Если cX — бикомпактное расширение пространства X и пространство $cX \setminus X$ дискретно, то*: а) $w(X) \leqq |cX| \leqq 2^{w(X)}$ *и* б) $|cX \setminus X| \leqq 2^{|\mathscr{L}(X)|}$.

Доказательство. а) Так как $w(cX) \leqq |cX|$, то из предложения 3.9 получаем, что $w(X) \leqq w(cX) \leqq |cX| \leqq 2^{w(X)}$. б) Так как, согласно предложению 2.11, множество $\mathscr{L}(X)$ всюду плотно в пространстве X, то из 3.9 получаем, что $|cX \setminus X| \leqq 2^{d(X)} \leqq 2^{|\mathscr{L}(X)|}$.

4. О мощности и дискретности фрейденталевского нароста.

4.1. Напомним, что если $\mathscr{H} = \{H_\alpha: \alpha \in A\}$ и $\mathfrak{F} = \{\Phi_\beta: \beta \in B\}$ — два семейства подмножеств данного множества X, то говорят, что семейство $\mathfrak{F}$ комбинаторно вписано в семейство $\mathscr{H}$ (будем писать $\mathfrak{F} \underset{c}{\succ} \mathscr{H}$), если существует биекция $\varphi: B \xrightarrow{\text{на}} A$, такая, что $\Phi_\beta \subset H_{\varphi(\beta)}$, для любого $\beta \in B$.

Определение. *Звезду $\mathscr{H}$ в пространстве X будем называть М-совершенной звездой, если для любой звезды $\mathfrak{F}$, комбинаторно вписанной в звезду $\mathscr{H}$ множество $X \setminus \cup \mathfrak{F}$ бикомпактно.*

4.2. Лемма. *Если $\mathscr{H}$ — М-совершенная звезда в пространстве X, то $\mathscr{H}$ является F-звездой и максимальной о-звездой в пространстве X.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H} = \{H_\alpha: \alpha \in A\}$ и пусть $\alpha_0 \in A$. Допустим, что в H_{α_0} имеются два дизъюнктных канонически замкнутых в X небикомпактных множества F_1 и F_2 с бикомпактными границами. Пусть $\Phi = \operatorname{Int}_X F_1$. Тогда $\bar{\Phi}^X = F_1$ и $Fr\Phi = FrF_1$. Следовательно, Φ является открытым в X множеством с бикомпактной границей и с небикомпактным замыканием. Положим $\Phi_{\alpha_0} = \Phi$ и $\Phi_\beta = H_\beta \setminus \overline{H_{\alpha_0} \cap H_\beta}$, для $\beta \in A \setminus \{\alpha_0\}$. Тогда $\mathfrak{F} = \{\Phi_\alpha: \alpha \in A\}$ — звезда в пространстве X и $\mathfrak{F} \underset{c}{\succ} \mathscr{H}$. Следовательно, $X \setminus \cup \mathfrak{F}$ — бикомпактное множество. Но $\Phi_\alpha \cap F_2 = \varnothing$, для любого $\alpha \in A$ и, следовательно, $F_2 \subset X \setminus \bigcup \mathfrak{F}$. Мы получили, что F_2 — бикомпактное множество. Это противоречие показывает, что $\mathscr{H}$ — F-звезда в X.

Пусть $\Psi = \{\psi_\beta : \beta \in B\}$ — о-звезда в X и пусть $\Psi \supset \mathscr{H}$, $\Psi \neq \mathscr{H}$. Тогда существует $\psi_{\beta_0} \in \Psi$, такое, что $\psi_{\beta_0} \notin \mathscr{H}$. Положим $\Phi_\alpha = H_\alpha \setminus \overline{\psi}_{\beta_0}$, для любого $\alpha \in A$. Тогда, так как $\Phi_\alpha = H_\alpha \setminus (\overline{\psi_{\beta_0} \cap H_\alpha} \cup Fr\psi_{\beta_0})$, семейство $\Phi = \{\Phi_\alpha : \alpha \in A\}$ будет опять звездой, при этом комбинаторно вписанной в звезду $\mathscr{H}$. Получим, что $\overline{\psi}_{\beta_0} \subset X \setminus \bigcup \mathfrak{F}$, т. е. $\overline{\psi}_{\beta_0}$ — бикомпактное множество. Это противоречие показывает, что $\mathscr{H}$ является максимальной о-звездой в пространстве X.

4.3. Определение. *Пусть $\mathscr{H}$ — звезда в пространстве X. Открытое покрытие ω пространства X будем называть $\mathscr{H}$-покрытием, если существует звезда $\mathfrak{F}$ в X, такая, что $\mathfrak{F} \overset{c}{\succ} \mathscr{H}$ и $\mathfrak{F} \succ \omega$.*

4.4. Определение. *Звезду $\mathscr{H}$ в пространстве X будем называть совершенной звездой, если из любого $\mathscr{H}$-покрытия пространства X можно выбрать конечное подпокрытие.*

4.5. Легко доказывается следующее утверждение:

Предложение. *Любая совершенная звезда в пространстве X является M-совершенной звездой в X.*

4.6. Пусть $\mathscr{H} = \{H_\alpha : \alpha \in A\}$— звезда в пространстве X, и $\mathfrak{F}$ — другая звезда в X, такая, что $\mathfrak{F} \overset{c}{\succ} \mathscr{H}$. Тогда элементы семейства $\mathfrak{F}$ можно так перенумеровать, чтобы $\mathfrak{F} = \{\Phi_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\Phi_\alpha \subset H_\alpha$, для любого $\alpha \in A$.

Имеет место следующее утверждение, несложное техническое доказательство которого не будем приводить:

Предложение. *Пусть $\mathscr{H} = \{H_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\mathfrak{F} = \{\Phi_\alpha : \alpha \in A\}$ — звезды в пространстве X и $\Phi_\alpha \subset H_\alpha$, для любого $\alpha \in A$. Если $\mathscr{H}$ — совершенная (M-совершенная) звезда в X, то таковой является звезда $\mathfrak{F}$ и множества $\overline{H}_\alpha \setminus \Phi_\alpha$ бикомпактны для любого $\alpha \in A$. Наоборот, если $\mathfrak{F}$ — совершенная (M-совершенная) звезда и множества $\overline{H}_\alpha \setminus \Phi_\alpha$ бикомпактны, для любого $\alpha \in A$, то и $\mathscr{H}$ является совершенной (M-совершенной) звездой в X.*

4.7. Предложение. *Если $\mathscr{H}$ — звезда в пространстве X, то $\mathscr{H}$ является совершенной звездой в X тогда и только тогда, когда существует предбаза $\mathscr{B}$ для открытых подмножеств X, такая, что из любого $\mathscr{H}$-покрытия, состоящего из элементов предбазы $\mathscr{B}$, можно выбрать конечное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть ω — семейство открытых подмножеств пространства X. Назовем его $\mathscr{H}$-семейством, если существует звезда $\mathfrak{F}$ в X, такая, что $\mathfrak{F} \overset{c}{\succ} \mathscr{H}$ и $\mathfrak{F} \succ \omega$. Если назовем семейство открытых подмножеств пространства X неполноценным, в случае когда оно не является покрытием пространства X и финитно неполноценным, в случае когда любое его конечное подсемейство неполноценно, то определение 4.4 можно переформулировать так: $\mathscr{H}$ является совершенной тогда и только тогда, когда любое финитно неполноценное $\mathscr{H}$-семейство в X не полноценно.

Так как любое семейство открытых подмножеств пространства X, которое содержит $\mathscr{H}$-семейство, является $\mathscr{H}$-семейством, то любое финитно неполноценно-$\mathscr{H}$-семейство λ содержится в максимальном финитно неполноценном семействее Теперь можем продолжить наши рассуждения как и в доказательстве теоремы Александера (см. [6], с. 187, теорема 6), Таким образом мы докажем, что если в X существует предбаза $\mathscr{B}$ с описанными в условии предложения свойствами, то любое финитно неполноценное $\mathscr{H}$-семейство в X неполноценно, т. е. что $\mathscr{H}$ является совершенной звездой.

В обратную сторону утверждение очевидно, 4.8. Предложение. *Если X — периферически бикомпактное пространство и $\mathscr{H}$ — звезда в X мощности τ, где $\tau \leq \aleph_0$, то $\mathscr{H}$ является совершенной звездой в X тогда и только тогда, когда $\mathscr{H}$ — M-совершенная звезда в X.*

Доказательство. Если $\tau < \aleph_0$, то утверждение тривиально. Пусть $\tau = \aleph_0$. Согласно предложению 4.5, любая совершенная звезда является M-совершенной звездой. Покажем, что в данных условиях имеет место также и обратное утверждение.

Пусть $\mathscr{H} = \{H_i : i \in \mathbb{N}\}$ — M-совершенная звезда в X мощности $\aleph_0$. Положим $H'_1 = H_1$, $H'_2 = H_2 \setminus \overline{H'_1 \cap H_2}, \ldots, H'_i = H_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{H'_j \cap H_i}, \ldots$. Пусть $\mathscr{H}' = \{H'_i : i \in \mathbb{N}\}$. Тогда, очевидно, семейство H' является звездой в X. Кроме того, семейство $\mathscr{H}'$, дизъюнктно, $\mathscr{H}' \overset{c}{\succ} \mathscr{H}$ и $\bar{H}_i \setminus H'_i$ — бикомпактное множество, для любого $i \in \mathbb{N}$. Из предложения 4.6 следует, что $\mathscr{H}'$ является M-совершенной звездой и что из совершенности звезды $\mathscr{H}'$ следует совершенность звезды $\mathscr{H}$.

Итак, покажем, что $\mathscr{H}'$ — совершенная звезда в X. Пусть ω — $\mathscr{H}'$-покрытие пространства X. Тогда существует звезда $\mathfrak{F} = \{\Phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ в X, такая что, $\Phi_n \subset H'_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и $\mathfrak{F} \succ \omega$. Мы можем считать, что $\mathfrak{F} \subset \omega$ (если это не так, то мы можем перейти к покрытию $\omega' = \omega \cup \mathfrak{F}$, и ясно, что если из него мы сумеем выбрать конечное подпокрытие, то мы сможем выбрать и из ω конечное подпокрытие). Кроме того, так как X — периферически бикомпактное пространство, то, имея в виду предложение 4.7, мы можем считать, что элементы покрытия ω имеют бикомпактные границы. Так как, согласно 4.6, множество $K_{\mathfrak{F}} = X \setminus \cup \mathfrak{F}$ бикомпактно, то существует конечное семейство $\omega' \subset \omega$, такое, что $K_{\mathfrak{F}} \subset \cup \omega'$. Пусть $U = \cup \omega'$. Тогда $Fr_X U$ — бикомпакт. Рассмотрим теперь множество $N_U = \{n \in \mathbb{N} : \overline{\Phi_n \setminus U}$ — небикомпактно$\}$. Множество $\overline{\Phi_n \setminus \bar{U}}$ небикомпактно для любого $n \in N_U$, так как $\bar{\Phi}_n \setminus U \subset \overline{\Phi_n \setminus \bar{U}} \cup FrU \cup Fr\Phi_n$. Следовательно, $\Phi_n \setminus \bar{U} \neq \emptyset$ для любого $n \in N_U$, и мы можем выбрать по точки x_n из $\Phi_n \setminus \bar{U}$, для любого $n \in N_U$. Пусть $W_n = \Phi_n \setminus (\bar{U} \cup \{x_n\})$ для $n \in N_U$. Тогда FrW_n — бикомпактное множество, а $\bar{W}_n^x$ — не бикомпактно. Если $n \notin N_U$, то $\bar{\Phi}_n \setminus U$ бикомпактно, а тогда $\overline{\Phi_n \cap U}$ — не бикомпактно и $Fr(\Phi_n \cap U)$ — бикомпактно. Положим теперь $W_n = \Phi_n \cap U$ для $n \notin N_U$ и пусть $\mathscr{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда $\mathscr{W}$ — звезда в X и $\mathscr{W} \overset{c}{\succ} \mathfrak{F}$. Следовательно, множество $K_{\mathscr{W}} = X \setminus \cup \mathscr{W}$ бикомпактно. Так как $\mathfrak{F}$ — дизъюнктное семейство, то множество $A = \{x_n : n \in N_U\} \subset K_{\mathscr{W}}$. Если множество N_U бесконечно, то тогда множество A имеет точку полного накопления $x \in K_{\mathscr{W}}$. Так как $U \cap A = \emptyset$, то $x \notin U \cap K_{\mathscr{W}}$. Следовательно, $x \in X \setminus U \subset \cup \mathfrak{F}$, т. е. $x \in K_{\mathscr{W}} \cap (\cup \mathfrak{F})$. Но семейство $\mathfrak{F}$ — дизъюнктно и значит существует единственное $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что $x \in \Phi_{n_0}$. Так как $|\mathfrak{F}_{n_0} \cap A| \leq 1$, то получаем противоречие. Следовательно, множество N_U конечно.

Итак, мы получили, что $X = U \cup FrU \cup K_{\mathscr{W}} \cup \cup\{\Phi_n : n \in N_U\} = (\cup \omega') \cup \cup \{\Phi_n : n \in N_U\} \cup K$, где $K = K_{\mathscr{W}} \cup FrU$ — бикомпакт. Так как $\mathfrak{F} \subset \omega$, то теперь ясно, что покрытие ω имеет конечное подпокрытие. Следовательно, $\mathscr{H}'$, а тогда и $\mathscr{H}$, совершенная звезда в X.

4.9. Определение. *Если U и V — два открытых подмножества пространства X, то будем говорить, что множество U квазисодержит множество V, если множество $\bar{V} \setminus U$ бикомпактно. Если $\mathscr{H}$ — семейство открытых в X множеств, и A — подмножество пространства X, то будем говорить, что семейство $\mathscr{H}$ квазисходится к множеству A, если любая, открытая в X окрестность множества A квазисодержит все за исключением, может быть, конечного числа, элементов семейства $\mathscr{H}$.*

4.10. Предложение. *В R-периферически бикомпактном пространствен X одна звезда совершенна тогда и только тогда, когда она квазисходится к множеству $R(X)$ и M-совершенна.*

Доказательство. А). Пусть $\mathscr{H}$ — совершенная звезда в R- периферически бикомпактном пространстве X. Тогда, согласно предложению 4.5, $\mathscr{H}$ является M-совершенной звездой. Покажем, что $\mathscr{H}$ квазисходится к множеству $R(X)$.

Пусть $\mathfrak{F}=\{\Phi_\alpha:\ \alpha\in A\}$ — звезда в X и $\mathfrak{F}\overset{c}{\succ}\mathscr{H}$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ квазисходится к множеству $R(X)$. Пусть W — открытая в X окрестность множества $R(X)$. Если для любого $U\subset X$ положим $A_U=\{\alpha\in A:\ \overline{\mathfrak{F}}_\alpha\setminus U$ небикомпактно$\}$, то мы должны показать, что множество A_W конечно. Так как X — R-периферически бикомпактно, то существует открытая в X окрестность V множества $R(X)$, такая, что FrV — бикомпакт и $V\subset W$. Очевидно, $A_W\subset A_V$. Следовательно, нам достаточно показать, что множество A_V конечно.

Так как $X\setminus V\subset\mathscr{L}(X)$, то для любого $x\in X\setminus V$ существует открытое множество Ox, такое, что $x\in Ox\subset\overline{Ox}\subset\mathscr{L}(X)$ и $\overline{Ox}$ — бикомпакт. Положим теперь $V_\alpha=\Phi_\alpha\setminus\overline{V}$, для $\alpha\in A_V$, и $V_\alpha=\Phi_\alpha$, для $\alpha\in A\setminus A_V$. Пусть $\mathscr{V}=\{V_\alpha:\ \alpha\in A\}$. Тогда $\mathscr{V}$ — звезда в X и $\mathscr{V}\overset{c}{\succ}\mathfrak{F}\overset{c}{\succ}\mathscr{H}$. Пусть $\omega=\mathscr{V}\cup\{V\}\cup\{Ox:\ x\in X\setminus V\}$. Тогда ω — $\mathscr{H}$-покрытие пространства X и, следовательно, имеет конечное подпокрытие $\omega'=\{V\}\cup\mathscr{V}'\cup\{Ox_i:\ i=1,\ldots,k\}$, где $\mathscr{V}'$ — конечное подсемейство звезды $\mathscr{V}$. Допустим теперь, что $|A_V|\geqq\aleph_0$. Тогда существует $\alpha_0\in A_V$, такое, что $V_{\alpha_0}\subset\bigcup_{i=1}^k Ox_i\cup\bigcup\mathscr{V}'$ и $V_{\alpha_0}\notin\mathscr{V}$. Так как семейство $\mathscr{V}$ квазидизъюнктно, то $\overline{V_{\alpha_0}(\bigcup\mathscr{V}')}$ — бикомпакт, а тогда множество $Z_{\alpha_0}=\overline{V_{\alpha_0}\setminus\overline{V_{\alpha_0}\cap(\bigcup\mathscr{V}')}}$ — небикомпактно. Но $Z_{\alpha_0}\subset\bigcup_{i=1}^k\overline{Ox_i}$ и значит оно бикомпактно. Полученное противоречие показывает, что $|A_V|<\aleph_0$, т. е. что $\mathfrak{F}$ (а, следовательно, и $\mathscr{H}$) квазисходится к $R(X)$.

Б). Пусть $\mathscr{H}=\{H_\alpha\ \alpha\in A\}$ — M-совершенная звезда в R-периферически бикомпактном пространстве X и $\mathscr{H}$ квазисходится к $R(X)$. Покажем, что $\mathscr{H}$ является совершенной звездой в X.

Прежде всего покажем, что если $\mathfrak{F}$ — звезда в X, такая, что $\mathfrak{F}\overset{c}{\succ}\mathscr{H}$, то $\mathfrak{F}$ квазисходится к множеству $R(X)$. Пусть $\mathfrak{F}=\{\Phi_\alpha:\ \alpha\in A\}$ и $\Phi_\alpha\subset H_\alpha$, для любого $\alpha\in A$. Если V — произвольная открытая окрестность множества $R(X)$, то положим $A_{V,\mathfrak{F}}=\alpha\in A:\overline{\Phi}_\alpha\setminus V$ небикомпактно$\}$ и, аналогично, $A_{V,\mathscr{H}}=\{\alpha\in A:\ \overline{H_\alpha}\setminus V$ не бикомпактно$\}$. Очевидно, достаточно показать, что $A_{V,\mathscr{H}}=A_{V,\mathfrak{F}}$. Действительно, так как $\mathscr{H}$ — M-совершенная звезда, то из предложения 4.6 следует, что множество $\overline{H}_\alpha\setminus\Phi_\alpha$ бикомпактно для любого $\alpha\in A$. Так как $\overline{H}_\alpha\setminus V=((\overline{H}_\alpha\setminus\Phi_\alpha)\setminus V)\cup(\overline{\Phi_\alpha}\setminus V))$, то теперь ясно, что $A_{V,\mathscr{H}}=A_{V,\mathfrak{F}}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ квазисходится к множеству $R(X)$.

Так как $R(X)\subset X\setminus\bigcup\mathscr{H}$, то $R(X)$ — бикомпакт.

Пусть ω — $\mathscr{H}$-покрытие пространства X, т. е. существует звезда $\mathfrak{F}=\{\Phi_\alpha:\ \alpha\in A\}$ в X, такая, что $\Phi_\alpha\subset H_\alpha$ для любого $\alpha\in A$, и $\mathfrak{F}\succ\omega$. Существует конечное подсемейство ω' семейства ω, которое покрывает бикомпакт $R(X)$. Пусть $U=\bigcup\omega'$. Так как X — R-периферически бикомпактно, то существует открытое множество V с бикомпактной границей, такое, что $R(X)\subset V\subset U$. По доказанному выше имеем, что множество $A_{V,\mathfrak{F}}$ конечно. Положим $V_\alpha=\Phi_\alpha$, для $\alpha\in A_{V,\mathfrak{F}}$, и $V_\alpha=\Phi_\alpha\cap V$, для $\alpha\in A\setminus A_{V,\mathfrak{F}}$. Очевидно $\mathscr{V}=\{V_\alpha:\ \alpha\in A\}$ — звезда в X и $\mathscr{V}\overset{c}{\succ}\mathfrak{F}\overset{c}{\succ}\mathscr{H}$. Следовательно, множество $X\setminus\bigcup\mathscr{V}$ бикомпактно. Так как $X=V\cup(X\setminus\bigcup\mathscr{V})\cup\bigcup\{V_\alpha:\alpha\in A_{V,\mathfrak{F}}\}=(\bigcup\omega')\cup(X\setminus\bigcup\mathscr{V})\cup\bigcup\{V_\alpha:\ \alpha\in A_{V,\mathfrak{F}}\}$, то теперь ясно как можно выбрать конечное подпокрытие из $\mathscr{H}$-покрытия ω. Следовательно, $\mathscr{H}$ является совершенной звездой.

4.11. Замечание. *Если $\mathscr{H}$ — совершенная задача в пространстве X, то $|\mathscr{H}|\geqq\aleph_0$ тогда и только тогда, когда $R(X)\neq\emptyset$.*

Доказательство. Пусть $|\mathscr{H}|\geqq\aleph_0$ и $R(X)=\emptyset$. Тогда, рассуждая как в доказательстве предложения 4.10 (п. А)) при $V=\emptyset$, мы придем к противоречию. Следовательно, $R(X)\neq\emptyset$. Обратно, если $R(X)\neq\emptyset$ и $\mathscr{H}=\{H_i: i=1,\ldots,n\}$, то $U=X\setminus\bigcup_{i=1}^n\bar{H}_i$ — открытое множество и $R(X)\subset U$. Так как $R(X)\subset X\setminus\bigcup\mathscr{H}$, то $R(X)$ — бикомпакт и, следовательно, существует открытое множество W, такое, что $R(X)\subset W\subset\bar{W}\subset U\subset X\setminus\bigcup\mathscr{H}$. Так как W — открытое множество в X с бикомпактным замыканием и $\emptyset\neq R(X)\subset W$, то мы получаем противоречие с определением множества $R(X)$. Следовательно, $|\mathscr{H}|\geqq\aleph_0$.

4.12. Теорема. *Если X — периферически бикомпактное пространство, то $FX\setminus X$ — дискретное пространство мощности τ тогда и только тогда, когда в X имеется совершенная звезда мощности τ.*

Доказательство. А). Пусть $FX\setminus X$ — дискретное пространство мощности τ Тогда, для любой точки $x\in FX\setminus X$, существуют открытые в FX множества Ox и Vx такие, что $Ox\cap(FX\setminus X)=\{x\}$, $x\in Vx\subset\bar{V}x^{FX}\subset Ox\cap(FX\setminus R(X))$ и $Fr_{FX}Vx\subset X$. Если $H_x=Vx\cap X$, то рассуждая как в доказательстве предложения 1.5, можно показать, что $\mathscr{H}=\{H_x: x\in FX\setminus X\}$ — звезда в X. Докажем теперь, что $\mathscr{H}$ — совершенная звезда в X. Пусть ω — $\mathscr{H}$-покрытие пространства X. Тогда существует $\mathfrak{F}=\{\Phi_x: x\in FX\setminus X\}$ — звезда в X, такая, что $\mathfrak{F}\succ\omega$ и $\Phi_x\subset H_x$, для любого $x\in FX\setminus X$. Так как $\bar{\Phi}_x^{FX}\cap(FX\setminus X)\neq\emptyset$, а $\bar{\Phi}_x^{FX}\subset\bar{H}_x^{FX}=\bar{V}x^{FX}\subset Ox$, то $\bar{\Phi}_x^{FX}\cap(FX\setminus X)=\{x\}$, а тогда $\Phi_x^F\subset\{x\}$. Но FX — совершенное бикомпактное расширение пространства X (см. [7]), и, следовательно, как и в доказательстве предложения 1.3, мы можем показать, что $\Phi_x^F\neq\emptyset$. Следовательно, $\Phi_x^F=\{x\}$, для любого $x\in FX\setminus X$. Положим теперь $Ex_F\omega=\{Ex_FO: O\in\omega\}$. Тогда семейство $Ex_F\mathfrak{F}=\{Ex_F\Phi: \Phi\in\mathfrak{F}\}$, очевидно, вписано в семейство $Ex_F\omega$. Но мы показали, что $FX\setminus X\subset\bigcup Ex_F\mathfrak{F}$ и, следовательно, $Ex_F\omega$ — открытое покрытие бикомпакта FX. Теперь ясно, что ω имеет конечное подпокрытие. Следовательно, $\mathscr{H}$ — совершенная звезда мощности τ в X. Б). Пусть $\mathscr{H}=\{H_\alpha\ \alpha\in A\}$ — совершенная звезда мощности τ в периферически бикомпактном пространстве X. Покажем, что пространство $FX\setminus X$ дискретно и $|FX\setminus X|=\tau$.

Из 4.5 и 4.2 получаем, что $\mathscr{H}$ является F-звездой и максимальной о-звездой в пространстве X. Тогда из теоремы 2.8 следует, что множество $I(FX\setminus X)$ всюду плотно в $FX\setminus X$ и $|I(FX\setminus X)|=\tau$, а из доказательства теоремы 2.8 имеем, что $I(FX\setminus X)=\{H_\alpha^F: \alpha\in A\}$, где $|H_\alpha^F|=1$, для любого $\alpha\in A$. Обозначим через x_α множество H_α^F (где $\alpha\in A$) и через I_F — множество $I(FX\setminus X)$. Покажем, что множество I_F замкнуто в пространстве $FX\setminus X$.

Так как $R(X)\subset X\setminus\bigcup\mathscr{H}$, то множество $R(X)$ бикомпактно. Тогда из 3.3 следует, что пространство X — R-периферически бикомпактно. Теперь из предложения 4.10 получаем, что для любой открытой в X окрестности V множества $R(X)$ множество $A_V=\{\alpha\in A: \bar{H}_\alpha^X\setminus V$ небикомпактно$\}$ — конечно.

Пусть O — открытая в FX окрестность множества $R(X)$. Покажем, что $|I_F\setminus O|<\aleph_0$. Действительно, так как $R(X)$ замкнуто в FX, то существует открытое в FX множество O_1, такое, что $R(X)\subset O_1\subset\bar{O}_1^{FX}\subset O$. Тогда $Ex_F(O_1\cap X)\subset\bar{O}_1^{FX}\subset O$, т. е. $R(X)\subset Ex_F(O_1\cap X)\subset O$. Так как X — R-периферически бикомпактно, то существует открытое в X множество W_1 с бикомпактной границей, такое, что $R(X)\subset W_1\subset\bar{W}_1^X\subset O_1\cap X$. Пусть $W=Ex_FW_1$. Так как FX — совершенное бикомпактное расширение пространства X, то $Fr_{FX}W=\overline{Fr_X W_1}^{FX}=F_{rX}W_1$, т.е. $Fr_{FX}W\subset X$. Тогда $W\cap(FX\setminus X)=\bar{W}^{FX}\cap(FX\setminus X)$, а также, имея в виду что $W\subset Ex_F(O_1\cap X)\subset O$ и $Fr_XW_1\subset\bar{W}_1^X\subset O_1\cap X\subset O$, получаем, что $\bar{W}^{FX}\subset O$. Так как $I_F\setminus O\subset I_F\setminus\bar{W}^{FX}=I_F\setminus W$, то достаточно показать, что $|I_F \setminus \overline{W}^{FX}| < \aleph_0$. Пусть $x_\alpha \in I_F \setminus \overline{W}^{FX}$. Так как $x_\alpha \in Ex_F H_\alpha$, то существует открытое в FX множество Ux_α, такое, что $x_\alpha \in Ux_\alpha \subset \overline{Ux}_\alpha^{FX} \subset (Ex_F H_\alpha) \cap (FX \setminus \overline{W}^{FX})$. Тогда $\overline{Ux_\alpha \cap X}^X \subset H_\alpha \setminus \overline{W}^{FX} \subset H_\alpha \setminus W_1$. Так как $\overline{Ux_\alpha \cap X}^X$ — небикомпактно, то получаем, что $\alpha \in A_{W_1}$. Следовательно, $|I_F \setminus W| \leqq |A_{W_1}| < \aleph_0$, а значит и $|I_F \setminus O| < \aleph_0$.

Обозначим теперь через Y множество $R(X) \cup I_F$. Покажем, что Y — бикомпактное подмножество пространства FX. Действительно, пусть ω — открытое покрытие пространства Y. Так как $R(X)$ — бикомпакт, то существует конечное семейство $\lambda \subset \omega$, покрывающее $R(X)$. Пусть O — некоторое открытое в FX множество, такое, что $O \cap Y = \cup \lambda$. Тогда $O \supset R(X)$, и, согласно доказанному выше, $|I_F \setminus O| < \aleph_0$. Теперь ясно, что ω имеет конечное подпокрытие. Следовательно, Y — бикомпактное подмножество пространства FX, а тогда множество $Y \cap (FX \setminus X)$ — замкнуто в пространстве $FX \setminus X$. Итак, мы получили, что множество I_F замкнуто в пространстве $FX \setminus X$, а так как оно всюду плотно в нем, то $I_F = FX \setminus X$. Следовательно, $FX \setminus X$ — дискретное пространство мощности τ.

4.13. Из предложения 4.8 и теоремы 4.12 сразу получаем такую теорему:

Теорема. *Если $\tau \leqq \aleph_0$, а X — периферически бикомпактное пространство, то пространство $FX \setminus X$ дискретно, и мощность его равна τ тогда и только тогда, когда в пространстве X имеется M-совершенная звезда мощности τ.*

4.14 Примеры. Очевидно, что определенная в 2.7 звезда $\mathscr{H} = \{H_1, H_2\}$ в пространстве R является совершенной звездой в R, т. е. $|F\mathsf{R} \setminus \mathsf{R}| = 2$.

Другой пример получаем, если рассмотрим пространство $X = I^2 \setminus \{(1/n, 0) : n \in \mathsf{N}\}$ где $I = [0, 1] \subset \mathsf{R}$. Если $O_\varepsilon(x) = \{y \in \mathsf{R}^2 : \rho(x, y) < \varepsilon\}$, то полагая $H_n = O_{1/4n^2}((1/n, 0)) \cap X$, для любого $n \in \mathsf{N}$, мы получим семейство $\mathscr{H} = \{H_n : n \in \mathsf{N}\}$, которое является M-совершенной звездой в X. Следовательно, по теореме 4.13, пространство $FX \setminus X$ дискретно и счетно. (Здесь имеем даже, что $FX \sim I^2$, так как легко устанавливается, что I^2 является совершенным бикомпактным расширением пространства X, а тогда из одной теоремы Е. Г. Скляренко из (7) следует, что $I^2 \sim FX$.)

5. О множестве изолированных точек стоун-чеховского нароста.

5.1. Определение. *Звезду $\mathscr{H}$ в пространстве X будем называть β-звездой, если для любого элемента H семейства $\mathscr{H}$, из любых двух дизъюнктных, нуль-множеств в X, являющихся подмножествами множества H, хотя бы одно бикомпактно.*

5.2. Теорема. *В стоун-чеховском наросте $\beta X \setminus X$ данного пространства X имеется множество J мощности τ, состоящее из изолированных в $\beta X \setminus X$ точек, тогда и только тогда, когда в X имеется β-звезда мощности τ.*

Доказательство. А). Пусть множество $J = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ состоит из изолированных в $\beta X \setminus X$ точек и имеет мощность τ. Тогда, для любого $x \in J$, найдутся открытые в βX множества Ux и Vx такие, что $Ux \cap X^\beta = \{x\}$, $Ux \cap \overline{R(X)}^{\beta X} = \varnothing$ и $x \in Vx \subset \overline{Vx}^{\beta X} \subset Ux$. Если $H_x = Vx \cap X$, для любого $x \in J$, то докажем, что семейство $\mathscr{H} = \{H_x : x \in J\}$ является β-звездой в пространстве X. Действительно, так как $\overline{H}_x^X \cup \{x\} = \overline{Vx}^{\beta X}$ (что легко следует из построения множества H_x), то $Fr_X H_x = \overline{H}_x^X \setminus H_x = (\overline{Vx}^{\beta X} \setminus \{x\}) \setminus (Vx \setminus \{x\}) = \overline{V}x^{\beta X} \setminus Vx = Fr_{\beta X} Vx$, т. е. $Fr_{\beta X} Vx \subset X$. Теперь, рассуждая как в доказательстве теоремы 2.3 (п. А)), получим, что $\mathscr{H}$ — звезда в X, а так как любые два дизъюнктные нуль-множества в X имеют дизъюнктные замыкания в βX, то снова, как в доказательстве теоремы 2.3 (п. А)), можем показать, что $\mathscr{H}$ — β-звезда в X.

Б). Пусть $\mathscr{H}$ — β-звезда мощности τ в пространстве X. Так как βX — совершенное бикомпактное расширение пространства X (см. [7]), то, как и в доказательстве предложения 1.3, получим, что $\{H_\alpha^\beta : \alpha \in A\}$ — дизъюнктное семейство непустых открытых в $\beta X \setminus X$ множеств. Докажем теперь, что $|H_\alpha^\beta| = 1$, для любого $\alpha\in A$. Действительно, допустим, что существует $\alpha\in A$, такое, что $|H_\alpha^\beta|>1$. Тогда существуют хотя бы две различные точки x и y в H_α^β и существуют открытые в βX множества Ox и Oy и непрерывные функции $f, g\colon \beta X\to[0, 1]$ такие, что $x\in Ox\subset ExH_\alpha$, $y\in Oy\subset ExH_\alpha$, $Ox\cap Oy=\emptyset$, $f(x)=0$, $f(\beta X\setminus Ox)=1$, $g(y)=0$, $g(\beta X\setminus Oy)=1$. Пусть $Z_x'=f^{-1}([0, 1/2])$, $Z_y'=g^{-1}([0, 1/2])$ и $Z_x=Z_x'\cap X$, $Z_y=Z_y'\cap X$. Тогда Z_x, Z_y — дизъюнктные нуль-множества в пространстве X, $Z_x\cup Z_y\subset H_\alpha$, $x\in\overline{Z}_x^{\beta X}$ и $y\in\overline{Z}_y^{\beta X}$. Следовательно, и Z_x, и Z_y небикомпактны. Получаем противоречие с определением β-звезды. Следовательно, $|H_\alpha^\beta|=1$, для любого $\alpha\in A$, а тогда $J=\{H_\alpha^\beta : \alpha\in A\}$ — подмножество пространства $\beta X\setminus X$, состоящее из изолированных в $\beta X\setminus X$ точек и $|J|=\tau$.

5.3. Определение. *Семейство $\mathscr{H}$ подмножеств пространства X называется CG-семейством, если оно квазидизъюнктно и состоит из конуль-множеств в X, содержащих небикомпактных нуль-множеств (т. е. $\mathscr{H}$ удовлетворяет условия б) — г) теоремы 0.1 Комфорта и Гордона).*

5.4. Определение. *Если $\mathscr{H}$ — CG - семейство (β-звезда) в пространстве X, то будем называть $\mathscr{H}$ максимальным CG-семейством (максимальной β-звездой) в X, если для любого CG-семейства (для любой β-звезды) $\mathfrak{F}$ в X, такое (такая), что $\mathfrak{F}\supset\mathscr{H}$, следует, что $\mathfrak{F}=\mathscr{H}$.*

5.5. Теорема. *Мощность множества $I(\beta X\setminus X)$ равна τ тогда и только тогда, когда в X имеется максимальная β-звезда мощности τ.*

Доказательство. Теорема 5.5 получается из теоремы 5.2 в точности также, как теорема 2.5 была получена из теоремы 2.3.

5.6. Следствие. *Любые две максимальные β-звезды в пространстве X имеют одинаковую мощность.*

5.7. Теорема. *Множество $I(\beta X\setminus X)$ всюду плотно в пространстве $\beta X\setminus X$ и имеет мощности τ тогда и только тогда, когда в пространстве X имеется β-звезда мощности τ, являющаяся максимальным CG-семейством в X.*

Доказательство. А). Обозначим через I_β множество $I(\beta X\setminus X)$ и пусть $|I_\beta|=\tau$ и $\overline{I}_\beta^{\beta X\setminus X}=\beta X\setminus X$. Построим CG-семейство мощности τ в пространстве X, следуя построению Комфорта и Гордона из [9] при доказательстве теоремы 0.1, и покажем, что оно является максимальным CG-семейством в X и, кроме того, β-звездой в X.

Для любого $x\in I_\beta$ выберем открытое в βX множество Ux такое, что $x\in Ux\subset\beta X\setminus\overline{R(X)}^{\beta X}$ и $Ux\cap X^\beta=\{x\}$. Пусть $f_x\colon \beta X\to[0, 1]$ — непрерывная функция, такая, что $f_x(x)=1$ и $f_x(\beta X\setminus U)=0$. Пусть $Vx=\{y\in\beta X : f_x(y)>1/2\}$, $H_x=Vx\cap X$ и $Z_x=\{y\in X : f_x(y)\geq 2/3\}$. Очевидно, $x\in Vx\subset\overline{V}_x^{\beta X}\subset Ux$, H_x — конуль-множество в пространстве X, Z_x — нуль-множество в пространстве X и $Z_x\subset H_x$. Так как $x\in\overline{Z}_x^{\beta X}$, то Z_x — небикомпактно. Теперь, рассуждая как в п. А) доказательства теоремы 5.2, мы можем показать, что семейство $\mathscr{H}=\{H_x : x\in I_\beta\}$ — β-звезда в пространстве X. В частности, мы получаем, что семейство $\mathscr{H}$ квазидизъюнктно. Следовательно, $\mathscr{H}$ — CG-семейство мощности τ в X. Максимальность CG-семейства $\mathscr{H}$ доказывается по образцу доказательства п. А) теоремы 2.8, только роль предложения 1.3 в том доказательстве будет теперь играть теорема 0.1.

Б). Пусть $\mathscr{H}=\{H_\alpha : \alpha\in A\}$ — β-звезда мощности τ в пространстве X, являющаяся максимальным CG-семейством в X. Как и в доказательстве п. Б) теоремы 5.2 получаем, что $|H_\alpha^\beta|=1$, для любого $\alpha\in A$. Обозначим теперь через x_α множество H_α^β и пусть $J=\{x_\alpha : \alpha\in A\}$. Тогда $J\subset I(\beta X\setminus X)$. Покажем, что $\overline{J}^{\beta X\setminus X}=\beta X\setminus X$. Действительно, если существует открытое в $\beta X\setminus X$ множество V, такое, что $V\cap J=\emptyset$, то, как и в п. А), мы можем построить конуль-множество Φ в X, так чтобы $\Phi_\beta\subset V$ и семейство $\mathfrak{F}=\mathscr{H}\cup\{\Phi\}$ было CG-семейством.

Так как $\mathfrak{F} \neq \mathscr{H}$, то получаем противоречие с максимальностью CG-семейства $\mathscr{H}$. Следовательно, $\overline{J}^{\beta X \setminus X} = \beta X \setminus X$, а тогда $J = I(\beta X \setminus X)$ и теорема доказана.

5.8. Следствие. *Если в пространстве X имеется β-звезда мощности τ, являющаяся максимальным CG-семейством в X, то $d(\beta X \setminus X) = \tau$.*

6. О мощности и дискретности стоун-чеховского нароста.

6.1. Если $\mathscr{H}$ — β-звезда в пространстве X, являющаяся совершенной (M-совершенной) звездой в X, то будем говорить просто, что $\mathscr{H}$ — совершенная β-звезда (M-совершенная β-звезда) в X.

Теорема. *Пространство $\beta X \setminus X$ дискретно и имеет мощность τ тогда и только тогда, когда пространство X — R-периферически бикомпактно и в X имеется совершенная β-звезда мощности τ.*

Доказательство. А). Пусть $\beta X \setminus X$ — дискретное пространство мощности τ. Тогда из предложения 3.4 следует, что пространство X — R-периферически бикомпактно, а из теоремы 5.2 получаем, что в пространстве X имеется β-звезда $\mathscr{H} = \{H_x : x \in \beta X \setminus X\}$ мощности τ. Так как βX — совершенное бикомпактное расширение пространства X (см. [7]), то как и в доказательстве п. А) теоремы 4.12, мы можем показать, что $\mathscr{H}$ — совершенная звезда в X. Следовательно, $\mathscr{H}$ — совершенная β-звезда мощности τ в пространстве X.

Б). Пусть X — R-периферически бикомпактное пространство и $\mathscr{H} = \{H_\alpha : \alpha \in A\}$ — совершенная β-звезда мощности τ в X. Тогда, как и в п. Б) доказательства теоремы 5.2, получаем, что $|H^\beta_\alpha| = 1$, для любого $\alpha \in A$. Если обозначим через x_α множество H^β_α, то получим, что множество $J = \{x_\alpha : \alpha \in A\}$ состоит из изолированных в $\beta X \setminus X$ точек и имеет мощность τ. Пусть $Z = J \cup X$. Покажем, что Z — бикомпакт, чем теорема 6.1 и будет доказана.

Так как X — R-периферически бикомпактное пространство, то из предложения 4.10 и, рассуждая как в доказательстве п. Б) теоремы 4.12, можем показать что для любой открытой в βX окрестности O множества $R(X)$, множества $J \setminus O$ и $A_{O \cap X} = \{\alpha \in A : \overline{H}^X_\alpha \setminus (O \cap X)$ — небикомпактно$\}$ — конечны. Пусть теперь ω — открытое покрытие пространства Z. Так как $R(X)$ — бикомпакт (ведь $R(X) \subset X \setminus \cup \mathscr{H}$), то существует конечное подсемейство ω_R семейства ω, которое покрывает множества $R(X)$. Пусть $O' = \cup \omega_R$, O'' — открытая в X окрестность множества $R(X)$ с бикомпактной границей, такая, что $O'' \subset O' \cap X$. Пусть, далее, $O = O' \cap Ex_Z O''$ и $O_1 = ExO$. Тогда $J \setminus O = J \setminus O_1$ и $A_{O \cap X} = A_{O_1 \cap X}$. Следовательно, множества $J \setminus O$ и $A_{O \cap X}$ — конечны. Пусть $J \setminus O = \{x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}\}$ и пусть $U_1, \ldots, U_n$ — такие элементы покрытия ω, что $x_{\alpha_i} \in U_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Существуют открытые в βX множества U'_i такие, что $U'_i \cap Z = U_i$, для $i = 1, \ldots, n$. Существуют также открытые в βX множества V_{α_i}, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $x_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i} \subset \overline{V}^{\beta X}_{\alpha_i} \subset U'_i \cap ExH_{\alpha_i}$ и $Fr_{\beta X} V_{\alpha_i} \subset X$ (см. п. А) доказательства теоремы 5.2). Положим теперь $\Phi_{\alpha_i} = V_{\alpha_i} \cap X$, для $i = 1, \ldots, n$. Как было показано в п. Б) доказательства теоремы 4.12, $\{\alpha_i : i = 1, \ldots, n\} \subset A_{O \cap X}$, но верно также, что если $x_\alpha \in J \cap O$, то $\alpha \notin A_{O \cap X}$ (так как в этом случае $\overline{H}^X_\alpha \setminus (O \cap X) = \overline{H}^{\beta X}_\alpha \setminus O_1$). Следовательно, $A_{O \cap X} = \{\alpha_i : i = 1, \ldots, n\}$. Теперь положим $\Phi_\alpha = O \cap H_\alpha$, для $\alpha \in A \setminus A_{O \cap X}$. Очевидно, семейство $\mathfrak{F} = \{\Phi_\alpha : \alpha \in A\}$ является звездой в X и $\mathfrak{F} \overset{c}{\succ} \mathscr{H}$. Следовательно, множество $X \setminus \cup \mathfrak{F}$ бикомпактно. Существует конечное подсемейство $\omega_{\mathfrak{F}}$ покрытия ω, которое покрывает $X \setminus \cup \mathfrak{F}$. Так как $Z = (X \setminus \cup \mathfrak{F}) \cup O \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i = \cup \omega_{\mathfrak{F}} \cup \cup \omega_R \cup \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, то $\omega' = \omega_{\mathfrak{F}} \cup \omega_R \cup \{U_i : i = 1, \ldots, n\}$. — конечное подпокрытие покрытия ω. Следовательно, Z — бикомпактное пространство, и значит $Z = \beta X$, а тогда $J = \beta X \setminus X$.

6.2. Из теорема 6.1 и 5.5 сразу получаем такое утверждение:

Предложение. *Любая совершенная β-звезда в R-периферически бикомпактном пространстве X является максимальной β-звездой.*

6.3. Теорема. *Пусть $\tau \leqq \aleph_0$. Тогда следующие условия эквивалентны: а) $\beta X \setminus X$ — дискретно и имеет мощность, равную τ; б) X — периферически бикомпактно и имеет M-совершенную β-звезду мощности τ; в) X — периферически бикомпактно, имеет M-совершенную звезду мощности τ и $\beta X \sim FX$ (т. е. расширения βX и FX — эквивалентны).*

Доказательство. Теорема следует непосредственно из предложения 4.8, теорем 6.1 и 4.13, теоремы П. С. Александрова и В. И. Пономарева [1] о том, что пространство X периферически бикомпактно тогда и только тогда, когда имеет бикомпактное расширение с нульмерно расположенным наростом, и следующего утверждения, доказанного А. К. Штейнером и Е. Ф. Штейнером [20]: если пространство X имеет бикомпактное расширение cX, такое, что $|cX \setminus X| < 2^{\aleph_0}$ то $cX \setminus X$ — нульмерно расположено в пространстве cX.

6.4. В связи с теоремой 6.3 отметим следующее утверждение, которое получается непосредственно при помощи результата А. К. Штейнера и Е. Ф. Штейнера [20] о том, когда два бикомпактных расширения Уолменовского типа сравнимы и теорем О. Ньоесштада [19], утверждающих, что βX и FX являются расширениями Уолменовского типа (о βX см. также [13]):

Предложение. *Если X — периферически бикомпактное пространство, то бикомпактные расширения Фрейденталя и Стоуна—Чеха пространства X эквивалентны тогда и только тогда, когда любые два дизъюнктные нуль-множества в X содержатся в дизъюнктных замкнутых в X множеств с бикомпактными границами.*

6.5. Замечание. Из теоремы 6.3 при $\tau = n$, где n — натуральное число, при помощи замечания 4.11 и предложения 6.4 легко получаем условия теоремы П. Фирби из [11] о конечных стоун-чеховских наростах.

Теорема (П. Фирби). $|\beta X \setminus X| = n$ *(где n—натуральное число) тогда и только тогда, когда пространство X локально бикомпактно и в нем существуют n-замкнутые небикомпактные попарно функционально отделимые множества, но не существует такое семейство, состоящее из $n+1$ множеств.*

Очевидно, эта теорема обобщает следующую теорему Э. Хьюитта [15]:

Теорема (Э. Хьюитт). $|\beta X \setminus X| = 1$ *тогда и только тогда, когда пространство X—локально бикомпактно и из любых двух функционально отделимых замкнутых подмножеств пространства X хотя бы одно бикомпактно.*

6.6. Предложение. *Если в пространстве X имеется M-совершенная β-звезда, то пространство X—псевдокомпактно.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H} = \{H_\alpha : \alpha \in A\}$ — M-совершенная β-звезда в пространстве X. Допустим, что X не является псевдокомпактным пространством. Тогда существует C-вложенное подмножество M пространства X, такое, что M гомеоморфно пространству N с дискретной топологией (см., напр. [13]). Известно, что тогда M является замкнутым подмножеством пространства X. Следовательно, $M \cap (\cup \mathfrak{F}) \neq \varnothing$ и $|M \setminus \cup \mathfrak{F}| < \aleph_0$, для любой звезды $\mathfrak{F}$, комбинаторно вписанной в $\mathscr{H}$. Если $|M \cap H_\alpha| < \aleph_0$, для любого $\alpha \in A$, то, полагая $\Phi_\alpha = H_\alpha \setminus M$, мы получим звезду $\mathfrak{F} = \{\Phi_\alpha : \alpha \in A\}$, комбинаторно вписанную в $\mathscr{H}$. Но так как теперь $M \cap (\cup \mathfrak{F}) = \varnothing$, то мы получим противоречие со сказанным выше. Следовательно, существует $\alpha_0 \in A$, такое, что $|M \cap H_{\alpha_0}| = \aleph_0$. Тогда множество $M' = M \cap H_{\alpha_0}$ — C-вложено в пространстве X. Так как FrH_{α_0} — бикомпакт, то существует нуль-множество Z в X, такое, что $M' \subset Z \subset H_{\alpha_0}$. Пусть $M' = M_1 \cup M_2$, где $|M_1| = |M_2| = \aleph_0$ и $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. Пусть $\varphi : M' \to \mathsf{R}$ определена так: $\varphi(M_1) = 0$ и $\varphi(M_2) = 1$. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to \mathsf{R}$, такая, что $f|_{M'} = \varphi$. Пусть $Z'_1 = f^{-1}(0)$, $Z'_2 = f^{-1}(1)$ и $Z_i = Z \cap Z'_i$, $i = 1, 2$.

Тогда $M_i \subset Z_i \subset H_{\alpha_0}$, для $i=1, 2$, $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ и Z_1, Z_2 — небикомпактные нуль-множества в X. Получаем противоречие с определением β-звезды. Следовательно, пространство X псевдокомпактно.

6.7. Из теоремы 6.1 и предложений 4.5 и 6.6 сразу получаем такое утверждение:

Следствие. *Если $\beta X \setminus X$ — дискретное пространство, то пространство X псевдокомпактно.*

6.8. Следствие. *Пусть X — функционально замкнутое (realcompact) небикомпактное пространство. Тогда пространство $\beta X \setminus X$ недискретно.*

6.9. Следствие. *Если X — метризуемое небикомпактное пространство, то пространство $\beta X \setminus X$ — недискретно.*

6.10. Предложение. *Если $|\mathscr{L}(X)| \leqq \aleph_0$ то пространство $\beta X \setminus X$ — недискретно.*

Доказательство. Допустим, что пространство $\beta X \setminus X$ дискретно. Тогда $R(X)$ будет бикомпактным подмножеством пространства βX, и, следовательно, любая точка $x \in \beta X \setminus X$ будет G_δ-множеством в βX (так как $|\mathscr{L}(X)| \leqq \aleph_0$), что невозможно (см., напр. [2]). Следовательно, пространство $\beta X \setminus X$ недискретно.

6.11. Отметим, в связи с теоремами 6.1 и 6.3 и с предложением 6.4 об условиях, при которых расширения βX и FX эквивалентны, следующее предложение:

Предложение. *Если $\mathscr{H}$ — M-совершенная звезда в пространстве X, то X периферически бикомпактно тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:*

(*) *для любой точки $x \in R(X)$ и для любой ее открытой окрестности Ox существует открытое множество Vx, такое, что $x \in Vx \subset Ox$ и $\overline{H} \cap FrVx$ — бикомпактно для любого $H \in \mathscr{H}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H} = \{H_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — M-совершенная звезда в пространстве X и пусть выполнено условие (*). Покажем, что X — периферически бикомпактное пространство.

Пусть $x \in R(X)$, Ox — открытая окрестность точки x и Vx — то открытое подмножество пространства X, которое существует согласно условию (*). Покажем что $FrVx$ — бикомпакт.

Для любого $\alpha \in A$ имеем: $\overline{H}_\alpha \subset (\overline{H}_\alpha \cap \overline{V}_x) \cup \overline{H_\alpha \setminus \overline{V}x} \subset \overline{H_\alpha \cap Vx} \cap \overline{H_\alpha \setminus \overline{V}x} \cup FrH^\alpha \cup (\overline{H}_\alpha \cap FrVx)$. Следовательно, хотя бы одно из множеств $\overline{H_\alpha \setminus \overline{V}_x}$ и $\overline{H_\alpha \cup Vx}$ небикомпактно, так как множество $\overline{H}_\alpha$ небикомпактно. Далее, $Fr(H_\alpha \cap Vx) = \overline{H_\alpha \cap Vx} \setminus (H_\alpha \cap Vx) \subset (FrH_\alpha) \cup (\overline{H}_\alpha \cap FrVx)$, т. е. $Fr(H_\alpha \cap Ux)$ — бикомпакт. Кроме того, $Fr(H_\alpha \setminus \overline{V}x) = \overline{H_\alpha \setminus Vx} \setminus (H_\alpha \setminus \overline{V}x) \subset ((\overline{H}_\alpha \cap \overline{X \setminus \overline{V}x}) \setminus H_\alpha) \cup (\overline{H}_\alpha \cap \overline{X \setminus \overline{V}x} \cap \overline{V}x) \subset Fr(H_\alpha) \cap (\overline{H}_\alpha \cap Fr\overline{V}x) \subset FrH_\alpha) \cup (\overline{H}_\alpha \cap FrVx)$ и, следовательно, и $Fr(\overline{H}_\alpha \setminus Vx)$ бикомпактно. Положим теперь $\Phi_\alpha = H_\alpha \cap Vx$, если $\overline{H_\alpha \cap V_x}$ небикомпактно и $\Phi_\alpha = H_\alpha \setminus \overline{V}_x$, если множество $\overline{H_\alpha \setminus \overline{V}x}$ небикомпактно. Тогда $\mathfrak{F} = \{\Phi_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — звезда в X и $\mathfrak{F} \overset{c}{\prec} \mathscr{H}$. Следовательно, множество $X \setminus \cup \Phi$ бикомпактно. Но $\Phi_\alpha \cap FrVx = \Phi_\alpha \cap \overline{V}x \cap (X \setminus Vx) = \varnothing$, для любого $\alpha \in A$, т. е. $FrVx \subset X \setminus \cup \mathfrak{F}$, а тогда $FrVx$ — бикомпакт. Следовательно, пространство X периферически бикомпактно.

Пусть теперь, наоборот, пространство X периферически бикомпактно. Тогда, очевидно, условие (*) выполнено.

Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров, В. И. Пономарев. О бикомпактных расширениях топологических пространств. *Вестник МГУ, сер. матем.*, 1959, **5**, 93—108.
2. А. В. Архангельский, В. И. Понамарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., 1974.
3. Г. Д. Димов. Бикомпактные расширения с дискретным наростом. *Доклады БАН*, **30**, 1977, 797—800.
4. Г. Д. Димов. О бикомпактных расширениях периферически бикомпактных пространств с наростами специального вида. *Плиска*, **6**, 1983, 3—18.
5. Г. Д. Димов. Диссертация. София, 1977.
6. Дж. Л. Келли. Общая топология. М., 1981.
7. Е. Г. Скляренко. Некоторые вопросы теории бикомпактных расширений. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **26**, 1962, 427—452.
8. Ю. М. Смирнов. О пространствах близости. *Матем. сб.*, **31**, 1952, 543—576.
9. W. W. Comfort, H. Gordon. Disjoint open subsets of $\beta X \setminus X$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **111**, 1964, 513-520.
10. R. Engelking. General Topology. Warszawa, 1977.
11. P. A. Firby. Finiteness at infinity. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **17**, 1971, 299-304.
12. H. Freudenthal. Kompaktisierungen und Bikompaktisierungen. *Indag. Math.*, **13**, 1951, 184—192.
13. L. Gillman, M. Jerison. Rings of Continuous Functions. New York, 1960.
14. M. Henriksen, J. R. Isbell. Some properties of compactifications. *Duke Math. J.*, **25**, 1958, 83-106.
15. E. Hewitt. Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem. *Duke Math. J.*, **14**, 1947, 419-427.
16. T. Hoshina. Compactifications by adding a countable number of points. *Proc. Forth Prague Topol.* Symposium, 1976.
17 K. D. Magill. *N*-point compactifications. *Amer. Math Monthly*, **72**, 1965, 1075-1081.
18. K. Morita. On bicompactifications of semibicompact spaces. *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Sect. A*, **4**, 1952, 200-207.
19. O. Njastad. On Wallman-type compactifications. *Math. Zeitschr.*, **91**, 1966, 267-276.
20. A. K. Steiner, E. F. Steiner. Wallman and Z-compactifications. *Duke Math. J.*, **35**, 1968, 269-276.
21. A. Tarski. Sur la decomposition des ensembles en sousensembles presque disjoints. *Fund. Math.* **12**, 1928, 188-205.

Поступила 17. 12. 1984

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373