Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

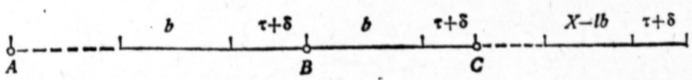
МИНИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕНИ БЛОКИРОВКИ ПРИ ОБСЛУЖИВАНИИ НЕНАДЕЖНЫМ УСТРОЙСТВОМ С НЕЯВНЫМИ ОТКАЗАМИ

П. Г. ПЕТРОВ, Н. В. КОЛЕВ

Для системы массового обслуживания ненадежным устройством с неявными отказами получены среднее время блокировки и оптимальный график проведения тестов для выявления отказов.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается система массового обслуживания с ненадежным обслуживающим устройством (ОУ). Устройство дает сбои, появление которых можно констатировать только при выполнении подходящего теста. Примером такого устройства является ЭВМ. Работа регистров и других блоков как правило проверяется запуском специализированного инженерного теста во время профилактики. Понятно, что если тест покажет наличие сбоя, надо повторить задачи, во время выполнения которых может произойти сбой устройства — это все задачи, которые выполнялись после последнего контрольного теста. Видно, что вводя подходящее расписание проведения тестов можно съэкономить время, ушедшее на ненадежное обслуживание заказов. В работе рассмотрена следующая дисциплина (D_0) обслуживания (см. фиг. 1): С начального момента (A) обслуживания через равные отрезки (b) времени проводится тест (продолжительность выполнения теста равна τ) для выявления неявных сбоев; перед этим копируется достигнутое состояние системы и обслуживания (на это уходит время δ). Если тест показывает отсутствие сбоя, работа системы продолжается от достигнутого состояния (C), а при наличии сбоя, работа системы начинается с последнего удачно скопированного состояния (B), а не с начала обслуживания заказа, что назовем дисциплиной D_1. Предполагается что во время проведения теста и копирования сбой невозможен.

Время τ и время δ являются соответственно характеристиками теста и системы обслуживания — т. е. они заданы заранее. Дисциплиной обслуживания можно управлять подходящим выбором параметра b. В настоящей работе b выбирается так, чтобы среднее время блокировки было минимальным.



Фиг. 1

2. Обозначения. Пусть X — время обслуживания заказа при условии, что устройство не дает сбой (необходимое чистое время обслуживания и пусть $P(X<t) = B(t)$). Функцию распределения потока сбоев предположим равной $F(t) = 1-e^{-\alpha t}$ — это распределение отрезков времени между двумя последовательными сбоями (ин-

тенсивность отказов постоянна и равна α). Для дисциплины D_0 обозначим через $ET(X,\ b,\ \theta)$, $\theta=\tau+\delta$ среднее время блокировки. Пусть $ET(X,\ \theta)$ — среднее время блокировки для дисциплины D_1.

Рассматриваются две модели:

Модель 1: Суммарное время для теста и копирование равно постоянной величине: $\tau+\delta=\theta=\text{const}$.

Модель 2: На i-ый тест и копирование ОУ теряет время θ_i, $i=1,\ 2,\dots,\ l+1$, где $l=[X/b]$, а θ_i независимые и одинаково распределенные случайные величины.

Постановка задачи: Найти такое b_0, чтобы

$$ET(X,\ b_0,\ \theta)=\inf_b ET(X,\ b,\ \theta).$$

3. Случай $X=\text{const}$. Вероятность провести m повторных обслуживаний за время X равна

$$P_m=(m+1)(1-e^{-\alpha X})^m e^{-\alpha X},\quad m=0,\ 1,\ 2,\dots.$$

Тогда

$$ET(X,\ \theta)=\sum_{m=0}^{\infty}(X+\theta)(m+1)(1-e^{-\alpha X})^m e^{-\alpha X}. \tag{1}$$

Так как $X=\underbrace{b+b+\dots+b}_{l\text{ раз}}+X-lb$, то

$$ET(X,\ b,\ \theta)=lET(b,\ \theta)+ET(X-lb,\ \theta).$$

Отсюда, учитывая (1), получаем для модели 1:

$$ET(X,\ b,\ \theta)=l(b+\theta)e^{\alpha b}+(X-lb+\theta)^{\alpha(X-lb)}; \tag{2}$$

для модели 2:

$$ET(X,\ b,\theta)=\sum_{i=1}^{l}E(b+\theta_i)e^{\alpha b}+E(X-lb+\theta_{l+1})\,e^{\alpha(X-lb)}. \tag{3}$$

Заметим, что имеет смысл следовать дисциплине D_0, только если

$$ET(X,\ b,\ \theta)<ET(X,\ \theta),$$

которое, например, для модели 1 ведет к неравенству:

$$X\geq\frac{1}{\alpha}\left(\frac{le^{\alpha b}(\tau+\delta)}{\tau\alpha lb-\delta}-1\right)+lb.$$

Чтобы найти оптимальное значение b для модели 2, нужно решить относительно b следующее уравнение:

$$E\sum_{i=1}^{l}(1+\alpha b+\theta_i\alpha)\,e^{\alpha b}-Ee^{\alpha(X-lb)}\left((X+\theta_{l+1})\,\alpha l-\alpha l^2 b\right)=0.$$

(Для модели 1 уравнение получается заменой $\theta_i=\theta$).

Пусть $t_l=\lim\limits_{b\downarrow X/(l+1)} ET(X,\ b,\ \theta)$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых постоянных X и α, и θ — постоянное или случайное, выполнены:*

1) *Существует единственное конечное l_0, такое, что*

$$\inf_b ET(X,\ b,\ \theta)=\inf_l t_l=t_{l_0}.$$

2) *Оптимальный отрезок* b_0 *между двумя последовательными тестами задается формулой* $b_0 = X/(l_0+1)$.

Доказательство этой теоремы проводится методами, использованными в работе [1].

4. Случай, когда X сл. в. с заданной ф. р. $B(t)$. Среднее время блокировки $T(b)$ получается интегрированием:

$$T(b) = \int_0^\infty ET(X, b, \theta) dB(t),$$

где $ET(X, b, \theta)$ задано формулами (2) или (3).

Если $B(t)$ непрерывная функция, тогда для модели 1:

$$T(b) = e^{\alpha b}(b+\theta) \sum_{m=0}^{\infty} \int_{mb}^{(m+1)b} m\, dB(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{mb}^{(m+1)b} (t-mb+\theta)\, e^{\alpha(t-mb)}\, dB(t), \tag{4}$$

для модели 2:

$$T(b) = e^{\alpha b} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{mb}^{(m+1)b} \sum_{i=1}^{m} E(b+\theta_i) dB(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{mb}^{(m+1)b} E(t-mb+\theta_{m+1}) e^{\alpha(t-mb)}\, dB(t). \tag{5}$$

Если X имеет дискретное распределение и $P(X=x_i) = p_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, то для модели 1:

$$T(b) = e^{\alpha b}(b+\theta) \sum_{m=0}^{\infty} m \sum_{i\,:\, mb \leqq x_i < (m+1)b} p_i + \sum_{m=0}^{\infty} (\theta - mb) e^{-\alpha m b} \sum_{i\,:\, mb \leqq x_i < (m+1)b} p_i x_i e^{\alpha x_i}, \tag{6}$$

а для модели 2:

$$T(b) = e^{\alpha b} \sum_{m=0}^{\infty} E(b+\theta_i) \sum_{i\,:\, mb \leqq x_i < (m+1)b} p_i + \sum_{m=0}^{\infty} E(\theta_{m+1} - mb) e^{-\alpha m b} \sum_{i\,:\, mb \leqq x_i < (m+1)b} p_i x_i e^{\alpha x_i} \tag{7}$$

Для $B(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $EX = 1/\lambda$, $\lambda > 0$ формула (4) принимает вид

$$T(b) = e^{\alpha b}(b+\theta) \sum_{m=0}^{\infty} \int_{mb}^{(m+1)b} m\lambda e^{-\lambda t}\, dt + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{mb}^{(m+1)b} (t-mb+\theta) e^{\alpha(t-mb)} \lambda e^{-\lambda t}\, dt,$$

т. е.

$$T(b) = \frac{e^{\alpha b}(b+0)}{1-e^{-\lambda b}} + \frac{\lambda e^{(\alpha-\lambda)b}}{(\alpha-\lambda)(1-e^{-\lambda b})} \left(\theta + b - \frac{1}{\alpha-\lambda}\right), \quad \text{для } \alpha \neq \lambda, \tag{8}$$

$$T(b) = \frac{\alpha\theta(e^{\alpha b} + \alpha b) + 2be^{\alpha b} + \alpha b^2}{2(1-e^{-\alpha b})}, \quad \text{для } \alpha = \lambda. \tag{9}$$

Из последних двух выражений видно, что:

1) если $\alpha = \lambda$ при $b \to \infty$, $T(b)$ растет неограниченно;

2) если $\alpha > \lambda$ или $\alpha < \lambda$, всегда выгодно следовать дисциплине D_0.

Пусть $T(b)$ задано формулой (8) и выполнено

$$T(b_0) = \inf_b T(b). \tag{10}$$

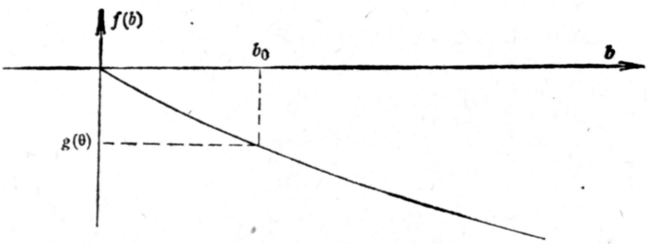
Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Существует единственное b_0, для которого выполнено* (10).

Доказательство. Уравнение $\frac{dT(b)}{db}=0$ можно привести к виду $f(b)=g(\theta)$, где

$$f(b)=\left(\frac{\lambda(\alpha\theta\,(\alpha-\lambda)\,-\lambda)}{(\alpha-\lambda)^2}+\frac{\alpha\lambda}{\alpha-\lambda}\,b\right)e^{(\alpha-\lambda)b}-(1+\alpha\theta+\alpha b)e^{(\alpha+\lambda)b}+(1+\alpha\theta+\alpha b)e^{\alpha b}, \tag{11}$$

а $g(\theta)=\frac{\lambda^2(\theta(\alpha-\lambda)-1)}{(\alpha-\lambda)^2}=\text{const}$.



Фиг. 2

На вопрос о единственности решения уравнения $f(b)=g(\theta)$, ответ дает следующее утверждение.

Лемма. *Уравнение $f(b)=g(\theta)$ имеет всегда единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $\alpha<\lambda$.

При $b=0$ из (11) получаем

$$f(\theta)=\frac{\lambda(\alpha\theta(\alpha-\lambda)-\lambda)}{(\alpha-\lambda)^2}.$$

Очевидно $f(0)<0$, а $g(\theta)<f(0)$ (это неравенство эквивалентно тому, что $\theta(\alpha-\lambda)^2>0$) Следовательно, $g(\theta)<f(0)<0$. Кроме того $f(b)$ — строго убывающая функция, так как $\frac{df(b)}{db}<0$ и $f(b)\underset{b\to\infty}{\to}-\infty$, т. е. она имеет вид, указанный на фиг. 2.

Таблица 1

	0,050	0,075	0,100	1,125	0,150	0,175	0,200	с,225	0,250	0,275	0,300
0	225	155	119	97	82	71	63	56	51	47	43
1	326	278	208	168	140	119	104	93	87	77	71
2	409	317	242	200	167	146	128	113	101	92	86
3	603	518	389	311	259	222	196	175	159	142	130
4	671	446	331	309	254	219	194	174	154	134	129
5	791	530	407	326	307	262	232	205	184	169	157
6	888	594	447	356	300	297	255	227	207	192	171
7	1324	814	723	495	482	414	364	321	289	265	261
8	1117	784	586	478	397	343	298	284	257	235	212
9	1218	808	638	503	418	363	313	288	287	258	238
10	1322	921	695	541	453	398	343	310	283	281	259

Из этих рассуждений очевидна единственность решения уравнения $f(b)=g(\theta)$ в случае когда $\alpha<\lambda$. Доказательство леммы для остальных случаев аналогично.

5. Пример. Для заданных α, $\theta=\delta+\tau$ и заданного значения l, полученные результаты позволяют найти максимальное значение X, для которого при оптимальном выборе отрезка b проводится ровно l раз контроль-тестов.

В табл. 1 указаны значения для X при $\tau=1$, $\delta=0.2$, $\alpha=0.05+(k-1)\,0.025$, $k=1, 2, \ldots, 11$. Из этой таблицы по заданному X сразу определяются b_0 и l.

Полученные результаты можно обобщить, выбирая другие функционалы, например, строя ценовые функционалы, подобно постановкам в работе [1]. По существу это меняет только тип экстремальной задачи. Сама эта задача даже для простейшего случая (4)—(7) решается численными методами, а подсчет функционала — задача чисто техническая.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. N. Dimitrov, P. G. Petrov. Controlled process wtth breakdown and repeat actions. *Pliska*, 7, 1984, 102—108.

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. Я. 373*

Центральная лаборатория биоприборостроения
и автоматизации
София

Поступила 19. 3. 1985 г.