Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ И НЕКОТОРЫЕ СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, I.

ВЛАДИМИР Л. ЧАКАЛОВ

В настоящей работе рассматриваются конечномерные пространства X-непрерывных функций $x: T \to E$, где T — компактное топологическое пространство, а E — действительное или комплексное (вместе с E) нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_E$. В X вводится норма $\|x\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|_E$. Основным результатом является теорема 1, описывающая свойства экстремальных элементов пространства X (элемент $x' \in X$, $x' \neq 0$ называется экстремальным относительно функционала $l \in X^*$, $l \neq 0$, если $(x') = \|l\| \, \|x'\|$). В качестве следствия дается простое (импульсное) решение $\mathscr{L}$-проблемы А. А. Маркова для общих нормированных пространств. Отметим, наконец, что теорема 1 уточняет теоремы 2 и 2′ работы [1].

Здесь мы дадим без доказательств некоторые известные факты теории выпуклых тел в конечномерных пространствах. На этих фактах и на теореме Крейна — Мильмана основывается доказательство теоремы 1.

1. Сначала отметим, что если $p, q \in R^n$, то через (p/q) будем обозначать скалярное произведение радиус-векторов точек p, q.

Как хорошо известно, гиперплоскостью называют множество всех точек $\xi \in R^n$, удовлетворяющих условию $(a/\xi) = \alpha$ при заданных $a \in R^n$ и $\alpha \in R^1$. Гиперплоскость делит пространство R^n на два открытых полупространства: для точек x одного из них $(a/x) > \alpha$, для точек другого $(a/x) < \alpha$. Присоединив к открытому полупространству точки гиперплоскости, получим замкнутое полупространство.

Если некоторое множество $M \subset R^n$ принадлежит замкнутому полупространству, а другое множество $N \subset R^n$ не принадлежит (т. е. лежит во втором, открытом полупространстве), то будем говорить, что гиперплоскость отделяет M от N.

Пусть N состоит из одной точки l. Очевидно, что в этом случае l является неотделимой точкой от M, если всегда из неравенства $(a/x) \geq \beta$ (где $a \in R^n$, $\beta \in R^1$, а x пробегает элементы множества M) следует неравенство $(a/l) \geq \beta$.

Будем говорить, что гиперплоскость $(a/\xi) = \alpha$ разделяет точки множества $M \subset R^n$, если существуют точки $x_1, x_2 \in M$, для которых $(a/x_1) > \alpha$ и $(a/x_2) < \alpha$.

Как известно, множество $C \subset R^n$ называется выпуклым, если из $c_1, c_2 \in C$ и $0 < \lambda < 1$ следует, что $\lambda c_1 + (1-\lambda) c_2 \in C$. То же самое определение имеет место для любого действительного или комплексного линейного пространства.

Основной аппарат теории выпуклых тел в конечномерных пространствах содержится в следующих хорошо известных теоремах.

Теорема отделимости (Г. Минковский). *Если $M \subset R^n$ — выпуклое замкнутое множество, а $l \in R^n$ — неотделимая от M точка, то $l \in M$.*

Напомним, что точка c выпуклого множества $C \subset R^n$ называется крайней точкой, если из равенства $c = \lambda c_1 + (1-\lambda | c_2 (c_1, c_2 \in C,\ 0 < \lambda < 1)$ следует, что $c_1 = c_2$. То же самое определение имеет место и в случае любого действительного или комплексного линейного пространства.

Следующая теорема является конечномерным аналогом теоремы Крейна—Мильмана и получается как следствие одной теоремы К. Каратеодори [2]. В этой формулировке ее можно найти в [3, с. 21, У 1.5, У 1.6].

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 12, 1986, с. 250—264.

Теорема. *Пусть $C\subset R^n$ — ограниченное замкнутое выпуклое множество. Тогда C имеет по крайней мере одну крайнюю точку. Всякая точка $c\in C$ является выпуклой комбинацией не более чем $n+1$ крайних точек C. Если c — граничная точка C, то c можно представить в виде выпуклой комбинации не более чем n крайних точек C.*

Здесь и дальше, выпуклой комбинацией точек $c_1, \ldots, c_k$ назовем точку $c=\lambda_1 c_1+\cdots+\lambda_k c_k$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geqq 0$ и $\Sigma_{i=1}^k \lambda_i=1$.

Лемма (Е. Штейниц) [4]. Пусть задана линейная комбинация точек $y^1, \ldots, y^k$ с положительными коэффициентами вида

$$y=\lambda_1 y^1+\cdots+\lambda_k y^k. \tag{1}$$

Тогда, если существует линейная зависимость вида

$$\alpha_1 y^1+\cdots+\alpha_k y^k=0\,\Big(\sum_{i=1}^k |\alpha_i|>0\Big), \tag{2}$$

то для y существует линейная комбинация вида

$$y=\mu_1 y^1+\cdots+\mu_k y^k\ \Big(\mu_i\geqq 0,\ i=1,\ldots,k,\ \sum_{i=1}^k \mu_i\leqq \sum_{i=1}^k \lambda_i\Big),$$

причем хотя бы один из коэффициентов $\mu_i (i=1, \ldots, k)$ равняется нулю.

Замечание. Лемма Штейница утверждает на самом деле, что если $y_0^1, \ldots, y^k$ — линейно зависимые точки, то точку y, заданную равенством (1), можно представить как линейную комбинацию с положительными коэффициентами не более чем $k-1$ среди точек $y^1, \ldots, y^k$. Применив эту лемму несколько раз, мы получим представление точки y как линейной комбинации с положительными коэффициентами $r (r<k)$, линейно независимыми среди точек $y_1, \ldots, y_k$. Притом, сумма коэффициентов этого представления не больше суммы коэффициентов исходного представления (1).

Используя формулированные выше теоремы, мы докажем следующее (по существу известное) предложение.

Предложение. Пусть Q — компактное топологическое пространство и $g=(g_1, \ldots, g_n)$: $Q\rightarrow R^n$ — непрерывная функция, обладающая следующим свойством: всякая гиперплоскость, проходящая через начало координат, разделяет точки множества $g(Q)$ (т. е. для любой гиперплоскости с уравнением $(a/\xi)=0$ имеются $q_1, q_2\in Q$ так, что $(a\,|\,g(q_1))>0$ и $(a\,|\,g(q_2))>0$). Тогда любая неотделимая от $g(Q)$ точка $l\in R^n (l\neq 0)$ имеет представление вида

$$l=\mu_1 g(q_1)+\cdots+\mu_2 g(q_2)\quad \Big(\mu_i>0,\ q_i\in Q,\ i=1,\ldots,r,\ \sum_{i=1}^r \mu_i\leqq 1,\ r\leqq n\Big), \tag{3}$$

где $g(q_1), \ldots, g(q_r)$ суть линейно независимые крайние точки выпуклой оболочки C множества $g(Q)$.

Доказательство. Обозначим через $C\subset R^n$ множество, состоящееся из точки $o\in R^n$ и всех точек $c\in R^n (c\neq 0)$, имеющих представление

$$c=\mu_1 g(q_1)+\cdots+\mu_2 g(q_r)\quad \Big(\mu_i>0,\ g_i\in Q,\ i=1,\ldots,r,\ \sum_{i=1}^r \mu_i\leqq 1\Big), \tag{4}$$

где $g(q_1), \ldots, g(q_r)$ — линейно независимые точки $g(Q)$. Очевидно, что $r\leqq n$. Из компактности Q, непрерывности g и неравенств $\mu_i>0 (i=1, \ldots, r)$, $\Sigma_{i=1}^r \mu_i\leqq 1$ сразу следует компактность C.

Выпуклость C является простым следствием леммы Штейница. Действительно, если $c=\alpha c'+(1-\alpha)c''$, где $c', c''\in C$ и $0<\alpha<1$, то имея в виду представления (4) для точек c' и c'', получим для c соответствующее представление. Чтобы закончить доказательство, достаточно применить к этому представлению замечание с. 251.

Здесь покажем, что всякую отличную от нуля точку $c\in C$ можно представить как линейную комбинацию вида (4), причем точки $g(q_1),\ldots,g(q_r)$ являются крайними точками C (следовательно, $r\leq n$). Сначала покажем, что если $c'\neq 0$ — крайняя точка C, то $c'=g(q')$ (такая крайняя точка существует, так как C — выпуклое компактное множество, содержащее ненулевые точки). Пусть $c'=\mu_1 g(q_1)+\cdots+\mu_r g(q_r)$, где $\mu_i>0\,(i=1,\ldots,r)$, $\Sigma_{i=1}^r\mu_i\leqq 1$ и $g(q_1),\ldots,g(q_r)$ — линейно независимые точки $g(Q)$. Легко увидеть, что $\Sigma_{i=1}^r\mu_i=1$. Действительно, если $\Sigma_{i=1}^r\mu_i<1$, то для некоторого $\alpha>1$ будем иметь $\Sigma_{i=1}^r\alpha\mu_i=1$ и, следовательно, $c'=\frac{1}{\alpha}(\alpha c')+(1-1/\alpha)\,.\,0$, откуда следовало бы неверное равенство $\alpha c'=0$. Итак, $\Sigma_{i=1}^r\mu_i=1$. Покажем, что $r=1$. Допустим для этой цели, что $r>1$. Тогда $c'=\mu_1 g(g_1)+\frac{1-\mu_1}{\mu_2+\cdots+\mu_r}\Sigma_{i=2}^r\mu_i g(q_i)$ (отметим, что $\frac{1-\mu_1}{\mu_2+\cdots+\mu_r}=1$), следовательно, $c'=\mu_1 g(q_1)+(1-\mu_1)\Sigma_{i=2}^r\frac{\mu_i}{\mu_2+\cdots+\mu_r}g(q_i)$, где очевидно $\Sigma_{i=2}^r\frac{\mu_i}{\mu_2+\cdots+\mu_r}g(q_i)\in C$, откуда следует равенство $g(q_1)=\Sigma_{i=2}^r\frac{\mu_i}{\mu_2+\cdots+\mu_r}g(q_i)$, что невозможно, так как $g(q_1),\ldots,g(q_r)$ — линейно независимые точки. Итак, $r=1$ и $c'=g(q_1)$.

Пусть $c\neq 0$ — любая точка C. Выберем число $\alpha>0$ так, чтобы αc была граничной точкой C, т. е. $\alpha c\in C$ и $(\alpha+\delta)c\bar{\in} C$ для любого $\delta>0$. Тогда, согласно теореме с. 251, αc можно представить как выпуклую комбинацио не более чем n крайних точек $c_1',\ldots,c_k'$ множества c, а именно:

$$\alpha c=\mu_1 c_1'+\cdots+\mu_k c_k'\quad (\mu_i>0,\ \sum_{i=1}^k\mu_i=1,\ k\leqq n).$$

В этом представлении $c_i'\neq 0(i=1,\ldots,k)$. Действительно, если, например, $c_1'=0$, то $\mu_2+\cdots+\mu_k<1$, следовательно, для некоторого $\beta>1$ имели бы $\beta\mu_2+\cdots+\beta\mu_r=1$, т. е. $\beta\alpha c=\beta\mu_2 c_2'+\cdots+\beta\mu_k c_k'\in C$, что невозможно, так как $\beta\alpha>\alpha$. Но тогда $c_i'=g(q_i)$ $(i=1,\ldots,k)$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $g(q_i)$ — линейно независимые крайние точки. В противном случае можно применить замечание.

Отметим еще тот очевидный факт, что линейная независимость векторов $g(t_i)=(g_1(t_i),\ldots,g_n(t_i))/(i=1,\ldots,r)$ означает, что матрица

$$(5)\qquad \begin{pmatrix} g_1(t_1) & g_1(t_2) & \ldots & g_1(t_r)\\ g_2(t_1) & g_2(t_2) & \ldots & g_2(t_r)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ g_n(t_1) & g_n(t_2) & \ldots & g_n(t_r)\end{pmatrix}$$

имеет ранг r. Итак, мы показали, что если Q — компактное топологическое пространство и $g=(g_1,\ldots,g_r)$: $Q\to R^n$ — непрерывная векторная функция, то каждый ненулевой вектор c множества C имеет представление

$$c=\mu_1 g(q_1)+\cdots+\mu_r g(q_r)\quad (\mu_i>0,\ i=1,\ldots,r,\ \sum_{i=1}^r\mu_i\leq 1,\ r\leq n),$$

где $g(q_1), \dots, g(q_r)$ — крайние точки C, для которых матрица (5) имеет ранг r. Чтобы закончить доказательство, покажем, что точка $l \in R^n$ принадлежит C, если неотделима от $g(Q)$. На самом деле мы покажем, что l неотделима от C тогда и только тогда, когда l неотделима от $g(Q)$. Отсюда и от теоремы Г. Минковского следует, что $l \in C$.

Пусть $(a \mid g(q)) \geqq \beta$ для каждого $q \in Q$. Так как любая гиперплоскость вида $(b \mid \xi) = 0$ разделяет точки $g(Q)$, то для некоторого q' будем иметь $(a \mid g(q')) < 0$, следовательно, $\beta \leqq \inf\limits_{q \in Q} (a \mid g(q)) < 0$. Но тогда $\left(\frac{a}{\beta} \middle| g(q)\right) \leqq 1$ для всякого $q \in Q$. Отсюда следует, что $\left(\frac{a}{\beta} \middle| c\right) = \left(\frac{a}{\beta} \middle| \mu_1 g(q_1) + \cdots + \mu_r g(q_r)\right) = \mu_1 \left(\frac{a}{\beta} \middle| g(q_1)\right) + \cdots + \mu_r \left(\frac{a}{\beta} \middle| g(q_r)\right) \leqq \mu_1 + \cdots + \mu_r \leqq 1$, откуда $(a \mid c) \geqq \beta$. Если $(a \mid c) \geqq \beta$ для любого $c \in C$, то в частности $(a \mid g(q)) \geqq \beta$ для всякого $q \in Q$. Но тогда точка l неотделима от C тогда и только тогда, когда l неотделима от $g(Q)$. Этим завершается доказательство нашего предложения.

Ниже мы докажем одну теорему, являющуюся непосредственным следствием теоремы Крейна — Мильмана и только что доказанное предложение.

Всюду дальше через T будем обозначать компактное (отделимое) топологическое пространство, через E — действительное или комплексное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, а через X — действительное или комплексное (вместе с E) пространство непрерывных функций $x : T \to E$, нормированное с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in T} \|x(t)\|_E$. Соответствующие сопряженные пространства будем обозначать через E^* и X^*. Предположим кроме того, что E^* наделено слабой* топологией $\sigma(E^*, E)$. Через $K \subset E^*$ обозначим единичный шар пространства E^*, т. е. $K = \{L \in E^* : \|L\| \leqq 1\}$. Как хорошо известно, K — выпуклое компактное (относительно $\sigma(E^*, E)$) множество. Через $\operatorname{Ex}(K)$ обозначим множество крайних в смысле Минковского элементов шара K, а через $[\operatorname{Ex}(K)]$ — замкнутую оболочку множества $\operatorname{Ex}(K)$. Наконец, обозначим через S единичную сферу E^*, т. е. $S = \{L \in E^* : \|L\| = 1\}$.

Имеет место следующая теорема (более слабый вариант этой теоремы можно найти в [1]).

Теорема 1. *При введенных выше означениях, если X — n-мерное (действительное или комплексное вместе с E) пространство описанного вида, если $x_1, \dots, x_n$ — базис X в действительном случае, а $x_1, \dots, x_{2n}$ — базис X рассматриваемого как действительное пространство (в комплексном случае) и если $l \in X^* (l \neq 0)$, то существуют элементы $t_i \in T$, $L_i \in \operatorname{Ex}(K)$ и числа $\mu_i > 0$ $(i = 1, \dots, r)$, где $1 \leqq r \leqq n$ если, E и X — действительные пространства и $1 \leqq r \leqq 2n-1$, если E и X — комплексные, так что*

а) *для любого $x \in X$ имеет место представление*

$$l(x) = \mu_1 L_1(x(t_1)) + \cdots + \mu_r L_r(x(t_r)) \quad \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i = \sup_{\|x\|=1} |l(x)| = \|l\|\right); \tag{6}$$

б) *если E и X — действительные, матрица $(L_i(x_j(t_i)))_{i=1,\ j=1}^{r\ \ \ \ n}$ имеет ранг r. Если E и X — комплексные, матрица $(L_i^R(x_j(t_i)))_{i=1,\ j=1}^{r\ \ \ \ 2n}$ имеет ранг r (здесь L^R означает действительную часть функционала $L \in E^*$);*

в) *если $x' \in X (x' \neq 0)$ — экстремальная функция для функционала l, т. е. $l(x') = \|l\| . \|x'\|$*), то*

* Наше определение несколько отличается от общепринятого определения экстремального элемента, согласно которому x' называется экстремальным, если $|l(x')| = \|l\| . \|x'\|$. Ясно, однако, что это отличие несущественно. Добавим, что если нормированное пространство X конечномерно, то для любого $l \in X^*$ $(l \neq 0)$ существует хотя бы один экстремальный элемент x'.

$$L_i(x'(t_i)) = \| x'(t_i) \|_E = \sup_{t \in T} \| x'(t) \|_E = \| x' \| \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда E и X — действительные пространства. Чтобы доказать теорему в этом случае, мы используем следующие известные факты.

I. Функция ψ_x, заданная для всякого $(L, t) \in KxT$ равенством $\psi_x(L, t) = L(x(t))$ непрерывна на множестве KxT относительно топологии декартового произведения.

Действительно, если последовательность $\{(L_\alpha, t_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ (здесь A — направленная система индексов) сходится к элементу (L_0, t_0), то $| \psi_x(L_\alpha, t_\alpha) - \psi_x(L_0, l_0) | = | L_\alpha(x(t_\alpha))$

$$- L_0(x(t_0)) | \leqq | L_\alpha(x(t_\alpha)) - L_\alpha(x(t_0)) | + | L_\alpha(x(t_0)) - L_0(x(t_0)) | \leqq \| L_\alpha \| \cdot \| x(t_\alpha) - x(t_0) \|_E$$
$$+ | L_\alpha(x(t_0)) - L_0(x(t_0)) |.$$

Но $\lim_\alpha \| x(t_\alpha) - x(t_0) \|_E = 0$, $\lim_\alpha L_\alpha(x(t_0)) = L_0(x(t_0))$ и $\| L_\alpha \| \leqq 1$, следовательно, $\lim_\alpha \psi_x(L_\alpha, t_\alpha) = \psi_x(L_0, t_0)$.

Замечание. То же самое доказательство сохраняется и в случае, когда X — бесконечномерное или комплексное пространство.

II. Положим $N = [\mathrm{Ex}(K)]xT$. Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$\| x \| = \sup_{(L, t) \in N} L(x(t)) = L^*(x(t')). \tag{7}$$

Имея в виду хорошо известный факт, что для любого $a \in E$ имеется функционал $L \in S$, для которого $L(a) = \| a \|_E$, получаем (при фиксированных $x \in X$ и $t \in T$) равенство $\sup_{L \in K} L(x(t)) = \| x(t) \|_E$, откуда (при фиксированном $x \in X$)

$$\sup_{(L, t) \in K \times T} L(x(t)) = \sup_{t \in T} [\sup_{L \in K} L(x(t))] = \sup_{t \in T} \| x(t) \|_E = \| x \|.$$

Из непрерывности функции ψ_x на компактном множестве KxT следует существование элемента $(L', t') \in KxT$, для которого $\psi_x(L', t') = L'(x(t')) = \sup_{(L, t) \in KxT} L(x(t)) = \| x \|$.

Без ограничения общности можно считать, что $L' \in \mathrm{Ex}(K)$. Действительно, рассмотрим множество

$$\bar{M} = \{L_1 \in K\colon\ L_1(x(t')) = \| x \| \}, \tag{8}$$

где x — фиксированный элемент X. Легко видеть, что $\bar{M}$ — экстремальное подмножество множества K (т. е. $\bar{M}$ — непраздное замкнутое выпуклое подмножество K со следующим свойством: если $L_1, L_2 \in K$ и $\alpha L_1 + (1-\alpha) L_2 \in \bar{M}) \ 0 < \alpha < 1$, то $L_1, L_2 \in \bar{M}$. Очевидно, что $\bar{M}$ — непустое подмножество K. Легко проверить также, что $\bar{M}$ — выпуклое множество (мы не будем останавливаться на этом). Пусть $L_1, L_2 \in K$, $L^* = \alpha L_1 + (1-\alpha) L_2$ для некоторого $\alpha (0 < \alpha < 1)$ и $L^* \in \bar{M}$. Из соотношений

$$\sup_{(L, t) \in KxT} L(x(t)) = L^*(x(t')) = \alpha L_1(x(t')) + (1-\alpha) L_2(x(t')) \leq \sup_{(L, t) \in KxT} L(x(t))$$

сразу следует, что $L_1, L_2 \in \bar{M}$. Согласно теореме Крейна—Мильмана $\bar{M}$, содержит хотя бы один крайний элемент $\tilde{L}$ множества K, для которого

$$\tilde{L}(x(t')) = \sup_{(L, t) \in KxT} L(x(t)) = \| x \| \quad (\tilde{L} \in \mathrm{Ex}(K),\ t' \in T). \tag{9}$$

Из равенства (9) следует, что

$$\|x\|=\sup_{(L,\,t)\in KxT} L(x(t))=\sup_{(L,\,t)\in \mathrm{Ex}\,(K)xT} L(x(t))\leq \sup_{(L,\,t)\in N} L(x(t))\leq \sup_{(L,\,t)\in KxT} L(x(t))=\|x\|,$$

откуда в частности следует (1).

Замечание 1. В доказательстве II мы не пользовались тем обстоятельством, что X является конечномерным пространством, так что оно сохраняется и для бесконечномерных пространств.

Замечание 2. Если (L', t') — точка, удовлетворяющая условиям $L'(x(t'))=\inf_{(L,\,t)\in KxT} L(x(t))$ и $\underline{M}=\{L_1\in K\colon L_1(x(t'))=\inf_{L\in K} L(x(t'))\}$, то подобным образом можно доказать, что имеет место равенство

$$\tilde{L}(x(t'))=\inf_{(L,\,t)\in KxT} L(x(t)) \quad (\tilde{L}\in \mathrm{Ex}\,(K),\ t'\in T). \tag{9'}$$

После этих заметок приступим к доказательству действительного случая теоремы 1.

Положим $Q=N$. Тогда N — компактное множество относительно топологии пространства E^*xT (напомним, что E^* наделено топологией $\sigma(E^*, E)$). Положим дальше для любого $q\in N$

$$g(q)=g(L,\,t)=(L(x_1(t)),\,\ldots,\,L(x_n(t))),$$

где $x_1,\ldots,x_n$ — базис X. Согласно I $g(q)$ — непрерывная функция на множестве N.

Если $a\in R^n$ и $a\neq 0$, то скалярное произведение $(a/g(q))$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Действительно, $(a/g(q))=a_1L(x_1(t))+\cdots+a_nL(x_n(t))=L(x(t))$, где $x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\neq 0$, т. е. $x(t_1)\neq 0$ для некоторого $t_1\in T$. Тогда можно найти $L_1\in K$ так, что $L_1(x(t_1))>0$, следовательно, $(-L_1)(x(t_1))<0$. Эти неравенства вместе с (9) и (9′) показывают, что имеются точки $q_1=(\tilde{L},\,t_1)\in \mathrm{Ex}\,(K)xT$ и $q_2=(\tilde{\tilde{L}},\,t_2)\in \mathrm{Ex}\,(K)xT$, для которых $(a\mid g(q_1))>0$ и $(a\mid g(q_2))<0$.

Итак, мы проверили, что g удовлетворяет условиям предложения на с. 251.

Пусть $l\in X^*$ и $\|l\|=1$. Через l будем обозначать так же точку $(l(x_1),\ldots,l(x_n))$, что не может привести к недоразумению. Покажем, что точка l неотделима от $g(Q)$. Если для некоторого $a\in R^n$, $a\neq 0$ и любого $q\in N$

$$(a\mid g(q))=a_1L(x_1(t))+\cdots+a_nL(x_n(t))=L(x(t))\geq\beta,$$

то $\beta<0$, так как $(a/g(q))$ принимает и отрицательные значения. Тогда $L\left(\frac{x(t)}{\beta}\right)=\left(\frac{a}{\beta}\,\middle|\, g(q)\right)\leq 1$. С другой стороны, имея в виду (7) и равенство $\|l\|=1$, получим, что $\left(\frac{a}{\beta}\,\middle|\, l\right)=l\left(\frac{x}{\beta}\right)\leq\left\|\frac{x}{\beta}\right\|=\sup_{(L,\,t)\in N} L\left(\frac{x(t)}{\beta}\right)\leq 1$, откуда следует, что $(a/l)\geq\beta$, т. е. что l — неотделимая точка от $g(Q)$. Отсюда и из предложения с. 251 следует, что для l имеет место представление (4), причем матрица (5) имеет ранг r. Отметим, что матрица (5) в нашем случае совпадает с первой из матриц точки б). Написав для l представление (4), причем $g(q_i)=g(L_i,\ t_i)=(L_i(x,(t_i)),\ldots,L_i(x_n(t_1)))$ $(i=1,\ldots,r)$ и умножив скалярно на любое $a=(a_1,\ldots,a_n)\in R^n$, получим, что $(a\mid l)=l(x)=\mu_1L_1(x(t))+\cdots+\mu_rL_r(x(t_r))$ $(\Sigma_{i=1}^r\mu_i\leq 1,\ \mu_i>0,\ (L_i,\ t_i)\in N,\ i=1,\ldots,r,\ r\leq n)$. Выбирая $x'\in X(x'\neq 0)$ так, чтобы $l(x')=\|x'\|$ (как было сказано выше, такой элемент существует, так как X — конечномерное пространство), получим

$$\|x'\|=l(x')=\mu_1L_1(x'(t_1))+\cdots+\mu_rL_r(x'(t_r))\leq(\mu_1+\cdots+\mu_r)\sup_{(L,\,t)\in N} L(x(t))\leq\|x'\|,$$

а это показывает, что $\Sigma'_{i=1}\mu_i=1$ и $L_i(x'(t_i))=\sup_{(L,t)\in N} L(x'(t))=\|x'\|$ $(i=1,\ldots,r)$. Но $\|x'\|=L_i(x'(t_i))\leq\|x'(t_i)\|_E\leq\|x'\|$, следовательно, $L_i(x'(t_i))=\|x'(t_i)\|$, чем завершается и доказательство в).

Если $\|l\|\neq 1$ $(\|l\|\neq 0)$, то применяя для функционала $l/\|l\|$, доказанное выше, получаем, что в случае, когда E и X — действительные пространства, для l выполняются утверждения а), б), в) нашей теоремы (без соотношений $L_i\in \mathrm{Ex}(K)$, $i=1,\ldots,r$).

Не ограничивая общности, можно считать, что в представлении (6) $L_i\in \mathrm{Ex}(K)$ $(i=1,\ldots,r)$. Доказательство аналогично доказательству одной леммы И. Зингера [5, с. 168, лемма 1, 2].

Пусть $L_1\in S$, $t_1\in T$ — элементы первого члена правой стороны представления (6) Напомним, что $g(q_1)=g(L_1, t_1)=(L_1(x_1(t_1)),\ldots, L_1(x_n(t_1)))$ — крайняя точка множества C. Рассмотрим множество

$$\mathscr{E}=\{L\in K:\ L(x(t_1))=L_1(x(t_1)) \text{ для всех } x\in X\}.$$

Легко видеть что $\mathscr{E}$ — экстремальное подмножество единичного шара K. Действительно, $\mathscr{E}\neq\emptyset$, так как $L_1\in\mathscr{E}$. Легко видеть, что $\mathscr{E}$ замкнуто относительно $\sigma(E^*, E)$ и, следовательно, компактно. Если для любого $a\in E$ $L_\alpha(a)\xrightarrow{\alpha} L_0(a)$ и $L_\alpha\in\mathscr{E}$, то $\|L_0\|\leq 1$, т. е. $L_0\in K$. Кроме того, из $\lim_\alpha L_\alpha(x(t_1))=L_1(x(t_1))$ следует, что $L_0(x(t_1))=L_1(x(t_1))$ для всякого $x\in X$, следовательно, $L_0\in\mathscr{E}$. Выпуклость $\mathscr{E}$ очевидна. Покажем, что если $L^*=\lambda L'+(1-\lambda)L''$, где $L', L''\in K$, $0<\lambda<1$ и $L^*\in\mathscr{E}$, то $L', L''\in\mathscr{E}$. Для этой цели мы покажем, что для $x\in X$ имеем $L'(x(t_1))=L''(x(t_1))=L_1(x(t_1))$. Но

$$g(q_1)=g(L_1, t_1)=(L_1(x_1(t_1)),\ldots, L_1(x_n(t_1)))=(L^*(x_1(t_1)),\ldots, L^*(x_n(t_1)))=\lambda(L'(x_1(t_1)),$$
$$\ldots, L'(x_n(t_1)))+(1-\lambda)\,(L''(x_1(t_1)),\ldots, L''(x_n(t_1))),$$

а $g(q_1)$ — крайняя точка C, следовательно, $L'(x_i(t_1))=L''(x_i(t_1))$ $(i=1,\ldots,r)$, т. е $L'(x(t_1))=L''(x(t_1))=L^*(x(t_1))=L_1(x(t_1))$ для любого $x\in X$. Итак, мы показали, что $L', L''\in\mathscr{E}$, т. е. что $\mathscr{E}$ — экстремальное подмножество K. Если обозначить через $L'\in\mathscr{E}$ крайний элемент K (такой имеется в силу теоремы Крейна—Мильмана), то для него будем иметь $L'(x(t_1))=L_1(x(t_1))$ для всякого $x\in X$, так что в а), б), в) можно заменить L_1 на L'. Другими словами, можно предположить, что в (6), б) и в) L_1 — крайний элемент единичного шара K. Таким же образом можно показать, что и остальные функционалы $L_2,\ldots, L_r$ представления (6) можно считать крайними точками K. Этим действительный случай нашей теоремы доказан.

Прежде чем перейти к доказательству комплексного случая, сделаем некоторые замечания.

Пусть Y — нормированное комплексное пространство. Через Y^R будем обозначать пространство Y, рассматриваемое как пространство над полем действительных чисел. Если $l\in Y^*$, то через l^R и l^Y будем обозначать действительную и мнимую части функционала l, так что для любого $y\in Y$ имеем $l(y)=l^R(y)+il^Y(y)$, где i — мнимая единица.

Как известно, $l^R\in Y^{R*}$, $\|l^R\|=\|l\|$ и $l^Y(y)=-l^R(iy)$. Через K^R, S^R будем обозначать единичный шар и единичную сферу Y^{R*}.

Пусть $l\in Y^*$ $l\neq 0$. Будем говорить (как в действительном случае), что элемент $y'\in Y$, $y'\neq 0$ экстремален для l, если $l(y')=\|l\|.\|y'\|$. И здесь, в комплексном случае, определение экстремального элемента отличается несущественно от обычного определения, по которому y' является экстремальным элементом для l, если $|l(y')|=\|l\|.\|y'\|$. Удобство нашего определения состоит в том, что экстремальные элементы l и l^R совпадают.

Замечание. Отметим еще раз, что если Y — n-мерное пространство над полем комплексных чисел, то Y^R—$2n$-мерное действительное пространство.

Теперь мы покажем, что в случае, когда E и X — комплексные пространства, имеет место равенство

$$(9') \qquad \| x \| = \sup_{(L,\, t) \in N} | L(L(x(t)) | .$$

Пусть $x \in X$. С одной стороны, имеем $| L(x(t))| \leq \| x(t)) \|_E$ для любого $L \in K$ и $t \in T$. Обозначим через $L_t^R (L_t^R \in S^R)$, где t — элемент T, функционал, для которого $L_t^R(x(t)) = \| x(t) \|_{E^R} = \| x(t) \|_E$ (здесь $x \in X$ — фиксированный элемент). Положив для всякого $a \in E$ $L_t(a) = L_t^R(a) - iL_t^R(ia)$, мы получим функционал L_t из S, так как $\| L_t \| = \| L_t^R \| = 1$ С другой стороны, $| L_t(x(t)) | = L_t^R(x(t)) = \| x(t) \|_E$, так как в противном случае имели бы соотношения $| L_t(x(t)) | = \sqrt{[L_t^R(x(t))]^2 + [L_t^R(ix(t))]^2} > L_t^R(x(t)) = \|x(t)\|_E$, т. е. $\| L_t \| > 1$, что невозможно. Итак, для всякого $t \in T$ (при фиксированном $x \in X$) $\sup | L(x(t)) | = | x(t) \|_E$ откуда следует, что $\| x \| = \sup_{t \in T} | x(t) \|_E = \sup_{(L,\, t) \in KxT} | L(x(t)) |$. Из непрерывности функции $\psi_x(L, t) = L(x(t))$ относительно топологии в $E^* xT$ и компактности множества KxT следует существование элемента $(L', t') \in KxT$, для которого $\psi_x(L', t') = L'(x(t')) = \sup_{(L,\, t) \in KxT} | L(x(t)) | = \| x \|$. Положим

$$M = \{ L_1 \in K : \; L_1(x(t')) = \sup_{(L,\, t) \in KxT} | L(x(t)) | \}.$$

$M \neq \emptyset$, так как $L' \in M$. Легко видеть, что M — экстремальное подмножество множества K. Доказательство этого факта повторяет доказательство стр. 251, где установлена экстремальность множества $\bar{M}$ (вж. (8)). Пусть $L^* \in \mathrm{Ex}\,(K) \cap M$. Для L^* имеем $L^*(x(t')) = \sup_{(L,\, t) \in KxT} | L(x(t)) | = \| x \|$. Но тогда

$$\sup_{(L,\, t) \in LxT} | L(x(t)) | = L^*(x(t')) \leqq \sup_{(L,\, t) \in \mathrm{Ex}\,(K)xT} | L(x(t)) | \leqq \sup_{(L,\, t) \in N} | L(x(t)) | \leqq \sup_{(L,\, t) \in KxT} | L(x(t)) |,$$

откуда следует (9').

Перейдем теперь к доказательству нашей теоремы в комплексном случае.

Пусть $l \in X^*$, $l \neq 0$ и пусть $x_1, \ldots, x_{2n}$ — базис X^R. Ясно, что каждый элемент $x \in X^R$ можно рассматривать как функцию вида $x : T \to E^R$. Применив к $l^R \in X^{R*}$ действительный случай теоремы 1, получим следующее предложение.

Предложение. При введенных выше обозначениях и предположениях существуют такие элементы $L_i^R \in \mathrm{Ex}\,(K^R) \subset E^{R*}$, $t_i \in T$ и числа $\mu_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r, r \leqq 2n)$, что

1. для всякого $x \in X$ выполняется равенство

$$l^R(x) = \mu_1 L_1^R(x(t_1)) + \cdots + \mu_r L_r^R(x(t_r)) \quad (\sum_{s=1}^{r} \mu_s = \sup_{\| x \| = 1} l^R(x) = \| l^R \|, \; r \leqq 2n);$$

2. ранг матрицы $(L_i^R(x_j(t_i)))_{i=1,\, j=1}^{r \quad 2n}$ равняется r; если $x' \in X^R$ — экстремальный элемент для l^R (т. е. $l^R(x') = \| l^R \| . \| x' \|$), то имеют место равенства

$$L_s^R(x'(t_s)) = \| x'(t_s) \|_E = \sup_{t \in T} \| x'(t) \|_E = \| x' \| \quad (s = 1, \ldots, r).$$

Выберем экстремальную функцию $x' \in X^R$ и положим для любого $a \in E$

$$L_s(a) = L_s^R(a) - iL_s^R(ia).$$

Очевидно $L_s \in E^*$ и $\| L_s \| = \| L_s^R \| = 1$ $(s=1, \ldots, r)$. Покажем, что $L_s \in \mathrm{Ex}(K)$. Действительно, если

$$L_s = \lambda L' + (1-\lambda) L'' \quad (0<\lambda<1, \ L', L'' \in K),$$

то

$$L_s^R = \lambda L'^R + (1-\lambda) L''^R,$$

откуда следует (в виду того, что L_s^R — крайняя точка K^R), что $L'^R = L''^R$. Но так как $L'(a) = L'^R(a) - iL''^R(a)$, $L''(a) = L''^R(a) - iL''^R(a)$, то $L' = L''$, откуда следует, что L_s — крайняя точка K.

Легко видеть, что $r \leqq 2n-1$. Отметим прежде всего, что из пункта 3 нашего предложения следует, что $x'(t_s)$ — экстремальный элемент для L_s^R, а так как согласно сказанному на стр. 257, экстремальные элементы для L и L^R совпадают, получаем, что $x'(t_s)$ — экстремальный элемент и для L_s. В виду того, что $L_s(x'(t_s)) > 0$ получаем, что

$$L_s^R(ix'(t_s)) = 0 \quad (s=1, \ldots, r). \tag{11}$$

Допустим, что $r=2n$. Тогда матрица

$$\begin{Vmatrix} L_1^R(x_1(t_1)) & L_2^R(x_1(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_1(t_r)) \\ L_1^R(x_2(t_1)) & L_2^R(x_2(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_2(t_2)) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_1^R(x_{2n}(t_1)) & L_2^R(x_{2n}(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_{2n}(t_r)) \end{Vmatrix} \tag{12}$$

имеет $r=2n$ столбцов, следовательно, определитель Δ, составленный из элементов этой матрицы, отличен от нуля. Определим действительные $a_1, \ldots, a_{2n}$ так, что

$$ix'(t_s) = a_1 x_1(t_s) + \cdots + a_{2n} x_{2n}(t_s) \quad (s=1, \ldots, 2n).$$

Хотя бы одно из них, например a_1, отлично от нуля. Умножим первую строку матрицы (12) на a_1, добавим p-тую строку, умноженную на a_p, и дадим p значения $2, 3, \ldots, 2n$. С одной стороны полученная матрица имеет вместе с матрицей (12) ранг $r=2n$. С другой стороны, согласно (11), все элементы первой строки равняются нулю. Полученное противоречие доказывает, что $r \leqq 2n-1$.

Чтобы завершить доказательство комплексного случая, отметим, что из только что доказанного предложения следуют для каждого $x \in X$ равенства

$$l^R(x) \mu_1 L_1^R(x(t_1)) + \cdots + \mu_r L_r^R(x(t_r)),$$

$$l^R(ix) = \mu_1 L_1^R(ix(t_1)) + \cdots + \mu_r L_2^R(ix(t_r)) \ \left(\sum_{s=1}^{n} \mu_s = \| l^R \| = \| l \|, \ 1 \leq r \leq 2n-1\right),$$

откуда получаем а). Пункт б) комплексного случая является следствием пункта 2 нашего предложения, а в) доказывается как в действительном случае. Если x' $(x' \in X, x' \neq 0)$ — экстремальная функция для l, то

$$\| l \| \cdot \| x' \| = l(x') \parallel \mu_1 L_1(x'(t_1)) + \cdots + \mu_r L_r(x'(t_r)) \leqq \mu_1 | L_1(x'(t_1)) | + \cdots + \mu_r | L_r(x'(t_r)) |$$
$$\leqq \mu_1 \| x'(t_1) \|_E + \cdots + \mu_r \| x'(t_r) \|_E \leqq (\mu^1 + \cdots + \mu_r) \sup_{t \in T} \| x'(t) \|_E = \| l \| \cdot \| x' \|,$$

откуда следует, что всюду имеем знак равенства, а это возможно лишь тогда, когда выполняется в).

Этим завершается доказательство комплексного случая, а вместе с тем и доказательство теоремы 1.

Замечание. Теорема 1 является обобщением и уточнением одной известной теоремы [3, стр. 473, теорема 4.2]. Действительно, мы получим эту теорему, если в теореме 1 положим $E=R'(E=\mathrm{C})$, $\| a \|_E = | a |$, $T=[a, b]$ и выключим условие б). Теорему 1 можно доказать, используя некоторые факты (в частности представление 6), изложенные в книге И. Зингера [5, гл II, 166—170, 191—201 и 206 209]. Как нам кажется, однако, изложенное здесь доказательство значительно проще. Отметим еще, что настоящее доказательство представления (6) уточняет одно доказательство Ем. Димитрова (см. [1, теорема 2]).

Ниже даются два варианта действительного случая теоремы 1, которыми мы будем пользоваться в приложениях.

Пусть E — действительное линейное пространство и пусть на E задан некоторый функционал Минковского, который будем обозначать через $\| \cdot |_E$ и будем называть (следуя М. Г. Крейна [3, с. 482]) несимметричной нормой. Точнее говоря, несимметричная норма удовлетворят условиям

1) $\| a |_E > 0$ для $a \neq 0$;
2) $\| \rho a |_E = \rho \| a |_E$ для $\rho \geqq 0$;
3) $\| a_1 + a_2 | \leqq \| a_1 | + \| a_2 |$.

Норма линейного функционала на E, ограниченного относительно несимметричной нормы $\| \cdot |_E$, определяется обычным образом, т. е. $\| L | = \sup\limits_{\| a |=1} L(a)$, а через E^* обозначается пространство всех ограниченных линейных функционалов, т. е. сопряженное пространство. Норма каждого функционала $L \in C^*$ является в общем случае несимметричной. Через S (как и прежде) будем обозначать единичную сферу, а через K — единичный шар сопряженного пространства E^*. Слабая* топология определяется обычным образом. Относительно этой топологии K является компактным множеством. Как и в случае симметричной нормы, через $\mathrm{Ex}(K)$ будем обозначать множество всех неразложимых элементов единичного шара $K \subset E^*$, а через $[\mathrm{Ex}(K)]$ — замыкание $\mathrm{Ex}(K)$ относительно слабой* топологии $\sigma(E^*, E)$. Наконец положим $N = [\mathrm{Ex}(K)] x T$.

Пусть X — действительное линейное пространство непрерывных функций $x : T \to E$ (непрерывность понимается относительно нормы в E). В пространстве X вводится несимметричная равномерная норма $\| x | = \sup\limits_{t \in T} \| x(t) |_E$. Через X^* обозначается пространство, сопряженное на X. Легко видеть, что имеют место соотношения

$$\| x | = \sup_{(L,\, t) \in KxT} L(x(t)) = \sup_{(L,\, t) \in N} L(x(t)) = L_1(x(t)) \quad (L_1 \in \mathrm{Ex}(K),\ t_1 \in T). \tag{13}$$

Сначала отметим, что для любого $a_1 \in E$ имеем

$$\| a_1 |_E = \sup_{L \in S} L(a_1). \tag{14}$$

Определим функционал $\mathscr{C}$ на одномерном пространстве с элементами вида λa_1 $(\lambda \in R^1)$, равенством

$$\mathscr{C}(\lambda a_1) = \lambda \| a_1 |_E.$$

Очевидно $\mathscr{C}(\lambda a_1) \leqq \| \lambda a_1 |$ для любого $\lambda \in R'$, причем равенство достигается, так что $\| \mathscr{C} | = 1$. При помощи теоремы Хана — Банаха продолжим $\mathscr{C}$ (сохраняя норму) до функционала пространства E^*, обозначая продолжение через L. Очевидно L удовлетворяет равенству (14). Для доказательства первого из равенств (13) заметим, что имеют место очевидные равенства

$$\sup_{(L,\,t)\in K\times T} L(x(t)) = \sup_{(L,\,t)\in S\times T} L(x(t)) = \sup_{t\in T}\,[\sup_{L\in S} L(x(t))] = \sup_{t\in T} \| x(t)) | = \| x |.$$

Доказательство остальных из равенств (13) повторяет рассуждения утверждения II стр. 251. Так как доказательство действительной части теоремы 1 не использует симметричность нормы, оно сохраняется и для несимметричных норм. Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть E — действительное нормированное пространство с несимметричной нормой $\|\cdot|$, а X — n-мерное действительное линейное пространство непрерывных функций $x: T\to E$ с нормой $\|x| = \sup_{t\in T}\|x(t)|_E$. Тогда для каждого $l\in X^*$ ($l\neq 0$) существуют элементы $L_i\in \operatorname{Ex}(K)$, $t_i\in T$ и числа $\mu_i>0$ ($i=1,\ldots,r$, $r\leq n$) так, что*

а) *для любого $x\in X$ имеет место представление*

$$l(x) = \mu_1 L_1(x(t_1)) + \cdots + \mu_r L_r(x(t_r)); \tag{15}$$

б) *ранг матрицы $(L_i(x_j(t_i)))_{i=1,\,j=1}^{r\;\;n}$ равняется r (здесь x_j, $j=1,\ldots,n$ — базис пространства X);*

в) *если $x'\in X$ ($x'\neq 0$) — экстремальная функция для функционала l (хотя бы одна экстремальная функция существует, так как X — конечномерное пространство), то*

$$L_i(x'(t_i)) = \|x'(t_i)|_E = \sup_{t\in T}\|x'(t)|_E = \|x'| \quad (i=1,\ldots,r).$$

Ниже мы дадим еще один вариант теоремы 1.

Предположим, что действительное линейное пространство E наделено симметричной нормой $\|\cdot\|_E$. Предположим еще, что единичная сфера $S\subset E^*$ компактна относительно слабой* топологии $\sigma(E^*, E)$ (компактность S имеет место, например, в случае, когда пространство E — конечномерное). Как и выше, через X обозначим n-мерное действительное линейное пространство непрерывных функций $x: T\to E$. В X введем несимметричную норму следующим образом.

Пусть $\varphi: S\times T\to R^1_+$ — непрерывная функция, принимающая положительные значения. Очевидно множество значений φ — компактное множество положительных чисел, имеющее положительную верхнюю и нижнюю грани Δ и δ (т. е. $0<\delta\leq\varphi(L,t)\leq\Delta$ для всех $(L,t)\in S\times T$). Положим

$$\|x| = \sup_{(L,\,t)\in S\times T}\frac{L(x(t))}{\varphi(L,\,t)}. \tag{16}$$

Определенный выше функционал $\|\cdot|$ является несимметричной нормой (за исключением случая, когда $\varphi(-L,t)=\varphi(L,t)$ для $(L,t)\in S\times T$). Будем считать, что пространство X наделено нормой (16). Тогда каждый функционал $l\in X^*$ имеет норму $\|l| = \sup_{\|x|=1} l(x)$.

Теорема 3. *При введенных выше обозначениях и предположениях для каждого $l\in X^*$ ($l\neq 0$) существуют элементы $t_i\in T$ и $L_i\in S$ и числа $\mu_i>0$ ($i=1,\ldots,r$, $r\leq n$) так, что*

а) *для любого $x\in X$ имеет место представление*

$$l(x) = \mu_1\frac{L_1(x(t_1))}{\varphi(L_1,\,t_1)} + \cdots + \mu_r\frac{L_r(x(t_r))}{\varphi(L_r,\,t_r)} \quad \Big(\sum_{i=1}^{r}\mu_i = \sup_{\|x|=1} l(x) = \|l|\Big); \tag{17}$$

б) *ранг матрицы* $(L_i(x_j(t_i)))_{i=1,\ j=1}^{r\ \ n}$ *равняется* r *(здесь* x_j, $j=1,\ldots,n$ *— базис пространства* X*)*;

в) *если* $x'\in X\,(x'\neq 0)$ *— экстремальная функция для функционала* $l(l\neq 0)$, *т. е.* $l(x')=\|l\|.\|x'\|$, *то*

$$\frac{L_i(x'(t_i))}{\varphi(L_i,\ t_i)}=\|x'\| \quad (i=1,\ldots,r).$$

Чтобы доказать теорему 3, повторим часть рассуждений доказательства теоремы 1.

Положим $Q=SxT$ и наделим Q топологией декартового произведения, относительно которой Q является компактным множеством (напомним, что согласно нашему предположению, S — компактное множество относительно топологии $\sigma(E^*, E)$). Положим дальше для любого $q=(L,t)\in Q$

$$g(q)=g(L,\ t)=\Big(\frac{L(x_1(t))}{\varphi(L,\ t)},\ldots,\frac{L(x_n(t))}{\varphi(L,\ t)}\Big),$$

где $x_1,\ldots,x_n$ — какой-нибудь базис пространства X. Ясно, что g непрерывна на Q. Если $a\in R^n\,(a\neq 0)$, то скалярное произведение $(a\,|\,g(q))$ принимает положительные и отрицательные значения, так что выполняются условия предложения. Пусть $l\in X^*$ и $\|l\|=1$. Через l будем обозначать так же точку $(l(x_1),\ldots,l(x_n))$, Покажем, что точка l неотделима от множества $g(Q)$. Действительно, если для некоторого $a\in R^n\,(a\neq 0)$ и каждого $g\in Q$ имеем

$$(a\,|\,g(q))=a_1\frac{L(x_1(t))}{\varphi(L,\ t)}+\cdots+\bar{a}_n\frac{L(x_n(t))}{\varphi(L,\ t)}=\frac{L(x(t))}{\varphi(L,\ t)}\geq\beta,$$

то $\beta<0$, так как $(a\,|\,g(q))$ принимает и отрицательные значения. Тогда $\dfrac{L(\frac{x(t)}{\beta})}{\varphi(L,\ t)}=\Big(\dfrac{a}{\beta}\,\Big|\,g(q)\Big)\leq 1$. С другой стороны, имея в виду (16) и тот факт, что $\|l\|=1$, получим, что $\Big(\dfrac{a}{\beta}\,\Big|\,l\Big)=l\Big(\dfrac{x}{\beta}\Big)\leq\Big\|\dfrac{x}{\beta}\Big\|=\sup\limits_{(L,\ t)\in Q}\dfrac{L(\frac{x(t)}{\beta})}{\varphi(L,\ t)}\leq 1$, откуда следует, что $(a\,|\,l)\geq\beta$, т. е., что точка l неотделима от $g(Q)$. Отсюда и из предложения на стр.250 следует, что l имеет представление вида (3), причем матрица (5) имеет ранг r. Но ранг матрицы (5) очевидно равняется рангу матрицы $(L_i(x_j(t_i)))_{i=1,\ j=1}^{r\ \ n}$, чем и заканчивается доказательство б).

Написав представление (3) для точки l, сообразив, что $g(q_i)=\Big(\dfrac{L_i(x_1(t_i))}{\varphi(L_i\ t_i)},\ldots,\dfrac{L_i(x_n(t_i))}{\varphi(L_i,\ t_i)}\Big)$ $(i=1,\ldots,r)$ и умножив $g(q_i)$ скалярно на любое $a=(a_1,\ldots,a_n)$, получим, что

$$(a\,|\,l)=l(x)=\mu_1\frac{L_1(x(t_1))}{\varphi(L_1,\ t_1)}+\cdots+\mu_r\frac{L_r(x(t_r))}{\varphi(L_r,\ t_r)}\quad\Big((L_i,\ t_i)\in Q\ \sum_{i=1}^{r}\mu_i\leq 1,\ \mu_i>0,\ i=1,\ldots,r,\ r\leq n\Big).$$

Выбирая $x'\in X\,(x'\neq 0)$ так, чтобы $l(x')=\|x'\|$, получим

$$\|x'\|=l(x')=\mu_1\frac{L_1(x'(t_1))}{\varphi(L_1,\ t_1)}+\cdots+\mu_r\frac{L_r(x'(t_r))}{\varphi(L_r,\ t_r)}\leq(\mu_1+\cdots+\mu_r)\sup_{(L,\ t)\in Q}\frac{L(x'(t))}{\varphi(L,\ t)}=(\mu+\cdots$$
$$+\mu_r)\,\|x'\|\leq\|x'\|,$$

откуда следует, что $\Sigma_{i=1}^r\mu_i=1$, $\dfrac{L_i(x'(t_i))}{\varphi(L_i,\ t_i)}=\|x'\|$, $\|L_i\|=1\ (i=1,\ldots,r)$, а это доказывает а) и в) в случае, когда $\|l\|=1$. В общем случае, применив к функционалу

$|l/|l||$, доказанное выше, легко показать, что для l выполняются утверждения а), б) и в) теоремы 3. Этим теорема 3 доказана.

Замечание 1. В [3, стр. 487] определяется несимметричная норма (16) в частном случае, когда $E=R^1$ и $\|a\|_E=|a|$. Доказанная там теорема [3, стр. 490, теорема 5.2] является непосредственным следствием теоремы 3.

При доказательстве теоремы 3 мы не пользовались тем обстоятельством, что точки $g(q_i)$ $(i=1,\ldots,r)$ в представлении (3) являются крайними точками выпуклого компактного множества C. Как в теореме 1, мы могли бы использовать этот факт, чтобы доказать неразложимость функционалов $L_i \in K$ $(i=1,\ldots,r)$ в представлении (17). Мы не останавливаемся на этом, так как нигде не используем неразложимость этих функционалов.

Замечание 2. Доказательство комплексного случая теоремы 1 использует симметричность нормы элементов X и X^*. Поэтому оно не переносится на случай несимметричных норм.

Ниже мы сформулируем одно тривиальное следствие теоремы 1, которое понадобится для нахождения простых решений так называемой $\mathscr{C}$-проблемы А. А. Маркова.

Теорема 4. *Пусть E — нормированное (действительное или комплексное пространство) и пусть E_n — n-мерное подпространство E. Тогда для каждого функционала $l \in E^*$ $(l \neq 0)$ существуют функционалы $L_s \in \mathrm{Ex}(K) \subset E^*$ и положительные числа μ_s $(s=1,\ldots,r)$, причем $1 \leq r \leq n$ если E — действительное и $1 \leq r \leq 2n-1$, если E — комплексное пространство, так, что:*

1. *для любого $a \in E_n$ имеет место представление*

$$(18)\quad l(a)=\mu_1 L_1(a)+\cdots+\mu_r L_r(a)\quad \left(\mu_s>0,\ s=1,\ldots,r,\ \sum_{s=1}^{r}\mu_s=\sup_{\|a\|_E=1}|l(a)|=\|l\|\right).$$

2. *Если E — действительное пространство и $a_1,\ldots,a_n$ — некоторый базис E_n, то матрица $(L_s(a_p))_{s=1,\ p=1}^{r\ \ n}$ имеет ранг r. Если E — комплексное пространство и $a_1,\ldots,a_{2n}$ — базис E^R, то матрица $(L_s^R(a_p))_{s=1,\ p=1}^{r\ \ 2n}$ имеет ранг r.*

3. *Если $a' \in E_n$ $(a' \neq 0)$ — экстремальный элемент для функционала l, то $L_s(a')=\|a'\|_E$ $(s=1,\ldots,r)$.*

Чтобы доказать теорему 4, достаточно положить в теореме 1 $T=\{t_0\}$ (т. е. T — одноэлементное множество). В этом случае каждая функция $x: T \to E$ непрерывна и, мы можем отождествить ее с единственным значением $a=x(t_0)$. Таким образом n-мерное пространство X переходит в E_n, $\|x\|=\|x(t_0)\|_E=\|a\|_E$, а теорема 1 переходит в теорему 4.

Замечание. Ясно, что теорема 4 сохраняет свою верность в случае, когда норма пространства E несимметрична.

В следующем изложении мы проиллюстрируем на нескольких примерах применение теорем 1—4.

Пример. В качестве следствия теоремы 4 докажем существование простого решения $\mathscr{C}$-проблемы А. А. Маркова [6, стр. 171] и [4, глава IX]. Речь идет о следующей задаче.

Пусть E — нормированное (действительное или комплексное) пространство и пусть $a_1,\ldots,a_n$ — n линейно независимые элементы E, а $l_1,\ldots,l_n$ и $\mathscr{C}>0$ — числа ($l_1,\ldots,l_n$ — действительные или комплексные вместе с E). Найти функционалы $L \in E^*$, удовлетворяющие условию

$$(\mathscr{C})\qquad L(a_k)=l_k\ (k=1,\ldots,n),\ \|L\|\leq\mathscr{C}.$$

Очевидно элементы $a_1, \ldots, a_n$ определяют n-мерное пространство $E_n \subset E$, а $l_1, \ldots, l_n$ — линейный функционал $l \in E_n^*$, определенный равенствами $l(a_s) = l_s$ $(s = 1, \ldots, n)$. Для того, чтобы наша задача имела решение, необходимо $\sup\limits_{a \in E_n,\ \|a\|_E = 1} |l(a)| = \|l\| \leqq \mathscr{C}$. Действительно, в противном случае норма любого продолжения L функционала l удовлетворяла бы неравенство $\|L\| > \mathscr{C}$, а это означает, что задача ($\mathscr{C}$) не имеет решения. Пусть $\|l\| \leqq \mathscr{C}$. При помощи представления (18) продолжим функционал l и обозначим продолжение через $L(L \in E^*)$. Тогда для каждого $a \in E$ будем иметь

$$L(a) = \mu_1 L_1(a) + \cdots + \mu_r L_r(a) \quad \left(\mu_s > 0,\ s = 1, \ldots, r,\ \sum_{s=1}^{r} \mu_s = \|l\|\right). \tag{20}$$

Из (20) сразу следует, что $\|L\| = \|l\|$. Действительно, с одной стороны $\|l\| = \sup\limits_{a \in E_n,\ \|a\|_E = 1} |l(a)| \leqq \sup\limits_{a \in E,\ \|a\| = 1} |L(a)| = \|L\|$. С другой стороны, $|L(a)| \leqq \mu_1 |L_1(a)| + \cdots + \mu_r |L_r(a)| \leqq \|l\| \cdot \|a\|_E$, т. е. $\|L\| \leqq \|l\|$, откуда следует, что $\|L\| = \|l\| \leqq \mathscr{C}$. Имея в виду сказанное, а также пункт 3 теоремы 4, можно сформулировать следующую теорему

Теорема 5. *При введенных выше обозначениях, для того чтобы $\mathscr{C}$-проблема А. А. Маркова имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $\|l\| \leqq \mathscr{C}$. При выполнении этих условий среди решений имеются и такие, для которых имеет место представление* (20), *где $L_1, \ldots, L_r$ — линейно-независимые крайние элементы единичного шара $K \subset E^*$ (здесь $1 \leqq r \leqq n$, если E — действительное и $1 \leqq r \leqq 2n-1$, если E — комплексное пространство). Если L — решение $\mathscr{C}$-проблемы вида* (20), *то $\|L\| = \|l\|$ и любой экстремальный элемент для l (такой элемент существует, так как E_n — конечномерное пространство) является экстремальным элементом для L и $L_1, \ldots, L_r$.*

Замечание 1. Теорема 5 имеет место и в том случае, когда E – действительное линейное пространство, нормированное несимметричной нормой. Она доказывается таким же образом, как следствие замечания стр. 262.

Замечание 2. Теорема 5 и замечание 1 можно использовать для решения задач линейного оптимального управления. Сформулируем одну из этих задач.

Задано линейное топологическое пространство E и выпуклый функционал F определенный на сопряженном пространстве E^*. Найти функционал $L \in E^*$, принимающий в заданных точках E заданные значения и для которого является наименьшим из значений функционал F. Теорема 5, как и замечание 1 дают возможность найти простое решение этой задачи в случае, когда E — нормированное пространство, точки пространства E, в которых L принимает заданные значения, образуя конечное множество, а F совпадает с нормой (симметричной или несимметричной) сопряженного пространства E^*. Решение, заданное представлением (20), называется импульсным (см. [3, с. 511—515], [7] и [8]).

Рассмотрим следующий пример. Пусть $E = L_1[\alpha, \beta]$ — пространство всех суммируемых функций $a: [\alpha, \beta] \to R^1$, причем

$$\|a\| = \int_\alpha^\beta |a(t)|\, dt \tag{21}$$

(здесь мы рассматриваем все суммируемые функции, совпадающие почти всюду на $[\alpha, \beta]$, как один и тот же элемент $h_1[\alpha, \beta]$). Как известно, каждый линейный непрерывный функционал $L \in E^*$ имеет представление вида

$$L(a) = \int_\alpha^\beta a(t) f_L(t)\, dt$$

где f_L — функция, для которой $\sup\limits_{[\alpha,\beta]} \mathrm{ess}\,|f_L(t)|<\infty$. Кроме того,

$$\|L\|=\sup\limits_{[\alpha,\beta]} \mathrm{ess}\,|f_L(t)|,$$

так что сопряженное пространство можно отождествить с $h_\infty[\alpha,\beta]$. Функционал $L\in K\subset E^*$ является крайним элементом тогда и только тогда, когда $|f_L(t)|=1$ почти всюду на $[\alpha,\beta]$ (см. [5, стр. 83, лемма 1.13]). Через $E_n\subset E$ обозначим как и выше линейное пространство, через $a_1,\ldots,a_n$ — какой-нибудь базис E_n, а через l — линейный функционал ($l\in E_n^*$), определенный для любого $a=\alpha_1a_1+\cdots+\alpha_na_n$ равенством $l(a)=\alpha_1l_1+\cdots+\alpha_nb_n$. Пусть $\mathscr{C}$ — заданное положительное число. При этих обозначениях можно сформулировать следующее непосредственное следствие теоремы 5.

Следствие. Для того чтобы имела решение $\mathscr{C}$-проблема А. А. Маркова в случае, когда $E=h_1[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\|l\|\leqq\mathscr{C}$. Когда это условие выполнено, среди решений имеются и такие, которые допускают представление

$$(22)\quad L(a)=\mu_1\int_\alpha^\beta a(t)f_1(t)dt+\cdots+\mu_r\int_\alpha^\beta a(t)f_r(t)dt,\quad \left(\mu_s>0,\ s=1,\ldots,r,\ \sum_{s=1}^r\mu_s=\|l\|=\|L\|\right)$$

для любого $a\in E$. Здесь $|f_s(t)|=1$ почти всюду в $[\alpha,\beta]$ $(s=1,\ldots,r)$, а функционалы $L_s(a)=\int_\alpha^\beta a(t)f_s(t)dt$ линейно независимы ($1\leq r\leq n$, если E — действительное и $1\leqq r\leqq 2n-1$, если E — комплексное пространство). Если L — решение $\mathscr{C}$-проблемы вида (22), то любой экстремальный элемент для l (такие элементы имеются, так как E_n — конечномерное пространство) является экстремальным элементом как для L, так и для $L_1,\ldots,L_r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Димитров, В. Чакалов. Об одной экстремальной задаче. *Сердика*, **10**, 1984, 384—396.
2. С. Carathéodory. Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Functionen. *Rend. Palermo*, **32**, 1911, 193—217.
3. М. Крейн, А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М, 1973.
4. E. Steinitz. Über bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. *J. reine angew. Math.*, **143**, 1913, 128—175.
5. I. Singer. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Berlin 1970.
6. Н. Ахиезер, М. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, 1938.
7. Н. Красовский. Теория управления движением. М., 1968.
8. Б. Пшеничный. Необходимые условия экстремума. М., 1969.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 8. 7. 1985