Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СОСТОЯНИЕ И ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

КАРЛ-ХЕЙНЦ ФИХТНЕР, БЕРБЕЛЬ ШАК

В классической механике состояние частицы определено собственным положением q и импульсом p или скоростью v. В случае свободного движения положение $q(t)$ к моменту времени t задано соотношением $q(t)=q+\dot{v}\cdot t$. Таким образом состояние $[q, p]$ определено положениями $(q(t))_{t\geqq 0}$. Покажем, что возможно аналогичным образом характеризовать состояние частицы в квантовой механике. Это означает, что система измерений положения частицы (в любой момент времени $t\geqq 0$) определяет однозначно ее состояние. Из этого следует, что состояние определено фамилией $(Q_t)_{t\geqq 0}$ вероятностных мер, где Q_t описывает (случайное) положение частицы в момент времени t.

1. Постановка задачи и результаты. Состояние (здесь одномерной) квантово-механической частицы отождествляют с положительным самосопряженным оператором K на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}=L_2(R)$ со следом $Сл\, K=I$. Обозначим через $\mathscr{K}(\mathscr{H})$ множество всех таких операторов. Наблюдаемые квантово-механические частицы отождествляют самосопряженными операторами на $\mathscr{H}$. Обозначим через $\mathscr{S}(\mathscr{H})$ множество всех ограниченных самосопряженными операторами на $\mathscr{H}$. Состояние K определено всеми математическими ожиданиями $(Сл\ (AK))_{A\in\mathscr{S}(\mathscr{H})}$, т. е. для $K, K'\in\mathscr{K}(\mathscr{H})$ выполнено соотношение: $Сл(AK)=Сл(AK')$, для всех $A\in\mathscr{S}(\mathscr{H})$ и имеет место тогда и только тогда, когда $K=K'$. Измерения, дающие только информацию о положении частицы, отождествляют самосопряженными операторами типа

$$A\psi(x)=f(x)\,.\,\psi(x),$$

где f — определенная на R измеримая вещественная функция. Если f ограничена, то и A ограничен. Имеем $A=f(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ есть самосопряженный оператор вида $\mathcal{O}\psi(x)=x\,.\,\psi(x)$ и под $f(\mathcal{O})$ понимаем функцию оператора $\mathcal{O}$, определенную обычным образом с помощью спектрального представления. Пусть $\mathscr{F}=\{f(\mathcal{O})$: f ограничена и измерима$\}$. Для каждого состояния K существует одна и только одна вероятностная мера Q_k на R такая, что

$$\int f dQ_k = Сл(f(\mathcal{O})K),$$

для всех f, которые ограничены и измеримы. Q_k можно понимать как закон распределения положения частицы, находящейся в состоянии K.

Для заданного гамильтониана H на $\mathscr{H}$ обозначим через $U^H=(U_t^H)_{t\geq 0}$ полугруппу унитарных операторов, заданных через $U_t^H=\exp(-itH)$. Для каждого $t\geqq 0$ отождествляем фамилию ограниченных самосопряженных операторов $\mathscr{F}_t^H=\{U_t^{-1}AU_t : A\in\mathscr{F}\}$ с измерениями положения частиц в момент времени t. Вероятностная мера $Q_{k,t}^H$, для которой верно соотношение

$$\int f dQ_{k,t}^H = Сл(U_t^{-1}f(\mathcal{O})U_tK),$$

описывает положение частицы в момент t, если при $t=0$ частица находилась в состоянии K и динамика определялась гамильтонианом H. В частности имеем $\mathscr{F}_0^H=\mathscr{F}$

и $Q^H_{k,0}=Q_k$. Состояние K не определяется однозначным образом вероятностной мерой Q_k, т. е. из равенств

(1) $$Cл(AK)=Cл(AK') \quad \text{для всех } A\in\mathscr{F}$$

не следует, что состояние K и K' равны.

Возникает вопрос, следует ли из справедливости уравнения (1) для всех $A\in\mathscr{F}^H=\bigcup\limits_{t\geq 0}\mathscr{F}^H_t$, что K и K' равны? Это означало бы, что состояние K описывается фамилией распределений положения $(Q^H_{k,t})_{t\geq 0}$. В частности, состояния равновесия (относительно динамики, соответствующей H) K и K' равны, если (1) верно для всех $A\in\mathscr{F}$, т. е. если имеет место $Q_k=Q_{k'}$.
Следующий результат дает положительный ответ на поставленный вопрос в специальных случаях свободного движения и гармонического осциллятора.

Теорема. *Обозначим через* $\mathscr{P}(-id/dx)$ *оператор импульса на* $\mathscr{H}$. *Пусть* $H=(1/2)\mathscr{P}^2$ *или* $H=(1/2)\mathscr{P}^2+(\omega^2/2)\mathscr{O}^2$. *Для всех* $K, K'\in\mathscr{K}(\mathscr{H})$ *справедливо соотношение*: $K=K'$ *тогда и только тогда, когда* $Cл(AK)=Cл(AK')$ *для всех* $A\in\mathscr{F}^H$.

Замечание. Выражаем благодарность ван Геммену за полезную дискуссию и за конкретные указания по поводу литературных источников.

2. Доказательства. На гильбертовом пространстве $\mathscr{H}=L_2(R)$ обозначим через $\mathscr{O}$ оператор положения частицы, определенный равенством $\mathscr{O}\psi(x)=x.\psi(x)$, для всех $\psi\in\mathscr{D}(\mathscr{O})$, имеющий область определения

$$\mathscr{D}(\mathscr{O})=\{\psi(x)\in L_2(R): x.\psi(x)\in L_2(R)\}.$$

Оператор импульса $\mathscr{P}$ на $\mathscr{H}$ определен равенством

$$\mathscr{P}\psi(x)=-id\psi/dx, \quad \text{для всех } \psi\in\mathscr{D}(\mathscr{P}),$$

и имеет область определения $\mathscr{D}(\mathscr{P})=\{\psi\in L_2(R):\psi$ дифференцируемо и $d\psi/dx\in L_2(R)\}$. Пусть $\mathscr{S}(R)$ есть линейное многообразие всех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций ψ на R, для которых верно

$$\lim_{|x|\to\infty} x^n d^m\psi(x)/dx^m=0, \text{ для всех } m, n=0, 1, 2, \ldots .$$

$\mathscr{S}(R)$ лежит в пересечении областей определения операторов $\mathscr{O}$ и $\mathscr{P}$, $\mathscr{S}(R)$ устойчиво относительно операторов $\mathscr{O}$ и $\mathscr{P}$ и плотно в $L_2(R)$. Рассмотрим сужения на $\mathscr{S}(R)$ операторов $\mathscr{O}$ и $\mathscr{P}$ и положим

(2) $$\mathscr{W}_S=\{\sum_{j\in I} c_j\exp i(aO+b\mathscr{P}): a, b\in R,$$

I — конечное множество индексов, c_j — комплексное число для $j\in I\}$. $\mathscr{W}_S$ — так называемое представление Шредингера — является специальной алгеброй Вейля. $\mathscr{W}_S$ является неприводимой * — алгеброй (см., напр. [2]).

2.1. *Пусть* $T, S\in\mathscr{K}(\mathscr{H})$. *Если*

(3) $$Cл(WT)=Cл(WS), \quad \text{для всех } W\in\mathscr{W}_S,$$

то имеет место $T=S$.

Доказательство. Из неприводимости алгебры $\mathscr{W}_S$ следует ([1], лемма 2.3.8.), что коммутант $\mathscr{W}'_S$ алгебры $\mathscr{W}_S$, т. е. множество всех ограниченных операторов $\mathscr{H}$, коммутирующих со всеми элементами W из $\mathscr{W}_S$, является множеством операторов типа $\lambda\,\mathbf{1}$, где λ — комплексное число и $\mathbf{1}$ единичный оператор. Из этого следует, что для бикоммутанта имеем $\mathscr{W}''_S=\mathfrak{B}(\mathscr{H})$, где $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ есть множество всех ограниченных операторов на $\mathscr{H}$. По теореме о плотности фон Неймана ([1], лемма 2.4.15.) $\mathscr{W}_S$ плотно в своем бикоммутанте $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$ относительно σ-слабой топологии.

Обозначим через $\mathscr{T}(\mathscr{H})$ множество операторов с конечным следом. Сопряженное пространство $\mathscr{T}(\mathscr{H})^*$ совпадает с $\mathfrak{B}(\mathscr{H})$. * — топология $\sigma[\mathscr{T}(\mathscr{H}), \mathfrak{B}(\mathscr{H})]$ совпадает с σ-слабой топологией ([1], лемма 2.4.3.).

Итак, для каждого $A \in \mathscr{S}(\mathscr{H})$ существует последовательность $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ из $\mathscr{W}_S$ такая, что имеет место

$$Сл(A\tilde{T}) = \lim_{n\to\infty} Сл(W_n\tilde{T}), \text{ для всех } \tilde{T} \in \mathscr{T}(\mathscr{H}). \tag{4}$$

Так как $T, S \in \mathscr{K}(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{T}(\mathscr{H})$ из (3) и (4) получаем

$$Сл(AT) = \lim_{n\to\infty} Сл(W_nT) = \lim_{n\to\infty} Сл(W_nS) = Сл(AS).$$

Т. е. для всех $A \in \mathscr{S}(\mathscr{H})$ верно $Сл(AT) = Сл(AS)$ и таким образом имеет место $T = S$.

Пусть H—гамильтониан квантово-механической системы и $U^H = (U_t^H)_{t\geqq 0}$ — полугруппа унитарных операторов, где $U_t^H = \exp(-itH)$. Положим для $t \geqq 0$

$$\tilde{\mathscr{F}}_t^H = \{f((U_t^H)^{-1}\mathscr{O}U_t^H) : f \text{ — ограничен и измерим}\}. \tag{5}$$

Положим $\tilde{\mathscr{F}}^H = \bigcup_{\geqq} \tilde{F}_t^H$. Обозначим через $L(\cdot)$ комплексную линейную оболочку множества операторов.

2.2. *Пусть* $H = 1/2\mathscr{P}^2 + \omega^2/2\mathscr{O}^2$ *с областью определения* $\mathscr{D}(H) = C_0^\infty(R)$. *Тогда имеет место включение*

$$\mathscr{W}_S \subseteq L(\{\exp i\alpha((U_t^H)^{-1}\mathscr{O}U_t^H) : t \geqq 0, \ \alpha \in R\}).$$

Доказательство: Эволюция по времени оператора положения частицы $\mathscr{O}$ в квантово-механической системе гармонического осциллятора описывается равенством $(U_t^H)^{-1}\mathscr{O}U_t^H = \cos(\omega t)\mathscr{O} + \frac{\sin\omega t}{\omega}\mathscr{P}$, $\forall t \geqq 0$. Так как $(\alpha\cos\omega t, \ \alpha/\omega\sin\omega t)_{\alpha\in R, t\geqq 0}$ пробегает все пространство R^2, то для каждой пары $(a, b) \in R^2$ существуют $\alpha \in R$ и $t \geqq 0$, такие что имеет место равенство:

$$\exp i(a\mathscr{O} + b\mathscr{P}) = \exp i\alpha\left(\cos(\omega t)\mathscr{O} + \frac{\sin\omega t}{\omega}\mathscr{P}\right) = \exp i\alpha((U_t^H)^{-1}\mathscr{O}U_t^H).$$

Следовательно, по определению (2), имеет место включение

$$\mathscr{W}_S \subseteq L(\{\exp i\alpha((U_t^H)^{-1}\mathscr{O}U_t^H) : t \geqq 0, \ \alpha \in R\}).$$

2.3. *Пусть* $H = (1/2)\mathscr{P}^2$ *с областью определения* $\mathscr{D}(H) = C_0^\infty(R)$. *Тогда имеет место включение* $\mathscr{W}_S \subseteq L(\{\exp i\alpha((U_t^H)^{-1}\mathscr{O}U_t^H), \ t \geqq 0, \ \alpha \in R\})$.

Доказательство: В случае свободного движения получаем для эволюции по времени оператора положения частицы $\mathscr{O}$, что $(U_t^H)^{-1}\mathscr{O}U_t^H = \mathscr{O} + t\mathscr{P}$, для всех $t \geqq 0$. Непосредственно видно, что для каждой пары $(a, b) \in R^2$, существуют $\alpha \in R$ и $t \geqq 0$ такие, что имеет место равенство

$$\exp i(a\mathscr{O} + b\mathscr{P}) = \exp i\alpha(\mathscr{O} + t\mathscr{P}) = \exp i\alpha((U_t^H)^{-1}\mathscr{O}U_t^H).$$

Из этого следует утверждение 2.3.

Доказательство теоремы:

1. Шаг. Покажем, что $\tilde{\mathcal{F}}^H \subseteq \mathcal{F}^H$. Действительно, известно, что $[\mathcal{O}, A]=0$, для всех $A \in \mathcal{F}$. (Заметим, что $[\mathcal{O}, A]=\mathcal{O}A-A\mathcal{O}$.) Тогда для всех $t \geqq 0$ имеет место равенство $[(U_t^H)^{-1}\mathcal{O}U_t^H, A]=0$, для всех $A \in \mathcal{F}_t^H$. Из этого следует,

$$[B, A]=0, \quad \text{для всех } A \in \mathcal{F}_t^H, \ B \in \tilde{\mathcal{F}}_t^H. \tag{6}$$

Пусть $B \in \tilde{\mathcal{F}}_t^H$. Согласно (6), имеем $[U_t^H B(U_t^H)^{-1}, U_t^H A(U_t^H)^{-1}]=0$, для всех $A \in \mathcal{F}_t^H$. Это эквивалентно утверждению

$$[U_t^H B(U_t^H)^{-1}, A]=0, \text{ для всех } A \in \mathcal{F}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что $U_t^H B(U_t^H)^{-1} \in \mathcal{F}$. Это возможно только если $B \in \mathcal{F}_t^H$.

2. Шаг. Образование следа есть линейная операция. Поэтому утверждение теоремы в случае $H=(1/2)\mathcal{P}^2+(\omega^2/2)\mathcal{O}^2$ следует непосредственно из 2.1 и 2.2, а в случае $H=(1/2)\mathcal{P}^2$ из 2.1 и 2.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Bratteli, D. W. Robinson. Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, 1—2. Berlin, 1981.
2. Ж. Эмх. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М., 1976.
3. E. Fick. Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie. Leipzig, 1968.
4. H. Triebel. Höhere Analysis. Berlin, 1972.

Унив. им. Шиллера, сек. математика
гр. Йена 69 ГДР

Поступила 12. 7. 1985