Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

АНАЛОГ МЕТОДА ДОЧЕВА — БЫРНЕВА ДЛЯ ДВУХСТОРОННЕГО УТОЧНЕНИЯ ВСЕХ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

НИКОЛАЙ В. КЮРКЧИЕВ

Доказана кубическая сходимость одной итерационной схемы типа Дочева — Бырнева для одновременного двухстороннего приближения всех корней алгебраического уравнения.

В последние годы большое внимание уделяется исследованию таких методов, которые дают возможность строить монотонные последовательности приближений, ограничивающих решение сверху и снизу. Двухсторонние методы дают возможность легко определять оценки погрешности приближенного решения и контролировать счет. В [4—6] исследуются некоторые двухсторонние методы для одновременного уточнения корней данного алгебраического уравнения. Можно продолжить эти исследования.

Пусть дано алгебраическое уравнение $f(x)=0$ степени n, не имеющее кратных корней:

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0. \tag{1}$$

Пусть для итерационного решения уравнения (1) задан процесс:

$$\begin{aligned}
&\overline{x}_i^{(k+1)}=\overline{x}_i^{(k)}-2f(\overline{x}_i^{(k)})/\Big(\prod_{j=1}^{i-1}(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})\prod_{j=i+1}^{n}(\overline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)})\Big)\\
&+f(\overline{x}_i^{(k)})\Big(f'(\overline{x}_i^{(k)}-f(\overline{x}_i^{(k)})\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})^{-1}\Big)/\Big(\prod_{j=1}^{i-1}(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})^2\prod_{j=i+1}^{n}(\overline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)})^2\Big),\\
&\underline{x}_i^{(k+1)}=\underline{x}_i^{(k)}-2f(\underline{x}_i^{(k)})/\Big(\prod_{j=1}^{i-1}(\underline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})\prod_{j=i+1}^{n}(\underline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)})\Big)\\
&+f(\underline{x}_i^{(k)})\Big(f'(\underline{x}_i^{(k)})-f(\underline{x}_i^{(k)})\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\underline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)})^{-1}\Big)/\Big(\prod_{j=1}^{i-1}(\underline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)})^2\prod_{j=i+1}^{n}(\underline{x}_i^{k}-x_j^{(k)})^2\Big)\\
&\qquad i=1,\ldots,n;\quad k=0,1,\ldots
\end{aligned} \tag{2}$$

Предполагаем, что последовательные приближения $\underline{x}_i^{(k)}$ и $\overline{x}_i^{(k)}$ лежат по разным сторонам от корня x_i ($\underline{x}_i^{(k)}<x_i<\overline{x}_i^{(k)}$); $i=1,\ldots,n$. (Это включение для процесса (2), мы будем показывать.) Формула (2) является модификацией метода Дочева — Бырнева [1—3]. Сейчас выясним вопрос о скорости сходимости последовательности $\underline{x}_i^{(k)}$ и $\overline{x}_i^{(k)}$ из (2). Для этого нам потребуется следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть* $0<q<1$, $d=\min\limits_{i\neq j}|x_i-x_j|$ *и* $c>0$ *такое, что выполнено*

$$0<cnA/(d-2c)<1, \tag{3}$$

где A *является корнем уравнения*

$$A^2=\exp(4/A)(4+1/n+4\exp(1/A)+\exp(2/A)). \tag{4}$$

 СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 12, 1986, с. 305—308.

Если начальные приближения $\{\underline{x}_i^{(0)}\}_1^n$, $\{\overline{x}_i^{(0)}\}_1^n$ *к корням уравнения* $f(x)=0$ *удовлетворяют неравенствам*

$$
\begin{aligned}
&0\leqq \overline{x}_i^{(0)}-x_i\leqq cq,\\
&0\leqq x_i-\underline{x}_i^{(0)}\leqq cq; \quad i=1,\ldots,n,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

то процесс (2) *имеет порядок сходимости* $\tau=3$, *т. е. для всех* k *будем иметь:*

$$0\leqq \overline{x}_i^{(k)}-x_i\leqq cq^{3^k}, \tag{6а}$$

$$0\leqq x_i-\underline{x}_i^{(k)}\leqq cq^{3^k}; \quad i=1,\ldots,n. \tag{6б}$$

Доказательство. Докажем неравенства (6а) методом математической индукции. Для разности $\overline{x}_i^{(k+1)}-x_i$, получаем:

$$
\begin{aligned}
\overline{x}_i^{(k+1)}-x_i &= \overline{x}_i^{(k)}-x_i-2f(\overline{x}_i^{(k)})/\Big(\prod_{j=1}^{i-1}(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})\prod_{j=i+1}^{n}(\overline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)})\Big)\\
&+f^2(\overline{x}_i^{(k)})\Big(\sum_{j=1}^{n}(\overline{x}_i^{(k)}-x_j)^{-1}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})^{-1}\Big)/\Big(\prod_{j=1}^{i-1}(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})^2\prod_{j=i+1}^{n}(\overline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)})^2\Big)\\
&=(\overline{x}_i^{(k)}-x_i)\Big(1-2\prod_{j=1}^{i-1}((\overline{x}_i^{(k)}-x_j)/(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)}))\prod_{j=i+1}^{n}((\overline{x}_i^{(k)}-x_j)/(\overline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)}))\\
&+\prod_{j=1}^{i-1}((\overline{x}_i^{(k)}-x_j)/(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)}))^2\prod_{j=i+1}^{n}((\overline{x}_i^{(k)}-x_j)/(\overline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)}))^2-(\overline{x}_i^{(k)}-x_i)\prod_{j=1}^{i-1}((\overline{x}_i^{(k)}-x_j)\\
&/(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)}))^2\prod_{j=i+1}^{n}((\overline{x}_i^{(k)}-x_j)/(\overline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)}))^2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\underline{x}_j^{(k)}-x_j)(\overline{x}_i^{(k)}-x_j)^{-1}(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})^{-1}\Big)\\
&=(\overline{x}_i^{(k)}-x_i)\Big(\Big(1-\prod_{j=1}^{i-1}(\overline{x}_i^{(k)}-x_j)(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})^{-1}\prod_{j=i+1}^{n}(\overline{x}_i^{(k)}-x_j)(\overline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)})^{-1}\Big)^2\\
&+(\overline{x}_i^{(k)}-x_i)\prod_{j=1}^{i-1}((\overline{x}_i^{(k)}-x_j)/(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)}))^2\prod_{j=i+1}^{n}((\overline{x}_i^{(k)}-x_j)/(\overline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)}))^2\\
&\times\sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n}(x_j-\underline{x}_j^{(k)})(\overline{x}_i^{(k)}-x_j)^{-1}(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})^{-1}\Big).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Введем следующие обозначения:

$$\Pi_1=\prod_{j=1}^{i-1}(\overline{x}_i^{(k)}-x_j)(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})^{-1}; \quad \Pi_2=\prod_{j=i+1}^{n}(\overline{x}_i^{(k)}-x_j)(\overline{x}_i^{(k)}-\overline{x}_j^{(k)})^{-1},$$

$$S_{k,i}=(\overline{x}_i^{(k)}-x_i)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_j-\underline{x}_j^{(k)})(\overline{x}_i^{(k)}-x_j)^{-1}(\overline{x}_i^{(k)}-\underline{x}_j^{(k)})^{-1}.$$

Из (7) получаем

$$\overline{x}_i^{(k+1)}-x_i=(\overline{x}_i^{(k)}-x_i)((1-\Pi_1\Pi_2)^2+(\Pi_1\Pi_2)^2S_{k,i}).$$

Но $S_{k,i}\geqq 0$, следовательно, $\overline{x}_i^{(k+1)}-x_i\geqq 0$. Аналогично получаем, что $0\leqq x_i-\underline{x}_i^{(k+1)}$. Видно, что

$$\overline{x}_i^{(k+1)} - x_i = (\overline{x}_i^{(k)} - x_i)\Big(\Big(\sum_{s=1}^{i-1} (\underline{x}_s^{(k)} - \overline{x}_s^{(k)})(\overline{x}_i^{(k)} - \underline{x}_s^{(k)})^{-1} \prod_{j=1}^{s-1} (\overline{x}_i^{(k)} - \overline{x}_j^{(k)})(\overline{x}_i^{(k)} - \underline{x}_j^{(k)})^{-1}$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} ((\overline{x}_s^{(k)} - x_s)/(\overline{x}_i^{(k)} - \overline{x}_s^{(k)})) \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s-1} (\overline{x}_i^{(k)} - x_j)(\overline{x}_i^{(k)} - \overline{x}_j^{(k)})^{-1} \prod_{j=1}^{i-1} (\overline{x}_i^{(k)} - \overline{x}_j^{(k)})(\overline{x}_i^{(k)} - \underline{x}_j^{(k)})^{-1}\Big)^2 \cdot$$

$$+ (\overline{x}_i^{(k)} - x_i) \prod_{j=1}^{i-1} ((\overline{x}_i^{(k)} - x_j)/(\overline{x}_i^{(k)} - \underline{x}_j^{(k)}))^2 \prod_{j=i+1}^{n} ((\overline{x}_i^{(k)} - x_j)/$$

$$(\overline{x}_i^{(k)} - \overline{x}_j^{(k)}))^2 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (x_j - \underline{x}_j^{(k)})(\overline{x}_i^{(k)} - x_j)^{-1}(\overline{x}_i^{(k)} - \underline{x}_j^{(k)})^{-1}\Big).$$

Учитывая ограничения (3), (4), получаем:

$$|\overline{x}_i^{(k+1)} - x_i| \leqq cq^{3^k} \Big(q^{2\cdot 3^k} (2A^{-1}\exp(2/A) + A^{-1}\exp(3/A))^2 + q^{2\cdot 3^k}\frac{1}{n} A^{-2}\exp(4/A)\Big)$$

$$= cq^{3^{k+1}} A^{-2}(4 + 4\exp(1/A) + \exp(2/A) + 1/n)\exp(4/A) = cq^{3^{k+1}}.$$

Неравенство (6б) доказывается аналогично. Этим завершается индуктивное доказательство об оценке скорости сходимости.

Ниже приведены некоторые значения $A = A(n)$: $n = 2$; $A = 4.9458\ldots$ $n = 4$; $A = 4.90714\ldots$ $n = 10$; $A = 4.8838\ldots$ $n = 100$; $A = 4.8697\ldots$ $n = 1000$; $A = 4.8683\ldots$

Используя результаты работы [7], выводим другую итерационную формулу для двухстороннего приближения:

$$\overline{x}_i^{(k+1)} = \overline{x}_i^{(k)} - f(\overline{x}_i^{(k)})/\Big(\prod_{j=1}^{i-1} (\overline{x}_i^{(k)} - \underline{z}_j^{(k)}) \prod_{j=i+1}^{n} (\overline{x}_i^{(k)} - \overline{z}_j^{(k)})\Big), \tag{8}$$

$$\underline{x}_i^{(k+1)} = \underline{x}_i^{(k)} - f(\underline{x}_i^{(k)})/\Big(\prod_{j=1}^{i-1} (\underline{x}_i^{(k)} - \underline{z}_j^{(k)}) \prod_{j=i+1}^{n} (\underline{x}_i^{(k)} - \overline{z}_j^{(k)})\Big), \quad i = 1, \ldots, n; \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где через $[\underline{z}_i^{(k)}, \overline{z}_i^{(k)}]_1^n$ обозначены последовательности, получаемые методом исследования в [4]. Отметим, что в работе [3] обсуждаются общие приемы конструирования таких схем повышенного порядка сходимости.

В [4] показано, что процесс:

$$\overline{x}_i^{(k+1)} = \overline{x}_i^{(k)} - f(\overline{x}_i^{(k)})/\Big(f'(\overline{x})^{(k)} - f(\overline{x}_i^{(k)}) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (1/(\overline{x}_i^{(k)} - \underline{x}_j^{(k)}))\Big), \tag{9}$$

$$\underline{x}_i^{(k+1)} = \underline{x}_i^{(k)} - f(\underline{x}_i^{(k)})/\Big(f'(\underline{x}_i^{(k)}) - f(\underline{x}_i^{(k)}) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (1/(\underline{x}_i^{(k)} - \overline{x}_j^{(k)}))\Big), \quad (i = 1, \ldots, n; \quad k = 0, 1, \ldots)$$

сходится с кубической скоростью. Отметим, что улучшение итерационного процесса (9) можно получить следующим образом. Обозначим через δ_j:

$$\delta_j = -f(x_j^{(k)})/\Big(f'(x_j^{(k)}) - f(x_j^{(k)}) \sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} (1/(x_j^{(k)} - x_l^{(k)}))\Big),$$

тогда метод порядка сходимости $\tau = 4$ описывается следующей формулой:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - f(x_i^{(k)})/\Big(f'(x_i^{(k)}) - f(x_i^{(k)}) \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} \frac{1}{x_i^{(k)} - x^{(k)}{}_j - \delta_j}\Big), \tag{10}$$

$$(i=1, \dots, n; \quad k=0, 1, \dots).$$

Общие итерационные схемы можно получить из следующих формул:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - f(x_i^{(k)})/(f'(x_i^{(k)}) - f(x_i^{(k)}) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (1/(x_i^{(k)} - x_j^{(k)} + f(x_j^{(k)})/(f'(x_j^{(k)}) - f(x_j^{(k)}) \tag{11}$$

$$\times \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} (1/(x_j^{(k)} - x_l^{(k)} + f(x_l^{(k)}) / f'(x_l^{(k)}) - f(x_l^{(k)}) \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq l}}^{n} (1/(x_l^{(k)} - x_\mu^{(k)} + \dots))))))))/$$

$$(i=1, \dots, n; \quad k=0, 1, \dots).$$

Интуитивно ясно, что из (11) мы пришли к следующей процедуре пятого порядка для двухстороннего приближения:

$$\overline{x}_i^{(k+1)} = \overline{x}_i^{(k)} - f(\overline{x}_i^{(k)})/(f'(\overline{x}_i^{(k)}) - f(\overline{x}_i^{(k)}) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (1/(\overline{x}_i^{(k)} - \underline{x}_j^{(k)} + f(\underline{x}_j^{(k)})/(f'(\underline{x}_j^{(k)}) - f(\underline{x}_j^{(k)})$$

$$\times \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} (1/(\underline{x}_i^{(k)} - \overline{x}_l^{(k)}))))), \quad \underline{x}_i^{(k+1)} = \underline{x}_i^{(k)} - f(\underline{x}_i^{(k)})/(f'(\underline{x}_i^{(k)}) - f(\underline{x}_i^{(k)}) \tag{12}$$

$$\times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (1/(\underline{x}_i^{(k)} - \overline{x}_j^{(k)} + f(\overline{x}_j^{(k)})/(f'(\overline{x}_j^{(k)}) - f(\overline{x}_j^{(k)}) \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{n} (1/(\overline{x}_j^{(k)} - \underline{x}_l^{(k)}))))),$$

$$(i=1, \dots, n; \; k=0, 1, \dots).$$

Таким образом, метод корректировки можно рассматривать как один из способов улучшения скорости сходимости методов для одновременного двухстороннего уточнения всех корней данного алгебраического уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Дочев, П. Барнев. О некоторых модификациях метода Ньютона для приближенного решения алгебраических уравнений. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, **4**, 1964, 915—920.
2. Х. Семерджиев. Методы одновременного приближенного нахождения всех корней данного алгебраического уравнения. *Сообщения ОИЯИ*, Дубна, Р5—12485, 1979, 3—8.
3. Н. Кюркчиев. О некоторых итерационных схемах Дочевского типа с повышенной скоростью сходимости. *Год. Соф. унив., мат. фак.*, **76** (в печати).
4. N. Kjurkchiev, Sv. Markov. Two interval methods for algebraic equations with real roots. *Pliska*, **5**, 1983, 118—131.
5. N. Kjurkchiev, Sv. Markov. A two-sided analogue of a method of A. W. Neurein for solving an algebraic equation with practically guaranteed accuracy. *Annuaire Univ. Sofia, Fac. Math.-mech.*, **77** (в печати).
6. Н. Кюркчиев. Вычислительные аспекты и область применимости методов для одновременного нахождения всех корней алгебраических уравнений. *Год. Соф. унив., мат. фак.*, **77** (в печати).
7. M. S. Petkovic, G. Milovanovic. A note on some improvements of the simultaneous methods for determination of polynomial zeros. *J. Comput. Appl. Math.*, **9**, 1983, 65—69.

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. Я. 373*

Поступила 28. 3. 1984.