Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЭФФЕКТ ГИББСА ДЛЯ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

Е. П. ЖИДКОВ, А. СТ. АНДРЕЕВ, В. А. ПОПОВ

В этой работе рассматривается эффект Гиббса для параболической сплайн-интерполяции и для численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом параболической и кубической сплайн-коллокации.

1. Эффект Гиббса для кубической сплайн-интерполяции рассмотрен в [1]. Напомним в чем он состоит. Пусть σ_a — функция, заданная через

$$\sigma_a(x)=\begin{cases}0, & 0\leqq x<a,\\ 1, & a\leqq x\leqq 1.\end{cases}$$

Рассмотрим кубические интерполяционные сплайны для σ_a. Пусть $x_i=ih$, $h=1/n$, $i=0,1,\dots,n$ и g_n — кубический сплайн с узлами x_i, $i=0,1,\dots,n$, интерполирующий σ_a в точках x_i (т. е. $g_n\in C^2[0,1]$; в каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,n-1$, g_n является алгебраическим многочленом третьей степени, удовлетворяющим краевым условиям $g_n'(0)=g_n'(1)=0$ или $g_n''(0)=g_n''(1)=0$ и $g_n(x_i)=\sigma_a(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$. Тогда в окрестности точки a имеет место эффект Гиббса. Точнее

$$\lim_{n\to\infty}\,(\sup_{x\in[a,1]} g_n(x)-1)=-\lim_{n\to\infty}\,\inf_{x\in[0,a]} g_n(x)=0{,}106984\dots \tag{1}$$

Имеет место также

Теорема А [1]. *Для $x\in[0,1]$ имеет место неравенство*

$$|\sigma_a(x)-g_n(x)|\leqq\frac{3}{2(2-\sqrt{3})}(2-\sqrt{3})^{|a-x|n}.$$

Следствие. *Для $1\leqq p<\infty$ имеем* $\|\sigma_a-g_n\|_{L_p}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Рассмотрим теперь эффект Гиббса для параболической сплайн-интерполяции равноотстоящими узлами. Пусть S_n определяется через:

1) $S_n(x_i)=\sigma_a(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$, $x_i=i/n$;

2) $S_n\in C^1[0,1]$;

3) в каждом интервале $(\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,n$, $\bar{x}_i=(x_{i-1}+x_i)/2$, $i=1,2,\dots,n$, $\bar{x}_0=0$, $\bar{x}_{n+1}=1$, S_n является алгебраическим многочленом второй степени;

4) $S_n''(0)=S_n''(1)=0$.

Хорошо известно, что такой параболический интерполяционный сплайн существует и определяется единственным образом из условий 1)—4) (см., например [2]).

Для удобства вычислений в дальнейшем изменим индексацию точек x_i в зависимости от точки a, полагая:

$$0=x_{-k}<x_{-k+1}<\dots<x_0<a\leqq x_1<x_2<\dots x_l=1,\ k+l=n,$$

$$x_{i+1}-x_i=h=1/n,\ \bar{x}_i=(x_{i-1}+x_i)/2,\ \bar{x}_{-k}=0,\ \bar{x}_{l+1}=1,\ -k+1\leqq i\leqq l.$$

СЕРДИКА Българско математическо списание, Том 12. 1986, с. 315—320.

В интервале $[x_i, x_{i+1}]$ S_n имеет вид (см. [2], с. 35):

(2) $$S_n(x)=\sigma_a(x_i)+m_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-\bar{x}_{i+1})_+^2,$$

где $d_+^2=\begin{cases}0, & d\leq 0\\ d^2, & d>0\end{cases}$.

Из $S_n(x_{i+1})=\sigma_a(x_{i+1})=\sigma_{i+1}$, $S_n'(x_{i+1})=m_{i+1}$ следует (см. [2], с. 37, сеть равномерная):

(3) $$m_{i-1}+\sigma_{m_i}+m_{i+1}=4\frac{\sigma_{i+1}-\sigma_i}{h}+4\frac{\sigma_i-\sigma_{i-1}}{h}.$$

В дальнейшем будем считать, что n столь велико, что $1/n<a_1<1-1/n$, т. е. $k\geq 1$, $l\geq 2$
Из (3) следует, что

(4) $$\begin{gathered}m_i=A_1\alpha_1^{i-1}+A_2\alpha_2^{i-1},\ i=1,2,\ldots,l,\\ m_{-i}=B_1\alpha_1^i+B_2\alpha_2^i,\ i=0,1,\ldots,k,\end{gathered}$$

где $\alpha_1=-3+2\sqrt{2}$ и $\alpha_2=-3-2\sqrt{2}$ являются нулями уравнения $\alpha^2+6\alpha+1=0$.
Из условия $S_n''(0)=S_n''(-1)=0$ получаем (см. [2], с. 38):

$$3m_{-k}+m_{-k+1}=0,\ m_{l-1}+3m_l=0.$$

Из этих равенств и (4) получаем

(5) $$A_2=-\frac{1+3\alpha_1}{1+3\alpha_2}\alpha_1^{2l-4}A_1,\ B_2=-\frac{1+3\alpha_1}{1+3\alpha_2}\alpha_1^{2k-2}B_1.$$

Равенства (4) и (5) дают:

(6) $$\begin{gathered}m_i=A_1\alpha_1^{i-1}(1+c\alpha_1^{2l-2i-2}),\ i=1,2,\ldots,l,\\ m_{-i}=B_1\alpha_1^i(1+c\alpha_1^{2k-2i-2}),\ i=0,1,\ldots,k,\end{gathered}$$

где $c=-(1+3\alpha_1)/(1+3\alpha_2)$.
Определим теперь A_1 и B_1. Из (3) получаем:

(7) $$m_0+6m_1+m_2=4/h,\ m_{-1}+6m_0+m_1=4/h.$$

Ввиду (4), (5) система (7) эквивалентна системе

(8) $$\begin{gathered}A_1(6+\alpha_1+6c\alpha_1^{2l-4}+c\alpha_1^{2l-3})+B_1(1+c\alpha_1^{2k-2})=4/h,\\ A_1(1+c\alpha_1^{2l-4})+B_1(6+\alpha_1+c\alpha_1^{2k-3}+6c\alpha_1^{2k-2})=4/h.\end{gathered}$$

Из (8) получаем:

(9) $$A_1=\frac{1}{h}\cdot\frac{20+4\alpha_1+t_1}{34+6\alpha_1+t},\ B_1=\frac{1}{h}\cdot\frac{20+4\alpha_1+t_2}{34+6\alpha_1+t},$$

где $t=6s+\alpha_1s+6r+\alpha_1r+rs-p-q-pq$, $t_1=4s-4p$, $t_2=4r-4q$,

(10) $$r=6c\alpha_1^{2l-4}+c\alpha_1^{2l-3},\ p=c\alpha_1^{2k-2},\ q=c\alpha_1^{2l-4},\ s=c\alpha_1^{2k-3}+6c\alpha_1^{2k-2}.$$

Функция S_n' обращается в нуль только в одной точке $\tilde{x}_i\in[x_i, x_{i+1}]$, $i=1,\ldots l-1$.
Пусть $S_n'(\tilde{x}_i)=0$. Имеют место две возможности: а) $\tilde{x}_i\in[x_i, \bar{x}_{i+1}]$, $\bar{x}_{i+1}=(x_i+x_{i+1})/2$; б) $\tilde{x}\in[\bar{x}_{i+1}, x_{i+1}]$.

Из (2) в случае а) получаем:

(11) $$S_n'(\tilde{x}_i)=m_i+2c_i(\tilde{x}_i-x_i)=0,$$

а в случае б) (обозначая тогда соответствующий нуль через $\approx\atop{x_i}$) —

$$S_n'(\tilde{\tilde{x}}_i)=m_i+2c_i(\tilde{\tilde{x}}_i-x_i)+2d_i(\tilde{\tilde{x}}_i-\bar{x}_{i+1})=0. \tag{12}$$

Из [2], с. 35, 36, следует, что для функции σ_a имеют место равенства:

$$c_i=-\frac{3m_i+m_{i+1}}{2h},\ c_i+d_i=c_{i+1},\ d_i=\frac{2(m_i+m_{i+1})}{h}. \tag{13}$$

Из (11) и (13) получаем

$$\tilde{x}_i=x_i+\frac{m_i}{3m_i+m_{i+1}}h, \tag{14}$$

а из (12) и (13) получаем

$$\tilde{\tilde{x}}_i=\bar{x}_{i+1}-\frac{m_{i+1}+m_i}{3m_{i+1}+m_{i+2}}\cdot\frac{h}{2}. \tag{15}$$

Из представления m_i в (6) получаем:

$$0<\frac{m_i}{3m_i+m_{i+1}}<,\ \frac{1}{2}-\frac{m_i+m_{i+1}}{3m_{i+1}+m_{i+2}}>1,$$

а (14), (15) дают нам

$$\tilde{x}_i\in[x_i,\ \bar{x}_{i+1}],\ \tilde{\tilde{x}}_i\,\bar{\in}\,[\bar{x}_{i+1},\ x_{i+1}].$$

Следовательно, б) не может иметь место и $\tilde{x}_i=x_i+m_ih/(3m_i+m_{i+1})$.
Из (13), (6) и (9) получаем: $\operatorname{sign}c_i=-\operatorname{sign}m_i=(-1)^i$, $i=1, 2, \dots, l$. Ввиду $\operatorname{sign}S_n''(\tilde{x}_i)=\operatorname{sign}c_i=(-1)^i$ получаем, что S_n имеет последовательные локальные минимумы и максимумы в интервалах $[x_i,\ x_{i+1}]$, $i=1, 2, \dots, l-1$. В интервале $[x_i, x_{i+1}]$ из (6), (9) и (14) находим:

$$\begin{aligned}S_n(\tilde{x}_i)&=1+m_i\frac{m_i}{3m_i+m_{i+1}}h-\frac{3m_i+m_{i+1}}{2h}\cdot\frac{h^2m_i^2}{(3m_i+m_{i+1})^2}\\&=1+\frac{3m_i^2h}{2(3m_i+m_{i+1})}=1+\alpha_1^{i-1}\cdot\frac{(20+4\alpha_1+t_1)(1+a\alpha_1^{2l-2i-2})^2}{2(34+6\alpha_1+t)(3+\alpha_1+3a\alpha_1^{2l-2i-2}+a\alpha_1^{2l-2i-3})}=1+c(i)\alpha_1^{i-1}.\end{aligned} \tag{16}$$

В интервале $[x_1, x_2]$ при $h\to\infty$ (т. е. при $k\to\infty$, $l\to\infty$, $i=1$) получаем:

$$\lim_{n\to\infty}S_n(\tilde{x}_i)=1+\frac{20+4\alpha_1}{2(34+6\alpha_1)(3+\alpha_1)}=1+\frac{\sqrt{2}-1}{4}. \tag{17}$$

Из сделанных рассуждений следует, что в интервале $[x_0, x_1]$ функция S_n' не обращается в нуль, т. е.

$$0\le S_n(x)\le 1 \text{ для } x\in[x_0, x_1]\ (S_n(x_0)=0,\ S_n(x_1)=1). \tag{18}$$

Из (16) следует, что для $x\in[x_i, x_{i+1}]$, $i=1, 2, \dots, l-1$, имеем:

$$|S_n(x)-\sigma_a(x)|\le|\alpha_1|^{i-1}c(i)\le c\,|\alpha_1|^{i-1}, \tag{19}$$

где c — абсолютная постоянная. Можем считать, что $c\ge 1$.

Так как для $x\in[x_i,\ x_{i+1}]$, $i=1, 2, \dots, l-1$, выполнено $a+\frac{i}{n}\le x$ и, следовательно, $i-1<(x-a)n-1$ из (19) получаем

$$|S_n(x)-\sigma_a(x)|\leqq\frac{c}{|\alpha_1|}|\alpha_1|^{|x-a|n}. \tag{20}$$

Аналогично получается, что (20) имеет место и для $x\in[x_i, x_{i+1}]$, $i=-k, -k+1,\dots,-1$. Из (18) и (20) следует

Теорема 1. *Параболический интерполяционный сплайн S_n для функции σ_a, удовлетворяющий условиям (1—4), удовлетворяет $|S_n(x)-\sigma_a(x)|\leqq cq^{|x-a|n}$, $x\in[0,1]$, где $q=3-2\sqrt{2}$, а c — абсолютная постоянная.*

Равенство (17) дает нам

Теорема 2. *Для параболического интерполяционного сплайна для функции σ_a имеет место эффект Гиббса величиной $100\frac{\sqrt{2}-1}{4}$% от величины скачка.*

Из теоремы 1 сразу получаем

Следствие. *Имеет место* $\|S_n-\sigma_a\|_{L_p}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $1\leqq p<\infty$.

Обозначим через Q класс функций Φ, кусочно-непрерывных на отрезке $[0,1]$, которые имеют на отрезке $[0,1]$ только конечное число разрывов первого рода $\Phi(x+0)=\Phi(x)$. Для любой функции $\Phi\in Q$ имеет место представление

$$\Phi=g+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_{a_i},\ n<\infty,\ g\in C_{[0,1]},$$

где $\sigma_a(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ 1, & x\geqq a.\end{cases}$

Так как интерполяционный оператор является линейным оператором, то из сходимости интерполяционных параболических и кубических сплайнов при равномерной сетке для любой непрерывной функции (см., например [2]), теоремы А, 1, 2 и следствия получаем:

Теорема 3. *Пусть $\Phi\in Q$. Тогда для параболической и кубической сплайн-интерполяции при равномерной сетке и при нулевых краевых условиях для вторых производных сплайна в концах интервала имеем сходимость интерполяционных сплайнов к функции Φ в L_p $1\leqq p<\infty$, при $n\to\infty$ (n — число узлов интерполяции).*

В точках разрывов функции Φ имеет место эффект Гиббса величиной $100\frac{\sqrt{2}-1}{4}\%\approx10\%$ скачка для параболической сплайн-интерполяции и $\approx10{,}698$% для кубической сплайн-интерполяции.

Рассмотрим теперь интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$y(x)-\lambda\int_0^1 k(x,t)\,y(t)dt=\Phi(t). \tag{21}$$

В дальнейшем будем считать, что $\Phi\in Q$, $k\in Q$ (по обеим переменным). Как следствие y тоже принадлежит классу Q.

Будем решать уравнение (21) методом сплайн-коллокации (см. [2], с. 213). Точнее, пусть n — натуральное число, $h=1/n$, $x_i=ih$, $i=-1,0,\dots,n+1$. Для параболических сплайнов полагаем $S_2(x)=\Sigma_{k=-1}^{n+1}d_kB_k(x)$,
где $B_0(x)=\frac{h^{-2}}{2}\Sigma_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{k}\left(x+\frac{3h}{2}-kh\right)_+^2$, $B_k(x)=B_0(x-kh)$, а для кубических сплайнов $S_3(x)=\Sigma_{k=-1}^{n+1}C_kD_k(x)$,
где

$$D_0(x)=\frac{h^{-3}}{6}\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{4}{k}(x+2h-kh)_+^3,\ D_k(x)=D_0(x-kh).$$

Коэффициенты d_k, C_k определяются из краевого условия $S_2''(0)=S_2''(1)=0$ $(S_3''(0)=S_3''(1)=0)$ и условия коллокации в точках x_i, $i=0, 1, \ldots, n$,

$$S_k(x_i)=\varphi(x_i)+\lambda\int_0^+ k(x_i, t)\, S_k(t)\, dt,\ k=2, 3. \tag{22}$$

Пусть $S_{n,k}$, $k=2,3$ — интерполяционый параболический (соотв. кубический) сплайн, интерполирующий y в точках $x_i=ih$, $i=0, \ldots, n$, $h=1/n$, удовлетворяющий соответствующим краевым условиям $S''_{n,k}(0)=S''_{n,k}(1)=0$, $k=2, 3$.
Тогда (сн. [2], с. 214)

$$S_{n,k}(x_i)=\varphi(x_i)+\lambda\int_0^1 k(x_i, t)\, S_{n,k}(t)\, dt + \lambda\int_0^1 k(x_i, t)\,(y(t)-S_{n,k}(t))\, dt. \tag{23}$$

Полагаем $\varphi_n(x)=S_{n,k}(x)-S_k(x)$ (S_k удовлетворяет (22)), $\|\varphi_h\|_c=\max\limits_{x\in[0,1]}|\varphi_n(x)|$. Вычитая из (23) равенство (22), получаем при условии

$$\lambda\max_{0\leq x\leq 1}\int_0^1 |k(x,t)|\, dt=\rho<1/5, \tag{24}$$

что (так как $1/5\ \|\varphi_n\|_c\leq\max\limits_{0\leq i\leq n}|\varphi_n(x_i)|$ *)

$$\|\varphi_n\|_c\leq\frac{\lambda\|k\|_c\|y-S_{n,k}\|_{L_1}}{1/5-\rho},$$

где $\|k\|_c=\sup\{|k(x, t)|;\ x\in[0, 1],\ t\in[0, 1]\}$ ($\|k\|_c<\infty$, так как $k\in Q$). Если $y\in Q$, то в силу теоремы 3 имеем $\|y-S_{n,k}\|_{L_1}\to 0$, $n\to\infty$, и, следовательно,

$$\|\varphi_n\|_c\to 0,\ n\to\infty. \tag{25}$$

Так как

$$\|y-S_k\|_{L_p}\leq\|y-S_{n,k}\|_{L_p}+\|\varphi_n\|_c,\ 1\leq\rho<\infty,$$

то получаем

Теорема 4. *Для численного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода (21) методом параболической или кубической сплайн-коллокации (22) при предположении, что $\varphi\in Q$, $k\in Q$ (по обеим переменным) и (24) имеем:*

$$\|\varphi-S_k\|_{L_p}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ k=2, 3,\quad 1\leq p<\infty.$$

В точках разрывов решения y имеет место эффект Гиббса величиной $\approx 10{,}6984\%$ от величины скачка для кубических сплайнов и $\approx 10\%$ от величины скачка для параболических сплайнов.

Вторая часть теоремы следует из (25) и теоремы 3.

---

* Норма оператора сплайн-интерполяции в рассматриваемом случае ≤ 5, см. [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. S. Andreev. On interpolation by cubic spline of a function possessing discontinuities. *C. R Acad. Bulg. sci.*, **27**, 1974, 881—884.
2. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. Сплайны в вычислительной математике. М., 1976.

Объединенный институт ядерных исследований
Лаборатория вычислительной техники и автоматизации
Москва 101000, СССР

Поступила 2.7.1984