Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ И НЕКОТОРЫЕ СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ II

ВЛАДИМИР Л. ЧАКАЛОВ

Настоящая работа является продолжением работы [1]. В ней даются необходимые и достаточные условия для экстремальности элементов заданного нормированного пространства относительно элементов сопряженного пространства (напомним, что ненулевой элемент x' нормированного пространства X называется экстремальным относительно ненулевого элемента l сопряженного пространства X^*, если $l(x')=\|l\|.\|x'\|$). Полученные критерии применяются для решения экстремальных задач и, в частности, для решения задач о приближении элементов нормированных пространств с элементами заданных подпространств. Результаты этой работы обобщают и дополняют результаты, изложенные в [2] и [3].

Исходным пунктом наших рассмотрений является теорема 1 работы [1], которую мы здесь сформулируем без доказательства.

Сначала напомним некоторые обозначения. Через T будем обозначать компактное (отделимое) топологическое пространство, через E — действительное или комплексное нормированное пространство с нормой $\|.\|_E$, а через X — действительное или комплексное (вместе с E) пространство непрерывных функций $x: T\to E$, с нормой $\|x\|=\sup_{t\in T}\|x(t)\|_E$. Соответствующие сопряженные пространства обозначим через E^* и X^*. Будем считать кроме того, что E^* наделено слабой* топологией $\sigma(E^*, E)$. Через $K\subset E^*$ обозначим единичный шар пространства E^*, т. е. $K=\{L\in E^*, :\|L\|\leqq 1\}$. Как хорошо известно, K — выпуклое компактное (относительно $\sigma(E^*, E)$) множество. Через $\mathrm{Ex}(K)$ обозначим множество крайних в смысле Минковского элементов шара K, а через $[\mathrm{Ex}(K)]$ — замкнутую оболочку $\mathrm{Ex}(K)$. Наконец обозначим через S единичную сферу E^*, т. е. $S=\{L\in E^*: \|L\|=1\}$.

Теорема 1. *При введенных выше означениях, если X — n-мерное (действительное или комплексное вместе с E) пространство, если $x_1,\dots,x_n$ — базис X в действительном случае, а $x_1,\dots,x_{2n}$ — базис X, рассматриваемое как действительное пространство (в комплексном случае) и если $l\in X^*(l\neq 0)$, то существуют элементы $t_i\in T$, $L_i\in \mathrm{Ex}(K)$ и числа $\mu_i>0 (i=1,\dots,r)$, где $1\leqq r\leqq n$, если E и X — действительные пространства и $1\leqq r\leqq 2n-1$, если E и X — комплексные так что:*

а) *для любого $x\in X$ имеет место представление*

$$l(x)=\mu_1L_1(x(t))+\dots+\mu_rL_r(X(t_r))\Big(\sum_{i=1}^{r}\mu_i=\sup_{\|x\|=1}|l(x)|=\|l\|\Big); \tag{1}$$

б) *если E и X — действительные пространства, матрица $(L_i(x_j(t_i))_{i=1,}^{r}{}_{j=1}^{n}$ имеет ранг r; если E и X — комплексные, матрица $(L_i^R(x_j(t_i)))_{i=1,}^{r}{}_{j=1}^{2n}$ имеет ранг r (здесь L^R означает действительную часть функционала $L\in E^*$);*

в) *если $x'\in X(x'\neq 0)$ — экстремальный элемент для функционала l, т. е $l(x')=\|l\|.\|x'\|$, то*

$$L_i(x'(t_i))=\|x'(t_i)\|_E=\sup_{t\in T}\|x'(t)\|_E=\|x'\|\ (i=1,\dots,r).$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 12, 1986, с. 332—359.

В [1] был рассмотрен случай, когда норма пространства X несимметрична. Как известно, такие нормы (мы используем для них обозначение $\|.|$) удовлетворяют условиям

1) $\|a|>0$ для $a\neq 0$,
2) $\|\rho a|=\rho\|a|$ для $\rho\geqq 0$,
3) $\|a_1+a_2|\leqq\|a_1|+\|a_2|$.

Рассмотрим специальный случай, когда E и X — действительные пространства и $S\subset E^*$ — компактное множество относительно топологии $\sigma(E^*, E)$, а E наделено симметричной нормой $\|.\|_E$. В этом случае мы ввели в X несимметричную норму

$$\|x| \sup_{(L,t)\in S\times T} \frac{L(x(t))}{\varphi(L, t)}, \tag{2}$$

где $\varphi: S\times T\to R^1$ — фиксированная функция, принимающая положительные значения. В этом случае теорема 1 приняла следующий вид:

Теорема 2. *При введенных выше обозначениях и предположениях, для каждого $l\in X^*$ $(l\neq 0)$ существуют элементы $t_i\in T$ и $L_i\in S$ и числа $\mu_i>0$ $(i=1,\ldots,r,\ r\leqq n)$, так что*

а) *для любого $x\in X$ имеет место представление*

$$l(x)=\mu_1\frac{L_1(x(t_1))}{\varphi(L_1, t_1)}+\cdots+\mu_r\frac{L_r(x(t_r))}{\varphi(L_r, t_r)}\ \Big(\sum_{i=1}^{n}\mu_i=\sup_{\|x|=1} l(x)=\|l|\Big); \tag{3}$$

б) *ранг матрицы $(L_i(x_j(t_i)))_{i=1,\ j=1}^{r\quad n}$ равняется r (здесь x_j, $j=1,\ldots,n$ — оазис пространства X);*

в) *если $x'\in X$ $(x'\neq 0)$ — экстремальный элемент для функционала $l(l\neq 0)$, т. е. $l(x')=\|l|.\|x'|$ (такие элементы существуют), то*

$$\frac{L_i(x'(t_i))}{\varphi(L_i, t_i)}=\|x'|\quad (i=1,\ldots,r).$$

Экстремальные элементы в конечномерных пространствах

Пример 1. В этом примере мы дадим одну модификацию теоремы 1, дающую необходимые и достаточные условия для экстремальности заданной функции $x'\in X$ относительно заданного функционала $l\in X'$. Эту модификацию теоремы 1 можно рассматривать как обобщение одной теоремы Е. Я. Ремеза [4, 5]. Более слабую форму этой теоремы можно найти в [2].

Теорема 3. *При обозначениях и предположениях, предшествующих теорему 1, предположим, что X — n-мерное пространство, $x_1,\ldots,x_n$ — базис X, если E и X — действительные пространства и $x_1,\ldots,x_{2n}$ — базис X^R, если E и X — комплексные пространства. Тогда для того, чтобы элемент $x'\in X(x'\neq 0)$ был экстремальным для функционала $l(l\neq 0)$, т. е. $l(x')=\|l\|.\|x'\|$, необходимо и достаточно, чтобы существовали элементы $L_s\subset \mathrm{Ex}(K)$ и $t_s\in T$, $s=1,\ldots,r$ (здесь $1\leqq r\leqq n$, если E и X — действительные и $1\leqq r\leqq 2n-1$, если E и X — комплексные пространства),* так что

1. $L_s(x'(t_s))=\|x'(t_s)\|_E=\|x'\|$;
2. *Ранг матриц*

$$\begin{pmatrix} L_1(x_1(t_1))\,L_2(x(t_2))\ldots L_r(x_1(t_r))\\ L_1(x_2(t_1))L_2(x_2(t_2))\ldots L_r(x_2(t_r))\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_1(x_n(t_1))L_2(x_n(t_2))\ldots L_r(x_n(t_r))\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} L_1(x_1(t_1))\,L_2(x_1(t_2))\ldots L_r(x_1(t_r))l(x_1)\\ L_1(x_2(t_1))\,L_2(x_2(t_2))\ldots L_r(x_2(t_r))l(x_2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_1(x_n(t_1))\,L_2(x_n(t_2))\ldots L_r(x_n(t_r))l(x_n)\end{pmatrix}$$

(в действительном случае) и

$$\begin{Vmatrix} L_1^R(x_1(t_1))L_2^R(x_1(t_2)) \dots L_r^R(x_1(t_2)) \\ L_1^R(x_2(t_1))L_2^R(x_2(t_2)) \dots L_r^R(x_2(t_r)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ L_1^R(x_{2n}(t_1))L_2^R(x_{2n}(t_2)) \dots L_r^R(x_{2n}(t_r)) \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} L_1^R(x_1(t_1))\, L_2^R(x_1(t_2)) \dots L_r^R(x_1(t_r))\, l^R(x_1) \\ L_1^R(x_2(t_1))\, L_2^R(x_2(t_2)) \dots L_r^R(x_2(t_r))\, l^R(x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ L_1^R(x_{2n}(t_1))\, L_2^R(x_{2n}(t_2)) \dots L_r^R(x_{2n}(t_r))\, l^R(x_{2n}) \end{Vmatrix}$$

(в комплексном случае) равняется r.

3. *Если определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1(x_{k_1}(t_1))\, L_2(x_{k_1}(t_2)) \dots L_r(x_{k_1}(t_r)) \\ L_1(x_{k_2}(t_1))\, L_2(x_{k_2}(t_2)) \dots L_r(x_{k_2}(t_r)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ L_1(x_{k_r}(t_1))\, L_2(x_{k_r}(t_2)) \dots L_r(x_{k_r}(t_r)) \end{vmatrix}$$

(в действительном случае) и

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1^R(x_{k_1}(t_1))\ L_2^R(x_{k_1}(t_2)) \dots L_r^R(x_{k_1}(t_r)) \\ L_1^R(x_{k_2}(t_1))\ L_2^R(x_{k_2}(t_2)) \dots L_r^R(x_{k_2}(t_r)) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ L_1^R(x_{k_r}(t_1))\ L_2^R(x_{k_r}(t_2)) \dots L_r^R(x_{k_r}(t_r)) \end{vmatrix}$$

(в комплексном случае) отличен от нуля, то определители $\Delta_s (s=1, \dots, r)$, получающиеся из Δ заменой элементов s-того столбца элементами $l(x_{k_1}), \dots, l(x_{k_r})$ (в действительном случае) и $l^R(x_{k_1}), \dots, l^R(x_{k_r})$ (в комплексном случае) тоже отличны от нуля и имеют знак определителя Δ.

Доказательство проведем в действительном случае.

Необходимость. Пусть $x' \in X (x' \neq 0)$ — экстремальный элемент для l. Из пункта в) теоремы 1 следует существование $t_s \in T$ и $L_s \in \mathrm{Ex}(K)$ $(s=1, \dots r, 1 \leq r \leq n)$, для которых $L_s(x'(t_s)) = \| x'(t_s) \|_E = \| x' \|$, что доказывает 1. Из а) и б) той же теоремы и теоремы Руше для линейных алгебраических систем следует верность утверждения пункта 2. Пункт 3 является следствием факта, что в представлении (1) имеем $\mu_s = \frac{\Delta_s}{\Delta} > 0 (s=1, \dots, r)$.

Достаточность. Пусть $x' \in X (x' \neq 0)$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3 нашей теоремы. Покажем, что $l(x') = \| l \| . \| x' \|$. Действительно, 2 гарантирует существование решения системы

$$l(x_s) = \mu_1 L_1(x_s(t_1)) + \dots + \mu_r L_r(x_s(t_r)) \quad (s=1, \dots, n) \tag{4}$$

относительно $\mu_1, \dots, \mu_r$, а из 3 следует, что $\mu_s > 0 \, (s=1, \dots, r)$. Обозначим через $x'' (x'' \neq 0)$ экстремальную функцию для l. Имея в виду очевидные соотношения

$$\| l \| . \| x'' \| = l(x'') = \mu_1 L_1(x''(t_1)) + \dots + \mu_r(x''(t_r)) \leq (\mu_1 + \dots + \mu_r) \| x'' \|$$

заключаем, что

$$\mu_1 + \dots + \mu_r \geq \| l \|.$$

С другой стороны, используя последнее неравенство и равенства $L_s(x'(t_s)) = \| x' \| \, (s=1, \dots, r)$ получим соотношения.

$$\| l \| . \| x' \| \geqq l(x') = \mu_1 L_1(x'(t_1)) + \cdots + \mu_r L_r(x'(t_r)) = (\mu_1 + \cdots + \mu_r) \| x' \| \geqq \| l \| . \| x' \|,$$

откуда заключаем, что $\mu_1 + \cdots + \mu_r = \| l \|$ и $l(x') = \| l \| . \| x' \|$, т. е., что x' является экстремальным элементом для l.

Мы опускаем доказательство комплексного случая, так как оно проводится тем же образом.

Замечание. В случае, когда T — одноточечное множество ($T = \{t_0\}$) теорема 3 переходит в теорему, относящуюся к общим нормированным пространствам.

В следующем изложении рассмотрим другой несимметричный вариант теоремы 3.

Пусть E — действительное нормированное пространство с симметричной нормой $\|\cdot\|_E$ и пусть X — n-мерное пространство непрерывных функций $x\colon T \to E$ нормированных с нормой (2). Тогда при предположениях и означениях, предшествующих теорему 2 имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Для того, чтобы функция $x' \in X\,(x' \neq 0)$ была экстремальной для $l \in X^*\,(l \neq 0)$, т. е. $l(x') = \| l \| . \| x' \|$, необходимо и достаточно, чтобы существовали элементы $L_i (L_i \in \mathrm{Ex}(K))$ и $t_i (t_i \in T)$, $i = 1, \ldots, r$, $r \leqq n$, для которых выполняются условия*

$$1.\ \frac{L_i(x'(t_i))}{\varphi(L_i, t_i)} = \| x' \| \quad (i = 1, \ldots, r),$$

а так же условия 2 и 3 теоремы 3 (действительный случай).

Замечание. На самом деле элементы первых r столбцов матриц пункта 2 теоремы 3 в нашем случае являются числа $L_i(x'(t_i))/\varphi(L_i, t_i)$ $(i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, n)$. Впрочем, отбрасывая знаменатель $\varphi(L_i, t_i)$, мы не меняем их ранг. Подобное замечание имеет место и для определителей Δ и Δ_s пункта 3.

Доказательство теоремы 4 следует из теоремы 2 как доказательство теоремы 3 — из теоремы 1, так что мы не будем останавливаться на нем, а перейдем к приложениям.

Сначала займемся с задачей наилучшего приближения непрерывной числовой функции с линейными комбинациями конечного числа непрерывных (числовых) функций. Как хорошо известно, эта задача является частным случаем задачи о нахождении экстремального элемента заданного нормированного пространства относительно специального функционала сопряженного пространства. Докажем этот простой известный факт.

Пусть E — действительное или комплексное нормированное пространство. Пусть $G \subset E$ — подпространство пространства E и $\Omega \in E$. Рассмотрим задачу наилучшего приближения (относительно нормы) для элемента Ω с элементами подпространства G. Если $\Omega \in [G]$ (здесь $[G]$ — замыкание G относительно топологии, порожденной нормой пространства E), то $\inf_{g \in G} \| \Omega - g \|_E = 0$, причем элемент $g' \in G$ является элементом наилучшего приближения для Ω тогда и только тогда, когда $\Omega \in G$. Ясно, что задача о нахождении элемента наилучшего приближения представляет интерес только в случае, когда $\Omega \in E \setminus [G]$, т. е. когда $\inf_{g \in G} \| \Omega - g \|_E = m > 0$. В этом случае обозначим через E_1 пространство всех элементов вида $a = \lambda\Omega + g$, где $g \in G$ и λ — действительное число, если E — действительное пространство, и комплексное — в противном случае. Очевидно $E_1 \subset E$. Определим дальше функционал l на E_1 при помощи равенства

$$l(a) = l(\lambda\Omega + g) = \lambda. \tag{5}$$

Из очевидных соотношений

$$|\lambda m| = |\lambda| \inf_{g \in G} \| \Omega - g \|_E = \inf_{g \in G} \| \lambda\Omega + g \|_E \leqq \| \lambda\Omega + g^* \|_E,$$

где $g^* \in G$, получим

$$| l(\lambda\Omega + g^*) | = |\lambda| \leqq \frac{1}{m} \| \lambda\Omega + g^* \|_E,$$

т. е. $l \in E^*$. Легко видеть, что элемент $g' \in E$ является элементом наилучшего приближения для Ω тогда и только тогда, когда элемент $a' = \Omega - g'$ — экстремальный элемент для функционала l. Действительно, если $a' = \Omega - g'$ — экстремальный элемент для l, то $1 = l(\Omega - g') = \| l \| . \| \Omega - g' \|_E$ или $\| \Omega - g' \|_E = 1/\| l \|$. Так как для любого $g \in G$ $1 = l(\Omega - g) \leq \| l \| . \| \Omega - g \|_E$ или $\| \Omega - g \|_E \geq 1/\| l \|$, то g' является элементом наилучшего приближения для Ω. Покажем, что если g' элемент наилучшего приближения, то будем иметь $\| \Omega - g' \|_E = 1/\| l \|$. Действительно, в противном случае, если $\| \Omega - g' \|_E > 1/\| l \|$, то для некоторого (достаточно малого) $\varepsilon > 0$ мы имели бы неравенства $\| l \| - \varepsilon > 0$ и $\| \Omega - g' \|_E > 1/(\| l \| - \varepsilon)$. С другой стороны, так как $\sup_{a \in E, \| a \|_E = 1} | l(a) | = \| l \|$, для некоторого $a^* = \lambda^* \Omega + g^*$ будем иметь $| l(\frac{a^*}{\| a^* \|_E}) | > \| l \| - \varepsilon$, или $\frac{| \lambda^* |}{\| \lambda^* \Omega + g^* \|_E} > \| l \| - \varepsilon$, откуда получаем, что $\left\| \Omega + \frac{g^*}{\lambda^*} \right\|_E < \frac{1}{\| l \| - \varepsilon} < \| \Omega - g' \|_E$, а это означает, что g' не есть элемент наилучшего приближения для Ω. Итак, $\| \Omega - g' \|_E = 1/\| l \|$, или $\| l \| . \| \Omega - g' \|_E = 1 = l(\Omega - g')$, т. е. $\Omega - g'$ является экстремальным элементом для l.

Из сказанного выше следует, что задача об отыскании элементов наилучшего приближения равносильна задаче о нахождении экстремальных элементов для функционала l, заданного в (5).

Легко видеть, что этот результат сохраняется и в случае несимметричной нормы. Действительно, пусть E — действительное линейное пространство, наделенное несимметричной нормой $\| \cdot |_E$ и пусть как и выше $\Omega \in E$, G — подпространство E и $\inf_{g \in G} \| \Omega - g |_E = m > 0$. Через E_1 обозначим линейное пространство всех элементов вида $a = \lambda\Omega + g$, где λ — действительное число, а g — любой элемент G. Рассмотрим функционал l, определенный при помощи (5). Из равенств

$$\sup_{a \in E_1,\, a \neq 0} l\left(\frac{a}{\| a |_E}\right) = \sup_{\substack{\lambda \in R', g \in G, \\ \lambda\Omega + g \neq 0}} l\left(\frac{\lambda\Omega + g}{\| \lambda\Omega + g |_E}\right) = \sup_{\substack{\lambda > 0, g \in G \\ \lambda\Omega + g \neq 0}} \frac{\lambda}{\| \lambda\Omega + g |_E} = \sup_{g \in G} \frac{1}{\| \Omega + g |_E}$$

$$= \frac{1}{\inf\limits_{g \in G} \| \Omega + g |_E} = 1/m$$

следует, что $\| l | = 1/m$, т. е. $l \in E^*$. Повторяя предыдущие рассуждения, относящиеся к симметричным нормам, получим, что $g' \in G$ является наилучшим приближением для $\Omega - g'$ относительно нормы $\| \cdot |_E$ тогда и только тогда, когда элемент $\Omega - g'$ экстремален для функционала (5), т. е. когда $1 = l(\Omega - g') = \| l | . \| \Omega - g' |_E$.

Сказанное даст нам возможность применить полученные результаты для решения некоторых задач о нахождении наилучших приближений элементов нормированного пространства.

Рассмотрим сначала случай, когда $E = R^1$, $\| a |_E = | a | (a \in E)$. Тогда любому $L \in E^*$ соответствует единственное действительное число λ_L так, что для каждого $a \in E = R^1$ имеем $L(a) = \lambda_L a$. Это соответствие является изометрическим изоморфизмом (в частности $\| L \| = | \lambda_L |$), так что отождествляя L с соответствующим λ_L можно считать, что $E^* = R^1$. Единичная сфера $S \subset E^*$ состоит из чисел 1 и -1. Кроме того очевидно, что S — компактное множество относительно топологии $\sigma(E^*, E)$ (в нашем случае $\sigma(E^*, E)$ совпадает с обычной топологией в R^1).

Пусть φ: $S \times T \to R^1$ — непрерывная функция, принимающая положительные значения. В нашем случае φ состоит из двух непрерывных функций переменной t: $\varphi(-1, t)$ и $\varphi(1, t)$. Пусть дальше x_i: $T \to R^1$ $(i = 1, \ldots, n)$ и Ω: $T \to R^1 - n + 1$ непрерывных (относительно нормы пространства $E = R^1$) линейно независимых функций t. Обозначим через X пространство всех линейных комбинаций с действительными коэффициентами вида $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. В X вводится норма (2). В нашем случае она принимает вид

$$\| x | = \max \left\{ \sup_{t \in T} \frac{x(t)}{\varphi(1, t)},\ \sup_{t \in T} \frac{-x(t)}{\varphi(-1, t)} \right\}. \tag{6}$$

Рассматриваем задачу о наилучшем приближении Ω многочленами вида $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ относительно нормы (6). Из сказанного выше следует, что функция $x' = \alpha_1' x_1 + \cdots + \alpha_n' x_n$ является многочленом наилучшего приближения для Ω тогда и только тогда, когда функция $\Omega - x'$ — экстремальная функция для функционала l, определенного равенствами

$$l(x_1) = \cdots = l(x_n) = 0, \quad l(\Omega) = 1. \tag{7}$$

Но согласно теореме 4 функция $\Omega - x'$ — экстремальная для функционала (7) тогда и только тогда, когда среди всех пар (ε, t) $(\varepsilon = \pm 1,\ t \in T)$ имеются такие пары $(\varepsilon_1, t_1), \ldots, (\varepsilon_r, t_r)$ $(1 \leq r \leq n+1)$, для которых выполняются следующие соотношения:

$$(*) \qquad \varepsilon_i \frac{\Omega(t_i) - x'(t_i)}{\varphi(\varepsilon_i, t_i)} = \sup_{\varepsilon = \pm 1,\ t \in T} \varepsilon \frac{\Omega(t) - x'(t)}{\varphi(\varepsilon, t)} = \| \Omega - x' \| = 1/\| l \| \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Ранг матриц

$$(**) \qquad \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \ldots & x_1(t_r) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \ldots & x_2(t_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \ldots & x_n(t_r) \\ \Omega(t_1) & \Omega(t_2) & \ldots & \Omega(t_r) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \ldots & x_1(t_r) & 0 \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \ldots & x_2(t_r) & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \ldots & x_n(t_r) & 0 \\ \Omega(t_1) & \Omega(t_2) & \ldots & \Omega(t_r) & 1 \end{pmatrix}$$

равняется r.

Если определитель

$$(\overset{*}{**}) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 x_{k_1}(t_1) & \varepsilon_2 x_{k_1}(t_2) & \ldots & \varepsilon_r x_{k_1}(t_r) \\ \varepsilon_1 x_{k_2}(t_1) & \varepsilon_2 x_{k_2}(t_2) & \ldots & \varepsilon_r x_{k_2}(t_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_1 x_{k_{r-1}}(t_1) & \varepsilon_2 x_{k_{r-1}}(t_2) & \ldots & \varepsilon_r x_{k_{r-1}}(t_r) \\ \varepsilon_1 \Omega(t_1) & \varepsilon_2 \Omega(t_2) & \ldots & \varepsilon_r \Omega(t_r) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то определители $\Delta_i (i = 1, \ldots, r)$, получающиеся из Δ заменой i-того столбца с элементами $0, 0, \ldots, 0, 1$, тоже отличен от нуля и имеет знак определителя Δ (отметим, что если какой-нибудь минор порядка r первой из матриц $(**)$ отличен от нуля, то он содержит последнюю строку, так как в противном случае вторая из матриц $(**)$ имела бы ранг $r+1$).

Замечание. В матрицах $(**)$ мы заменили $\frac{L_i(x_k(t_i))}{\varphi(\varepsilon_i, t_i)} = \frac{\varepsilon_i x_k(t_i)}{\varphi(\varepsilon_i, t_i)}$ и $\frac{L_i(\Omega(t_i))}{\varphi(\varepsilon_i, t_i)} = \frac{\varepsilon_i \Omega(t_i)}{\varphi(\varepsilon_i, t_i)}$ на $x_k(t_i)$ и $\Omega(t_i) (k = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, r)$, что, впрочем, не меняет их ранг. Аналогично, в определителе $(\overset{*}{**})$ мы заменили $\frac{\varepsilon_i x_k(t_i)}{\varphi(\varepsilon_i, t_i)}$ и $\frac{\varepsilon_i \Omega(t_i)}{\varphi(\varepsilon_i, t_i)}$ на $\varepsilon_i x_k(t_i)$ и $\varepsilon_i \Omega(t_i)$, что не меняет его знак.

В результате всего сказанного получаем следующую теорему.

Теорема 5. *При введенных выше обозначениях и предположениях для того, чтобы многочлен* $x' = \alpha_1' x_1 + \cdots + \alpha_n' x_n$ *наименее уклонялся от функции* Ω *относительно несимметричной нормы* (6), *необходимо и достаточно, чтобы среди пар* (ε, t), *где* $\varepsilon = \pm 1$, $t \in T$, *существовали пары* $(\varepsilon_1, t_1), \ldots, (\varepsilon_r, t_r)$ $(1 \leq r \leq n+1)$, *удовлетворяющие условиям* $(*)$, $(**)$, $(\overset{*}{**})$.

Теорема 5 содержит одну теорему Е. Ремеза [4]. Чтобы получить ее (или, точнее говоря, ее эквивалентную формулировку), достаточно в теореме 5 положить

$\varphi(\varepsilon, t) \equiv 1$. Тогда несимметричная норма в пространстве X переходит в равномерную норму, а теорема 5 — в теорему Е. Ремеза.

Рассмотрим случай, когда линейно независимые непрерывные функции $x_i: T \to R^1$ $(i=1, \ldots, n)$ образуют чебышевскую систему, т. е. когда любой ненулевой действительный многочлен вида $x=\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n$ имеет не более чем $n-1$ нулей или (что то же самое), когда определитель

$$\begin{vmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \ldots & x_1(t_n) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \ldots & x_2(t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \ldots & x_n(t_n) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля при любом выборе $t_1, \ldots, t_n$ $(t_j \neq t_i$ для $j \neq i)$. В этом случае теорему 5 можно уточнить следующим образом.

Теорема 6. *При означениях и предположениях теоремы 5, если функции $x_1, \ldots, x_n$ образуют чебышевскую систему, то, для того, чтобы многочлен $x'=\alpha' x_1+\cdots+\alpha_n' x_n$ наименее уклонялся от функции Ω относительно несимметричной нормы* (6), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись утверждение теоремы 5 и равенство $r=n+1$.*

Доказательство. Если $x'=\alpha_1' x_1+\cdots+\alpha_n' x_n$ — многочлен наилучшего приближения для Ω, то согласно теореме 5 существуют пары $(\varepsilon_1, t_1), \ldots, (\varepsilon_r, t_r)$ $(\varepsilon_i=\pm 1,$ $t_i \in T,\ i=1, \ldots, r,\ 1 \leq r \leq n+1)$, так что выполняются условия $(*)$, $(**)$, $(\overset{*}{**})$. Остается доказать, что $r=n+1$. Действительно, так как вторая из матриц $(**)$ имеет ранг r, то матрица

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \ldots & x_1(t_r) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \ldots & x_2(t_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \ldots & x_n(t_r) \end{pmatrix}$$

имеет ранг $<r$. Отсюда следует, что $r=n+1$, так как в противном случае, если $r \leq n$, линейная зависимость столбцов нашей матрицы означает, что функции $x_1, \ldots, x_n$ не составляют чебышевскую систему.

Достаточность следует сразу из $(*)$, $(**)$, $(\overset{*}{**})$ и теоремы 5.

Замечание. Теоремы 5 и 6 примыкают к двум теоремам монографии И. Зингера [6]. Точнее говоря, по существу, они переносят для несимметричных норм утверждения следующие две теоремы [6, с. 178, теорема 1.3; с. 182, теорема 1.4] в случае, когда рассматриваемые пространства действительны.

Отметим еще, что из теоремы 6 следует обобщенная теорема Чебышева [7, с. 491, теорема 5.3], но мы не будем останавливаться на доказательстве этого факта.

Пример 2. Здесь мы остановимся на одном существенном частном случае нормированного пространства. Будем предполагать, что E — действительное или комплексное пространство Гильберта с нормой, порожденной скалярным произведением, т. е. что для всякого $a \in E$ имеем

$$\| a \|_E=\sqrt{(a \mid a)}. \tag{8}$$

В этом случае, согласно одной теореме Ф. Риса, любой функционал $L \in E$ имеет вид $L(a)=(a \mid p_L)$, где p_L — однозначно определенный элемент E, для которого

$\| L \| = \sqrt{(p_L \mid p_L)} = \| p_L \|_E$. Дальше мы будем отождествлять L с p_L и будем обозначать значения L через $L(a) = (a \mid L)$.

Будем пользоваться еще тем обстоятельством, что если для двух ненулевых элементов E — a и b выполняется равенство

$$|(a \mid b)| = \sqrt{(a \mid a)} \cdot \sqrt{(b \mid b)} = \| a \|_E \cdot \| b \|_E,$$

то существует число $\lambda \neq 0$ так, что $a = \lambda b$.

Пусть X — n-мерное пространство непрерывных функций $x: T \to E$ с нормой

$$(9) \qquad \| x \| = \sup_{t \in T} \| x(t) \|_E = \sup_{t \in T} \sqrt{(x(t) \mid x(t))} = \sup_{L \in S,\, t \in T} | L(x(t)) | = \sup_{L \in S,\, t \in T} |(x(t) \mid L)|.$$

Выбрав E и X таким образом, мы уточним теорему 1. Действительно, пусть $l \in X^*$ $l \neq 0$. Применим к l теорему 1 и для определенности рассмотрим случай, когда E и X — комплексные пространства. Согласно пункту а) этой теоремы, l имеет представление вида

$$l(x) = \mu_1 L_1(x(t_1)) + \cdots + \mu_r L_r(x(t_r)) = \mu_1 (x(t_1) \mid L_1) + \cdots + \mu_r (x(t_2) | L_r),$$

где $\mu_i > 0$, $L_i \in S$ для $i = 1, \ldots, r$, $1 \leqq r \leqq 2n-1$ и $\Sigma_{i=1}^r \mu_i = \| l \|$ (здесь мы не пишем $L_i \in \operatorname{Ex}(K)$, так как в нашем случае все элементы единичной сферы S являются крайними точками единичного шара $K \subset E^*$). Согласно пункту в) той же теоремы, если $x' \in X$ — экстремальная функция для l, то имеют место равенства $(x'(t_i) \mid L_i) = \sup_{L \in S,\, t \in T} |(x'(t) \mid L)| = \| x' \| = | x'(t_i) \|_E (i = 1, \ldots, r)$. Так как $\| L_i \| = 1$, то

$$(x'(t_i) \mid L_i) = \| x'(t_i) \|_E = \| x'(t_i) \|_E \cdot \| L \|,$$

откуда следует, что для некоторого числа $\lambda_i \neq 0$ имеем $\lambda_i x'(t_i) = L_i$. Из очевидных равенств

$$\| x' \| = (x'(t_i) \mid L_i) = (x'(t_i) \mid \lambda_i x'(t_i)) = \overline{\lambda}_i \| x'(t_i) \|_E^2 = \overline{\lambda}_i \| x' \|^2$$

следует, что $\lambda_i = \overline{\lambda}_i = 1/\| x' \|$. Отсюда для L_i получаем

$$L_i = x'(t_i)/\| x' \|,$$

так что представление функционала l имеет вид

$$l(x) = \mu_i \frac{(x(t_1) \mid x'(t_1)}{\| x' \|} + \cdots + \mu_r \frac{(x(t_r) \mid x'(t_r))}{\| x' \|} \; (\mu_i > 0,\ i = 1, \ldots, r,\ 1 \leqq r \leqq 2n-1,\ \sum_{i=1}^{r}.$$

Легко сообразить, что рассуждения, как и результаты сохраняются и в случае, когда E и X — действительные пространства. Единственная разница состоит в том, что в действительном случае r удовлетворяет неравенствам $1 \leqq r \leqq n$.

Итак, имеет место следующее уточнение теоремы 1.

Теорема 7. *Пусть E — действительное или комплексное пространство Гильберта, нормированное с нормой (8), а X — n-мерное пространство (действительное или комплексное вместе с E) непрерывных функций $x: T \to E$ с равномерной нормой (9). Если $l \in E^*$, $l \neq 0$, и $x' \in X$ $(x' \neq 0)$ — какой-нибудь экстремальный элемент для l, то существуют элементы $t_s \in T$ и числа μ_s $(s = 1, \ldots, r)$, где $1 \leqq r \leqq n$, если E и X — действительные и $1 \leqq r \leqq 2n-1$, если E и X — комплексные пространства, так что*

а) для любого $x \in X$ имеет место представление

$$l(x) = \mu_1 \frac{(x(t_1) \mid x'(t_1))}{\| x' \|} + \cdots + \mu_r \frac{(x(t_r) \mid x'(t_r)}{\| x' \|} \; (\mu_s > 0,\ s = 1, \ldots, r,\ \sum_{i=1}^{r} \mu_i = \| l \|);$$

б) если E и X — действительные и $x_1, \ldots, x_n$ — базис X, то матрица

$$\begin{pmatrix} (x_1(t_1) \mid x'(t_1)) & (x_1(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots (x_1(t_r) \mid x'(t_r)) \\ (x_2(t_1) \mid x'(t_1)) & (x_2(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots (x_2(t_r) \mid x'(t_r)) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ (x_n(t_1) \mid x'(t_1)) & (x_n(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots (x_n(t_r) \mid x'(t_r)) \end{pmatrix}$$

имеет ранг r; если E и X — комплексные и $x_1, \ldots, x_{2n}$ — базис действительного пространства X^R (т. е. X, рассматриваемое как действительное пространство), то матрица

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(x_1(t_1) \mid x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_1(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots \operatorname{Re}(x_1(t_r) \mid x'(t_r)) \\ \operatorname{Re}(x_2(t_1) \mid x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_2(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots \operatorname{Re}(x_2(t_r) \mid x'(t_r)) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \operatorname{Re}(x_{2n}(t_1) \mid x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_{2n}(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots \operatorname{Re}(x_{2n}(t_r) \mid x'(t_r)) \end{pmatrix}$$

имеет ранг r (здесь $\operatorname{Re}(a \mid b)$ — действительная часть скалярного произведения $(a \mid b)$);

в) если $x'' \in X$, $x'' \neq 0$ — экстремальная функция для l (в общем случае $x'' \neq x'$), то

$$\frac{(x''(t_s) \mid x'(t_s))}{\| x' \|} = \| x''(t_s) \|_E = \| x' \|,$$

откуда следует, что

$$\frac{x''(t_s)}{\| x'' \|} = \frac{x'(t_s)}{\| x' \|}.$$

Если в теореме 3 предположим, что E — пространство Гильберта, нормированное при помощи скалярного произведения, и имеем в виду сказанное выше, получим следующее уточнение теоремы 3.

Теорема 8. *Для того, чтобы $x' \in X (x' \neq 0)$ был экстремальным элементом относительно $l \in X^* (l \neq 0)$, т. е. для того, чтобы $l(x') = \| l \| . \| x' \|$ необходимо и достаточно, чтобы существовали точки $t_s \in T$, $s = 1, \ldots, r$ (здесь $1 \leqq r \leqq n$, если E и X — действительные и $1 \leqq r \leqq 2n-1$, если E и X — комплексные пространства), так что*

1. $\sqrt{(x'(t_s) \mid x'(t_s))} = \sup_{t \in T} \sqrt{(x'(t) \mid x'(t)}$;

2. матрицы

$$\begin{pmatrix} (x_1(t_1) \mid x'(t_1)) & (x_1(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots (x_1(t_r) \mid x'(t_r)) \\ (x_2(t_1) \mid x'(t_1)) & (x_2(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots (x_1(t_r) \mid x'(t_r)) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ (x_n(t_1) \mid x'(t_1)) & (x_n(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots (x_n(t_r) \mid x'(t_r)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (x_1(t_1) \mid x'(t_1)) & (x_1(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots (x_1(t_r) \mid x'(t_r)) l(x_1) \\ (x_2(t_1) \mid x'(t_1)) & (x_2(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots (x_2(t_r) \mid x'(t_r)) l(x_2) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ (x_n(t_1) \mid x'(t_1)) & (x_n(t_2) \mid x'(t_2)) \ldots (x_n(t_r) \mid x'(t_r)) l(x_n) \end{pmatrix}$$

(если E и X — действительные) и

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(x_1(t_1)\,|\,x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_1(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & \operatorname{Re}(x_1(t_r)\,|\,x'(t_r)) \\ \operatorname{Re}(x_2(t_1)\,|\,x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_2(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & \operatorname{Re}(x_2(t_r)\,|\,x'(t_r)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{Re}(x_{2n}(t_1)\,|\,x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_{2n}(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & \operatorname{Re}(x_{2n}(t_r)\,|\,x'(t_r)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(x_1(t_1)\,|\,x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_1(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & \operatorname{Re}(x_1(t_r)\,|\,x'(t_r)) & l^R(x_1) \\ \operatorname{Re}(x_2(t_1)\,|\,x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_2(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & \operatorname{Re}(x_2(t_r)\,|\,x'(t_r)) & l^R(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{Re}(x_{2n}(t_1)\,|\,x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_{2n}(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & \operatorname{Re}(x_{2n}(t_r)\,|\,x'(t_r)) & l^R(x_{2n}) \end{pmatrix}$$

(если E и X — комплексные) имеют ранг r. Здесь $x_1, \dots, x_n$ — базис пространства X, если X — действительное, а $x_1, \dots, x_{2n}$ — базис X^R, если X — комплексное пространство;

3. *Если определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x_{k_1}(t_1)\,|\,x'(t_1)) & (x_{k_1}(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & (x_{k_1}(t_r)\,|\,x'(t_r)) \\ (x_{k_2}(t_1)\,|\,x'(t_1)) & (x_{k_2}(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & (x_{k_2}(t_r)\,|\,x'(t_r)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_{k_r}(t_1)\,|\,x'(t_1)) & (x_{k_r}(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & (x_{k_r}(t_r)\,|\,x'(t_r)) \end{vmatrix}$$

(в действительном случае) и

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{Re}(x_{k_1}(t_1)\,|\,x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_{k_1}(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & \operatorname{Re}(x_{k_1}(t_r)\,|\,x'(t_r)) \\ \operatorname{Re}(x_{k_2}(t_1)\,|\,x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_{k_2}(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & \operatorname{Re}(x_{k_2}(t_r)\,|\,x'(t_r)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{Re}(x_{k_r}(t_1)\,|\,x'(t_1)) & \operatorname{Re}(x_{k_r}(t_2)\,|\,x'(t_2)) & \dots & \operatorname{Re}(x_{k_r}(t_r)\,|\,x'(t_r)) \end{vmatrix}$$

(в комплексном случае) отличен от нуля, то определители $\Delta_r\,(s=1, \dots, r)$, получающиеся от Δ заменой элементов s-того столбца элементами $(l(x_{k_1}), \dots, l(x_{k_r})$ (в действительном случае) и $l^R(x_{k_1}), \dots, l^k(x_{k_r})$ (в комплексном случае) тоже отличны от нуля и имеют знак Δ.

Замечание. В нашем случае $L_i(x_k(t_i)) = \frac{(x_k(t_i)\,|\,x'(t_i))}{\|x'\|}$, следовательно, соответствующие элементы матриц пункта 2 теоремы 8, как и определители Δ и Δ_s пункта 3, должны быть $\frac{(x_k(t_i)\,|\,x'(t_i))}{\|x'\|}$ и $\frac{\operatorname{Re}(x_k(t_i)\,|\,x'(t_i))}{\|x'\|}$ вместо $(x_k(t_i)\,|\,x'(t_i))$ и $\operatorname{Re}(x_k(t_i)\,|\,x'(t_i)$. Мы опустили знаменатель, так как это не меняет ранг соответствующих матриц и знак определителей Δ и Δ_s.

Ниже мы проиллюстрируем применение теоремы 8.

Рассмотрим специальный случай, когда $E = \mathbf{C}$ (где $\mathbf{C}$ обозначает поле комплексных чисел), а скалярное произведение в E задаем формулой

$$(a\,|\,b) = a\,.\,\overline{b},$$

где $\overline{b}$ — комплексно сопряженное на b число. При этом предположении, пусть X — $n+1$-мерное комплексное пространство, порожденное линейно независимыми непрерывными функциями $x_1, \ldots, x_n, \Omega$, где $x_s\colon T \to \mathbf{C}\,(s=1, \ldots, n)$ и $\Omega\colon T \to \mathbf{C}$, нормированное равномерной нормой $\|x\| \sup_{t\in T}\sqrt{(x(t)\,|\,x(t))} = \sup_{t\in T}|x(t)|$. Пусть $l \in X^*$ — функционал, определенный на X равенствами

$$l(x_1) = \cdots = l(x_n) = 0,\ l(\Omega) = 1. \tag{10}$$

Очевидно, что функции $x_1, \ldots, x_n, \Omega, ix_1, \ldots, ix_n, i\Omega$ образуют базис пространства X^R. Рассмотрим задачу о наилучшем равномерном приближении функции Ω с многочленами вида $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_i\,(i=1, \ldots, n)$ — комплексные числа. Имея в виду, что $x' = \alpha_1' x_1 + \cdots + \alpha_n' x_n$ является многочленом наилучшего приближения для Ω тогда и только тогда, когда $y' = \Omega - x'$ — экстремальная функция для функционала (10), мы сформулируем в качестве непосредственного следствия теоремы 8 следующий аналог теоремы Е. Ремеза [4] для комплексных функций (более слабый вариант этой теоремы можно найти в [2]).

Теорема 9. *При введенных предположениях для того, чтобы функция $x' = \alpha_1' x_1 + \cdots + \alpha_n' x_n$ была многочленом наилучшего равномерного приближения для функции Ω, необходимо и достаточно, чтобы существовали точки $t_1, \ldots, t_r$ $(1 \leq r \leq 2n+1)$ множества T так, что для функции $y' = \Omega - x'$ выполнялись условия:*

1. $|y'(t_s)| = |\Omega(t_s) - x'(t_s)| = \sup_{t\in T}|\Omega(t) - x'(t)|\ (s=1, \ldots, r)$;

2. *Матрицы*

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} x_1(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} x_1(t_2)\bar{y}(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} x_1(t_r)\bar{y}'(t_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \operatorname{Re} x_n(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} x_n(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} x_n(t_r)\bar{y}'(t_r) \\ \operatorname{Re} \Omega(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} \Omega(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} \Omega(t_r)\bar{y}'(t_r) \\ \operatorname{Re} ix_1(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} ix_1(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} ix_1(t_r)\bar{y}'(t_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \operatorname{Re} ix_n(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} ix_n(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} ix_n(t_r)\bar{y}'(t_r) \\ \operatorname{Re} i\Omega(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} i\Omega(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} i\Omega(t_r)\bar{y}'(t_r) \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} x_1(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} x_1(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} x_1(t_r)\bar{y}'(t_r) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \operatorname{Re} x_n(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} x_n(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} x_n(t_r)\bar{y}'(t_r) & 0 \\ \operatorname{Re} \Omega(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} \Omega(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} \Omega(t_r)\bar{y}'(t_r) & 1 \\ \operatorname{Re} ix_1(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} ix_1(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} ix_1(t_r)\bar{y}'(t_r) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \operatorname{Re} ix_n(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} ix_n(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} ix_n(t_r)\bar{y}'(t_r) & 0 \\ \operatorname{Re} i\Omega(t_1)\bar{y}'(t_1) & \operatorname{Re} i\Omega(t_2)\bar{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} i\Omega(t_r)\bar{y}'(t_r) & 0 \end{pmatrix}$$

имеют ранг r (здесь $\bar{y}'(t_s)$, $s=1, \ldots, r$ — число, сопряженное комплексному числу $y'(t_s)$);

3. *Пусть Δ — отличный от нуля определитель порядка r, составленный из r строк первой матрицы (11) и пусть для определенности $k_1, \ldots, k_r\,(1 \leq k_2 < k_3 < \cdots < k_r \leq 2n+2)$ — номера этих строк. Обозначим через $\Delta_s\,(s=1, \ldots, r)$ опре-*

делитель, полученный из Δ *заменой элементов* s*-того столбца с элементами последнего столбца второй матрицы* (11), *находящиеся на* k_1*-той, . . . ,* k_r*-той строке. Тогда* Δ_s *отличен от нуля и имеет знак* Δ.

Рассмотрим частный случай, когда комплексные функции $x_1, \ldots, x_n$ образуют чебышевскую систему функций, т. е. когда определитель

$$\begin{vmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \ldots & x_1(t_n) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \ldots & x_2(t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \ldots & x_n(t_n) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля для всех $t_1, \ldots, t_n$ ($t_i \neq t_j$ для $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$). Тогда имеет место следующее простое следствие теоремы 9.

Следствие. *При обозначениях и предположениях теоремы 9, если* $x_1, \ldots, x_n$ *— чебышевская система, то для того, чтобы функция* $x' = \alpha_1' x_1 + \cdots + \alpha_n' x_n$ *была многочленом наилучшего приближения для непрерывной функции* Ω, *необходимо и достаточно существование точек* $t_s \in T$ ($s = 1, \ldots, r$), где $r \leq 2n+1$ *так, чтобы выполнялись условия 1, 2, 3 теоремы 9 и неравенство* $r \geq n+1$.

Достаточность очевидна, так как она следует из 1, 2, 3 теоремы 9.

Чтобы доказать необходимость, достаточно показать верность неравенства $r \geq n+1$, так как из теоремы 9 следует, что имеют место условия 1, 2, 3 этой теоремы. Сначала отметим, что любой, отличный от нуля, минор порядка r первой из матриц (11) содержит $n+1$ -вую строку $\operatorname{Re}\Omega(t_1)\overline{y}'(t_1), \ldots, \operatorname{Re}\Omega(t_r)\overline{y}'(t_r)$ (напомним, что $y' = \Omega - x'$), так как в противном случае вторая из матриц (11) имела бы ранг $r+1$. Отсюда следует, что матрица

$$(12)\qquad \begin{pmatrix} \operatorname{Re} x_1(t_1)\overline{y}'(t_1) & \operatorname{Re} x_1(t_2)\overline{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} x_1(t_r)\overline{y}'(t_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{Re} x_n(t_1)\overline{y}'(t_1) & \operatorname{Re} x_n(t_2)\overline{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} x_n(t_r)\overline{y}'(t_r) \\ \operatorname{Re} ix_1(t_1)\overline{y}'(t_1) & \operatorname{Re} ix_1(t_2)\overline{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} ix_1(t_r)\overline{y}'(t_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{Re} ix_n(t_1)\overline{y}'(t_1) & \operatorname{Re} ix_n(t_2)\overline{y}'(t_2) & \ldots & \operatorname{Re} ix_n(t_r)\overline{y}'(t_r) \end{pmatrix}$$

имеет ранг $< r$. Умножим s-тую строку ($s = n+1, \ldots, 2n$) матрицы (12) на $-i$ и результат умножения прибавим к $s-n$-той строке. Полученная матрица, очевидно, имеет тот же самый ранг $< r$. Тогда и матрица, состоящаяся из первых n строк полученной матрицы,

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1)\overline{y}'(t_1) & x_1(t_2)\overline{y}'(t_2) & \ldots & x_1(t_r)\overline{y}'(t_r) \\ x_2(t_1)\overline{y}'(t_1) & x_2(t_2)\overline{y}'(t_2) & \ldots & x_2(t_r)\overline{y}'(t_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n(t_1)\overline{y}'(t_1) & x_n(t_2)\overline{y}'(t_2) & \ldots & x_n(t_r)\overline{y}'(t_r) \end{pmatrix}$$

имеет ранг $< r$. Так как $|\overline{y'}(t_s)| = |\Omega(t_s) - x'(t_s)| = \sup_{t \in T} |\Omega(t) - x'(t)| > 0$ ($s = 1, \ldots, r$), то и матрица

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \dots & x_1(t_r) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \dots & x_2(t_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \dots & x_n(t_r) \end{pmatrix}$$

имеет ранг $<r$. Но это возможно только тогда, когда $r \geqq n+1$, так как функции $x_1, \dots, x_n$ образуют чебышевскую систему.

Экстремальные элементы в бесконечномерных нормированных пространствах. Здесь мы дадим необходимые и достаточные условия для экстремальности заданной функции $x' \in X$ относительно заданного функционала $l \in X^*$ в случае, когда X — бесконечномерное нормированное пространство. В специальном случае, когда E — пространство Гильберта, нормированное при помощи скалярного произведения, мы сформулируем соответствующие уточнения, а также и некоторые приложения.

Пусть, как и прежде, T — компактное топологическое пространство, E — действительное или комплексное нормированное линейное пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, а X — действительное или комплексное (вместе с E) линейное пространство непрерывных функций $x: T \to E$ с нормой $\|x\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|_E$. Здесь, однако, будем предполагать, что X — бесконечномерное пространство. Пусть дальше E^* и X^* — сопряженные пространства, причем E^* наделено слабой* топологией (E^*, E). Напомним, что единичный шар $K \subset E^*$ компактен относительно этой топологии. Мы сохраняем так же обозначение $\mathrm{Ex}(K)$ для крайних точек единичного шара и $[\mathrm{Ex}(K)]$ для замыкания $\mathrm{Ex}(K)$ относительно топологии $\sigma(E^*, E)$. Наконец, как и выше, положим $N = [\mathrm{Ex}(K)] \times T$.

В дальнейших рассуждениях мы используем теорему 1 и диагональный принцип Я. Тагамлицкого, обобщающий теорему А. Тихонова [8]. На самом деле мы используем следующий хорошо известный частный случай диагонального принципа, являющийся следствием теоремы А. Тихонова.

Пусть M — непустое множество, A — направленное множество индексов и пусть $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — последовательность (в общем случае обобщенная) числовых функций f_α, определенных на M.

Теорема. *Если числовая последовательность $\{f_\alpha(q)\}_{\alpha \in A}$ ограничена при любом выборе элемента $q \in M$ (т. е. $|f_\alpha(q)| \leqq A_q$ для всех достаточно больших $\alpha \in A$), то существует подпоследовательность $\{f_{\alpha_\delta}\}_{\delta \in \Delta}$ последовательности $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, так что для всякого $q \in M$, числовая последовательность $\{f_{\alpha_\delta}(q)\}_{\delta \in \Delta}$ сходится.*

Сначала мы докажем одно известное по существу предложение.

Предложение. *При введенных выше обозначениях и предположениях, для любого функционала $l \in X^*$ $(l \neq 0)$ существует положительная мера μ на множестве $N = [\mathrm{Ex}(K)] \times T$, т. е. позитивный функционал на пространстве всех непрерывных числовых (действительных или комплексных в зависимости от X) функций, определенных на N, так что для любого $x \in X$*

$$l(x) = \int_N L(x(t))\,d\mu \quad (\mu(N) = \|l\|). \tag{13}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что пространство X — изометрически изоморфно пространству $\tilde{X}$ всех непрерывных числовых функций ψ_x, определенных для любого $(L, t) \in N$ равенством $\psi_x(L, t) = |L(x(t))|$ $(x \in X)$ и нормированных с равномерной нормой $\|\psi\| = \sup_{(L, t) \in N} |L(x(t))|$. Изометрический изоморфизм задается соответствием $x \to \psi_x$. Очевидно указанное соответствие является изоморфизмом относительно линейных операций. Оно является так же изометрией, т. е. $\|x\| = \|\psi_x\|$. Этот факт сразу следует из соотношения $\|x\| = \sup_{(L, t) \in N} |L(x(t))|$

(см. [1, равенство (9′)]) и дает нам возможность отождествить сопряженные пространства X^* и $\widetilde{X}^*$, так что для любого $l\in X^*$ и $x\in X$, $l\in\widetilde{X}^*$ и $l(x)=l(\psi_x)$.

Обозначим через A множество всех конечных систем линейно независимых функций пространства X вида $\alpha=\{x_1,\dots,x_n\}$, а через $X_\alpha\subset X$ — n-мерное пространство, порожденное системой α. Будем считать, что $\alpha'\prec\alpha''$, если $X_{\alpha'}\subset X_{\alpha''}$. Очевидно, что при этом упорядочении A — направленное множество. Пусть $l\in X^*$ и $l\neq 0$. Положим $l_\alpha=l/X_\alpha$ (т. е. l_α — ограничение функционала l на подпространстве X_α). Тогда, согласно теореме 1, для любого $x\in X_\alpha$, l_α допускает представление

$$l_\alpha(\psi_x)=l_\alpha(x)=\mu_1^\alpha L_1^\alpha(x(t_1^\alpha))+\dots+\mu_{r_\alpha}^\alpha L_{r_\alpha}^\alpha(x(t_{r_\alpha}^\alpha)), \tag{14}$$

где $t_i^\alpha\in T$, $L_i^\alpha\in\operatorname{Ex}(K)$, $i=1,\dots,r_\alpha$, $\Sigma_{i=1}^\alpha\mu_i=\|l_\alpha\|\leqq\|l\|$. При том $1\leqq r_\alpha\leqq n$, если E и X (следовательно, и X_α) — действительные и $1\leqq r_\alpha\leqq 2n-1$, если E и X — комплексные пространства. При помощи представления (14) продолжим l_α до функционала, определенного на пространстве всех непрерывных функций ψ, определенных на N и нормированных равномерной нормой $\|\psi\|=\sup_{(L,t)\in N}|\psi(L,t)|$. При том, если E и X — действительные пространства, то область определения продолжения l_α является $C_R(N)$, а если E и X — комплексные пространства, область определения этого продолжения — $C(N)$. Рассмотрим для определенности комплексный случай. Если μ_α — указанное продолжение l_α до $C(N)$, то для любого $\psi\in C(N)$ будем иметь

$$\mu_\alpha(\psi)=\mu_1^\alpha\psi(L_1^\alpha,t_1^\alpha)+\dots+\mu_{r_\alpha}^\alpha\psi(L_{r_\alpha}^\alpha,t_{r_\alpha}^\alpha),\ (t_i^\alpha\in T,\ L_i^\alpha\in\operatorname{Ex}(K),\ i=1,\dots,r_\alpha,\ \sum_{i=1}^{r_\alpha}\mu_i^\alpha=\|l_\alpha\|=\|l\|).$$

Рассмотрим последовательность $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Так как $\|\mu_\alpha\|=\|l_\alpha\|\leqq\|l\|$, то для любого $\psi\in C(N)$ имеем $|\mu_\alpha(\psi)|\leqq\|l\|.\|\psi\|$, т. е. последовательность $\{\mu_\alpha(\psi)\}_{\alpha\in A}$ ограничена для всех $\alpha\in A$. Согласно диагональному принципу существует такая подпоследовательность $\{\mu_{\alpha_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$, что каждая из числовых последовательностей $\{\mu_{\alpha_\delta}(\psi)\}_{\alpha\in\Delta}$ $(\psi\in C(N))$ сходится. Обозначим через μ предел последовательности $\{\mu_{\alpha_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$. Очевидно μ — адитивный гомогенный и позитивный функционал, определенный на $C(N)$. Легко видеть, что $\|\mu\|=\|l\|$. Действительно, из неравенства $|\mu_{\alpha_\delta}(\psi)|\leqq\|l\|\,\|\psi\|$, выполняемое для любого $\psi\in C(N)$ следует, что $\|\mu\|\leqq\|l\|$. С другой стороны, для каждого $x\in X$ $\mu(\psi_x)=l(\psi_x)=l(x)$, так как для всех достаточно больших $\delta\mu_{\alpha_\delta}(\psi_x)=l(x)$, следовательно, μ является продолжением l до $C(N)$ и $\|\mu\|\geqq\|l\|$. Итак, $\|\mu\|=\|l\|$. Функционал μ задает положительную меру на $C(N)$, для которой $\mu(N)=\|\mu\|=\|l\|$. Кроме того, для всякого $x\in X$ $\mu(\psi_x)=l(x)=\int_N L(x(t))d\mu$, чем и завершается доказательство комплексного случая.

Доказательство действительного случая проводится тем же образом, и мы не будем останавливаться на нем.

В качестве тривиального следствия нашего предложения докажем следующую теорему.

Теорема 10. *При введенных выше обозначениях, для того, чтобы функция $x'\in X$ $(x'\neq 0)$ была экстремальным элементом для функционала $l\in X^*$ $(l\neq 0)$, т. е. $l(x')=\|l\|.\|x'\|$, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная мера на множестве непрерывных (действительных или комплексных) числовых функций, определенных на N, носитель которой содержится во множестве*

$$Q_{x'}=\{(L_1,t_1)\in N:\ L_1(x'(t_1))=\sup_{(L,t)\in N}|L(x'(t))|=\|x'\|\},$$

причем $\mu(Q_{x'})=\|l\|$ и $l(x)=\int_{Qx'}L(x(t))d\mu$ для любого $x\in X$. Если x'' — любой экстремальный элемент для l, то для всякого (L,t) принадлежащее носителю σ меры μ будем иметь

$$\frac{L(x'(t))}{\|x'\|}=\frac{L(x''(t))}{\|x''\|}=1,$$

а для носителя σ *имеем включение* $\sigma\subset\bigcap_{x'}Q_{x'}$, *где* x' *пробегает множество всех экстремальных элементов для* l.

Доказательство. Доказательства действительного и комплексного случая совпадают, так что мы рассмотрим эти два случая вместе.

Достаточность следует из очевидных равенств

$$l(x')=\int\limits_{Q_{x'}}L(x'(t))d\mu=\int\limits_{Q_{x''}}\sup_{(L,\,t)\in N}|L(x'(t))|\,d\mu=\|x'\|\int\limits_{Q_{x'}}d\mu=\|x'\|\,.\,\|l\|.$$

Необходимость. Пусть $x'\in X\,(x'\pm0)$ — экстремальная функция для $l\in X^*(l\neq0)$. Из предыдущего предложения следует существование меры с носителем $\sigma\in N$ так, что для любого $x\in X\; l(x)=\int_N L(x(t))d\mu$ и $\mu(N)=\|l\|$. Покажем, что $\sigma\subset Q_{x'}$. Но это включение сразу следует из соотношений

$$\|l\|\,\|x'\|=\int\limits_N L(x'(t))d\mu\leqq\int\limits_N|L(x'(t))|d\mu\leqq\sup_{(L,\,t)\in N}|L(x'(t))|\int\limits_N d\mu=\|l\|\,\|x'\|.$$

Из соотношений $(L,t)\in\sigma$ и определения $Q_{x'}$ следует, что $L(x'(t))=\|x'\|$. Повторяя те же рассуждения для любого другого экстремального элемента $x''\in X$ получим, что $\sigma\subset Q_{x''}$ и $L(x''(t))=\|x''\|$ для $(L,t)\in\sigma\subset Q_{x''}$, т. е., что $\sigma\subset\bigcap_{x'}Q_{x'}$ и

$$\frac{L(x'(t))}{\|x'\|}=\frac{L(x''(t))}{\|x''\|}=1$$

для всех $(L,t)\in\sigma$, чем завершается доказательство теоремы.

Ниже мы докажем несколько простых следствий теоремы 10. Сначала отметим, что если $T=\{t_0\}$ — одноточечное множество, то любая функция $x\colon T\to E$ — непрерывна. Тогда (как мы видели раньше) $\|x\|=\|a\|_E$, функцию x можно отождествить с единственным значением $a=x(t_0)$, а X — с соответствующим подпространством пространства E. Чтобы не усложнять формулировку, будем считать, что это подпространство совпадает с E, и тогда $X^*=E^*$. В этом случае теорема 10 принимает следующий вид.

Следствие 1. *Пусть* E — *действительное или комплексное нормированное пространство с нормой* $\|.\|$. *Для того, чтобы элемент* $a'\in E\,(a'\neq0)$ *был экстремальным для функционала* $L'\in E^*(L'\neq0)$, *т. е.* $L'(a')=\|L'\|\,.\,\|a'\|$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная мера* μ *на* $[\mathrm{Ex}\,(K)]$ *(т. е. линейный позитивный функционал на пространстве всех непрерывных функций, действительных или комплексных вместе с* E, *определенных на* $[\mathrm{Ex}\,(K)]$*), носитель* σ *которой содержится во множестве*

$$P_{a'}=\{L_1\in[\mathrm{Ex}\,(K)]:\quad L_1(a')=\sup_{L\in\,\mathrm{Ex}\,(K)}|L(a')|=\|a'\|\},$$

причем $\mu(P_{a'})=\|L'\|$ *и* $L'(a)=\int_{P(a')}L(a)d\mu$ *для любого* $a\in E$. *Если* a'' — *какой-нибудь другой экстремальный элемент для* L', *то для любого* L *принадлежащее носителю* σ *меры* μ *имеем* $L(a')/\|a'\|=L(a'')/\|a''\|=1$, *а для* σ *имеем включение* $\sigma\subset\bigcap_{a'}P_{a'}$, *где* a' *пробегает все экстремальные элементы для* L.

Рассмотрим случай, когда E — комплексное или действительное пространство Гильберта, нормированное при помощи нормы (8) и X — комплексное или действительное (вместе с E) пространство непрерывных функций $x\colon T\to E$ с нормой $\|x\|=\sup_{t\in T}\sqrt{(x(t)\,|\,x(t))}$. В этом случае мы уточним теорему 10 следующим образом.

Теорема 11. *При сделанных выше предположениях для* E *и* X, *для того, чтобы элемент* $x'\in X\,(x'\neq0)$ *был экстремальным для функционала* $l\in X^*\,(l\neq0)$, *т. е.* $l(x')=\|l\|\,\|x'\|$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная мера* μ *на компактном множестве*

$$Q_{x'}=\{t_1\in T:\ (x'(t_1)\mid x'(t_1))=\sup_{t\in T}(x'(t)\mid x'(t))=\|x'\|^2\}$$

(т. е. позитивный функционал μ *на пространстве непрерывных числовых функций, определенных на* $Q_{x'}$ *(причем* $\mu(Q_{x'})=\|l\|$ *и* $l(x)=\int_{Q_{x'}}(x(t)\mid x'(t))/\|x'\|d\mu$ *для любого* $x\in X$*). Если* x' *и* x'' *— любые экстремальные элементы для* l*, то для всех* $t\in\sigma$ *имеем* $x'(t)/\|x'\|=x''(t)/\|x''\|$*. Кроме того, для носителя* σ *меры* μ *имеем включение* $\sigma\subset\bigcap_{x'}Q_{x'}$*, где* x' *пробегает все экстремальные элементы для функционала* l*.*

Доказательство. Достаточность следует из очевидных равенств

$$l(x')=\int_{Q_{x'}}\frac{(x'(t))|x'(t))}{\|x'\|}d\mu=\int_{Q_{x'}}\frac{\sup_{t\in T}(x'(t)\mid x'(t))}{\|x'\|}d\mu=\|x'\|\,\|l\|.$$

Необходимость. Пусть $x'\in X(x'\neq 0)$ — экстремальный элемент для l (для определенности рассмотрим случай, когда E и X — комплексные пространства). Обозначим через A множество всех конечных систем $\alpha=\{x_1,\ldots,x_n\}$ линейно независимых функций пространства, содержащих функцию x', и обозначим через $X_\alpha\subset X$ линейное пространство всех линейных комбинаций с комплексными коэффициентами функций $x_1,\ldots,x_n$. Упорядочим множество A считая, что $\alpha'<\alpha''$, если $X_{\alpha'}\subset X_{\alpha''}$. При этом упорядочении A является направленностью. Пусть $l_\alpha=l/X_\alpha$ (т. е. l_α — ограничение l на X_α). Ясно, что x' — экстремальный элемент для любого l_α. Действительно, $l(x')=l_\alpha(x')=\|l\|\,\|x'\|$. Но так как $\|l_\alpha\|\leq\|l\|$, то $\|l_\alpha\|=\|l\|$ и x' — экстремальный элемент для l_α. Из теоремы 7 следует, что для всякого $x\in X_\alpha$ имеет место представление

$$l_\alpha(x)=\mu_1^\alpha\frac{(x(t_1^\alpha)\mid x'(t_1^\alpha))}{\|x'\|}+\cdots+\mu_{r_\alpha}^\alpha\frac{(x(t_{r_\alpha}^\alpha)\mid x'(t_{r_\alpha}^\alpha))}{\|x'\|}\ (\mu_i^\alpha>0,\ t_i^\alpha\in Q_{x'},\ i=1,\ldots,r_\alpha,\ \sum_{i=1}^{r_\alpha}\mu_i=\|l_\alpha\|=\|l\|)\tag{15}$$

(соотношение $t_i^\alpha\in Q_{x'}$ следует из условия в) теоремы 7). Пусть $\widetilde{X}_\alpha$ — пространство непрерывных функций ψ_x, определенных на $Q_{x'}$ равенствами $\psi_x(t)=\frac{(x(t)\mid x'(t))}{\|x'\|}$ $(x\in X_\alpha)$, причем $\|\psi_{x'}\|=\sup_{t\in Q_{x'}}|\psi_x(t)|=\|x\|$. Положив $\widetilde{l}_\alpha(\psi_x)=l_\alpha(x)$ для $x\in X_\alpha$ и имея в виду (15) получим, что $|\widetilde{l}_\alpha(\psi_x)|\leq\|l\|\sup_{t\in Q_{x'}}(x(t)\mid x'(t))/\|x'\|$, причем для $x=x'$ имеем $|\widetilde{l}_\alpha(\psi_{x'})|=\|l\|\cdot\|\psi_{x'}\|$, а это означает, что $\|\widetilde{l}_\alpha\|=\|l_2\|=\|l\|$. Так как $\widetilde{l}_\alpha(\psi_x)=l_\alpha(x)$ то для $\widetilde{l}_\alpha$ имеет место представление (15), которое принимает следующий вид:

$$\widetilde{l}(\psi_x)=\mu_1^\alpha\psi_x(t_1^\alpha)+\cdots+\mu_{r_\alpha}^\alpha\psi_x(t_{r_\alpha}^\alpha)\ (\mu_i^\alpha>0,\ t_i^\alpha\in Q_{x'},\ i=1,\ldots,r_\alpha,\ \sum_{i=1}^{r_\alpha}\mu_i=\|\widetilde{l}_\alpha\|=\|l\|.$$

Продолжим посредством этого представления функционал $\widetilde{l}_\alpha$ до пространства $C(Q_{x'})$ всех непрерывных комплексных функций, определенных на $Q_{x'}$, и обозначим продолжение через μ_α. Тогда для любого $\psi\in C(Q_{x'})$ будем иметь

$$\mu_\alpha(\psi)=\mu_1^\alpha\psi(t_1^\alpha)+\cdots+\mu_{r_\alpha}^\alpha\psi(t_{r_\alpha}^\alpha)\ (\mu_i^\alpha>0,\ t_i^\alpha\in Q_{x'},\ i=1,\ldots,r_\alpha,\ \sum_{i=1}^{r_\alpha}\mu_i^\alpha=\|\widetilde{l}_\alpha\|=\|l\|).$$

Ясно, что $\|\mu_\alpha\|=\|l\|$, следовательно, для любого $\psi\in C(Q_{x'})$ имеем

$$|\mu_\alpha(\psi)|\leq\|l\|\cdot\|\psi\|.\tag{16}$$

Рассмотрим последовательность функций $\{\mu_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Неравенство (16) означает, что числовая последовательность $\{\mu_\alpha(\psi)\}_{\alpha\in A}$ ограничена для любого $\psi\in C(Q_{x'})$. Согласно диагональному принципу существует подпоследовательность $\{\mu_{\alpha_\delta}\}_{\delta \in \Delta}$, сходящаяся для каждого $\psi \in C(Q'_x)$. Обозначим предел этой подпоследовательности через μ. Очевидно, что μ — линейный позитивный функционал. Из равенств

$$\| x' \| \mu(1) = \mu\left(\frac{(x'(t) \mid x'(t))}{\| x' \|}\right) = \lim_\alpha \mu_\alpha\left(\frac{(x'(t) \mid x'(t))}{\| x' \|}\right) = \lim_\alpha \widetilde{l}_\alpha(\psi_{x'}) = \lim_\alpha l_\alpha(x') = \| x' \| . \| l \|$$

следует, что $\mu(1) = \| l \| = \| \mu \|$. Функционал μ задает положительную меру на $O_{x'}$, для которой $\mu(Q_{x'}) = \mu(1) = \| l \|$. Кроме того, для любого $x \in X$ имеем при достаточно больших α

$$l(x) = l_\alpha(x) = \mu_\alpha\left(\frac{(x(t) \mid x'(t))}{\| x' \|}\right) = \mu\left(\frac{(x(t) \mid x'(t))}{\| x' \|}\right) = \int_{Q_{x'}} \frac{(x(t) \mid x'(t))}{\| x' \|} d\mu.$$

Пусть $x'' \in X$ — любой экстремальный элемент для l. Из очевидных соотношений

$$\| x'' \| \, \| l \| = l(x'') = \int_{Q_{x'}} \frac{(x''(t) \mid x'(t))}{\| x' \|} d\mu \leqq \int_{Q_{x'}} \frac{|(x''(t) \mid x'(t))|}{\| x' \|} d\mu \leqq \int_{Q_{x'}} \frac{\| x'' \| . \| x' \|}{\| x' \|} d\mu = \| x'' \| \| l \|$$

следует, что для каждого $t' \in \sigma$ имеем $(x''(t) \mid x'(t)) = \| x'' \| . \| x' \|$, а это означает, что для таких $t' - \frac{x''(t')}{\| x'' \|} = \frac{x'(t')}{\| x'' \|}$. Но тогда

$$(x''(t') \mid x''(t')) = \left(x''(t') \mid \frac{\| x'' \| x'(t')}{\| x' \|}\right) = \frac{\| x'' \|}{\| x' \|} (x''(t') \mid x'(t')) = \| x'' \|^2,$$

или

$$(x''(t') \mid x''(t')) = \sup_{t \in T} (x''(t) \mid x''(t)).$$

Полученное равенство означает, что из $t' \in \sigma$ следует, что $t' \in Q_{x''}$ для любого экстремального элемента $x'' \in X$ для l, следовательно, $t' \in \bigcap_{x'} Q_{x'}$, чем завершается доказательство комплексного случая.

Доказательство действительного случая проводится тем же образом, так что мы не будем останавливаться на нем.

В частном случае, когда $E = \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ означает множество комплексных чисел), а скалярное произведение в E задается равенством

$$(a \mid b) = a\bar{b},$$

где $\bar{b}$ — сопряженное на b комплексное число, получаем следующее непосредственное следствие теоремы 7.

Следствие 1. *Пусть X — комплексное пространство числовых функций, непрерывных на компактном множестве T и нормированных нормой $\| x \| = \sup_{t \in T} | x(t) | = \sup_{t \in T} \sqrt{x(t)\overline{x(t)}} = \sup_{t \in T} \| x(t) \|_E$. Для того, чтобы функция $x' \in X (x' \neq 0)$ была экстремальной для заданного функционала $l \in X^* (l \neq 0)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная мера μ на множестве $Q_{x'} = \{t_1 \in T: \ | x'(t_1) | = \| x' \|\}$ так, что $\mu(Q_{x'}) = \| l \|$ и $l(x) = \int_{Q_{x'}} x(t)\overline{x'(t)} / \| x' \| d\mu$ для любого $x \in X$. Если $x'' \in X (x'' \neq 0)$ — любая экстремальная функция для l, то равенство $x'(t) / \| x' \| = x''(t) / \| x'' \|$ выполняется для всех t, принадлежащих носителю σ меры μ, откуда следует, что $\sigma \subset \bigcap_{x'} Q_{x'}$, где x' пробегает множество всех экстремальных функций для l.*

В случае, когда $E = R^1$, а скалярное произведение в E задается равенством

$$(a \mid b) = a . b,$$

то, очевидно, теорема 11 получает следующий вид.

Следствие 2. *Пусть X — действительное пространство действительных функций, непрерывных на компактном множестве T и с нормой* $\|x\|=\sup_{t\in T}|x(t)|=\sup_{t\in T}\sqrt{x(t)\overline{x(t)}}=\sup_{t\in T}\|x(t)\|_E$. *Для того, чтобы функция $x'\in X(x'\neq 0)$ была экстремальной для заданного функционала $l\in X^*(l\neq 0)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная мера μ на множестве* $Q_{x'}=\{t_1\in T:|x'(t)|=\|x'\|\}$ *так, что* $\mu(Q_{x'})=\|l\|$ *и* $l(x)=\int_{Q_{x'}}x(t)x'(t)/\|x'\|d\mu$ *для любого $x\in X$. Если $x''\in X$ — любая экстремальная функция для l, то равенство* $x'(t)/|x'\|=x''(t)/\|x''\|$ *выполняется для всякого t, принадлежащего носителю σ меры μ, откуда следует, что* $\sigma\subset\bigcap_{x'}Q_{x'}$, *где x' пробегает множество всех экстремальных функций для l.*

Замечание. Очевидно такие следствия можно сформулировать и в случае, когда $E=C^n$ и $(a|b)=a_1\overline{b}_1+\cdots a_n\overline{b}_n$, а так же, когда $E=R^n$ и $(a|b)=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$ (здесь $a=(a_1,\ldots,a_n)$, $b=(b_1,\ldots,b_n)$).

Ниже мы сформулируем обобщение одной известной теоремы А. Н. Колмогорова [9], содержащее в качестве частного случая одну теорему И. Зигнера [10].

Пусть E — действительное или комплексное нормированное пространство, $G\subset E$ — линейное пространство непрерывных функций g: $T\to E$ и Ω: $T\to E$ — непрерывная функция. Обозначим через пространство всех функций вида $g+\lambda\Omega$, нормированное с нормой $\|g+\lambda\Omega\|=\sup_{t\in T}\|g(t)+\lambda\Omega(t)\|_E$ (как всегда будем считать, что X действительно или комплексно вместе с E). Предположим, что $\inf_{g\in G}\|g+\Omega\|=m>0$ и рассмотрим задачу о наилучшем приближении Ω с функциями $g\in G$ относительно равномерной нормы. Обозначим через l функционал определен на X равенством

$$l(g+\lambda\Omega)=\lambda. \tag{17}$$

Из очевидных соотношений $|l(g+\lambda\Omega)|=|\lambda|\leq 1/m\|g+\lambda\Omega\|$ следует, что $l\in X^*$. Как известно, функция $g'\in G$ является элементом наилучшего приближения для Ω тогда и только тогда, когда функция $x'=\Omega-g'$ экстремальна для функционала (17). Это обстоятельство, вместе с предложением на с. 344, дает нам возможность дать краткое доказательство следующей теоремы.

Теорема 12 *(обобщенная теорема А. Колмогорова). При сделанных выше предположениях для того, чтобы $g'\in G$ была функцией наилучшего приближения для Ω, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $g\in G$ существовали элементы $L'\in \mathrm{Ex}(K)$ и $t'\in T$ так, что*

а) $L(\Omega(t')-g'(t'))=\|\Omega-g'\|$;

б) $\operatorname{Re}L'(g(t'))\leq 0$.

Доказательство. Доказательство проведем для комплексных E и X. В действительном случае доказательство сохраняется почти без изменений, так что мы его опускаем.

Достаточность тривиальна и ее доказательство в основном совпадает с доказательством достаточности теоремы Колмогорова. Действительно, пусть $g'\in G$ — такая функция, что для всякого $g\in G$ можно выбрать $L'\in\mathrm{Ex}(K)$ и $t'\in T$ так, что $L'(\Omega(t')-g'(t'))=\|\Omega-g'\|$ и $\operatorname{Re}L'(g(t'))\leq 0$. Для функции $g-g'\in G$, где $g\in G$ — любая функция, выберем $L'\in\mathrm{Ex}(K)$ и $t'\in T$ так, что $L'(\Omega(t')-g'(t'))=\|\Omega-g'\|$ и $\operatorname{Re}L'(g(t')-g'(t'))\leq 0$. Но тогда

$$\|\Omega-g'\|=L'(\Omega(t')-g'(t'))=L'(\Omega(t')-g(t'))+L'(g(t')-g'(t'))=\operatorname{Re}L'(\Omega(t')-g(t'))$$
$$+\operatorname{Re}L'(g(t')-g'(t'))\leq\operatorname{Re}L'(\Omega(t')-g(t'))\leq|L'(\Omega(t')-g(t'))|\leq\sup_{(L,t)\in N}|L(\Omega(t)-g(t))|$$
$$=\|\Omega-g\|,$$

следовательно, g' есть функция наилучшего приближения.

Необходимость следует непосредственно из доказательства предложения на с. 344. Действительно, если $g'\in G$ — функция наилучшего приближения для Ω, то функция $x'=\Omega-g'$ экстремальна для функционала l, определенного посредством (17). Тогда для любого $g\in G$ будем иметь $l(g)=0$ и $l(\Omega-g')=\|\Omega-g'\|.\|l\|$. Выберем систему $\alpha=\{x_1,\ldots,x_n\}$ так, чтобы пространство X_α, определенное на с. 345 включало функции $\Omega-g'$ и g. Тогда для функционала μ_α, определенного на с. 345, будем иметь

$$0=l(g)=\mu_1^\alpha L_1^\alpha(g(t_1^\alpha))+\cdots+\mu_{r_\alpha}^\alpha L_{r_\alpha}^\alpha(g(t_{r_\alpha}^\alpha)),\quad (t_i^\alpha\in T,\ L_i^\alpha\in \operatorname{Ex}(K),\ 1\leqq i\leqq r_\alpha,\ \sum_{i=1}^{r_\alpha}\mu_i=\|l_\alpha\|=\|l\|)$$

и

$$\|l\|\,\|\Omega-g'\|=l(\Omega-g')=\mu_\alpha(\Omega-g')=\mu_1^\alpha L_1^\alpha(\Omega(t_1^\alpha)-g'(t_1^\alpha))+\mu_{r_\alpha}^\alpha L_{r_\alpha}^\alpha(\Omega(t_{r_\alpha}^\alpha)-g'(t_{r_\alpha}^\alpha)).$$

Первое из этих двух равенств указывает, что для некоторого $i(1\leqq i\leqq r_\alpha)\operatorname{Re}L_i^\alpha(g(t_i^\alpha))\leqq 0$, а второе, что для любого $i(1\leqq i\leqq r_\alpha)$ имеем $L_i^\alpha(\Omega(t_i^\alpha)-g'(t_i^\alpha))=\|\Omega-g'\|$, так что для некоторого $i(1\leqq i\leqq r_\alpha)$ будут выполнены оба соотношения, чем завершается доказательство необходимости.

Упомянутая выше теорема И. Зингера получается в случае, когда $T=\{t_0\}$ (т. е. когда T — одноточечное множество).

Чтобы убедится, что теорема 12 действительно обобщает теорему А. Колмогорова достаточно рассмотреть следующий частный случай.

Пусть E — пространство Гильберта (действительное или комплексное) с нормой (8). Тогда имеет место следующая теорема (мы сформулируем теорему в комплексном случае).

Теорема 13. *При предположениях теоремы 12 и при дополнительном предположении, что E — пространство Гильберта с нормой* (8), *для того, чтобы функция $g'\in G$ была элементом наилучшего приближения для Ω, необходимо и достаточно, чтобы для любого $g\in G$ существовал элемент $t'\in T$ так, чтобы выполнялись соотношения*

а) $\operatorname{Re}(g(t')\,|\,\Omega(t')-g'(t'))\leqq 0$;

б) $(\Omega(t')-g'(t')\,|\,\Omega(t')-g'(t'))=\sup_{t\in T}(\Omega(t)-g'(t)\,|\,\Omega(t)-g'(t))$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы (12), и мы его опускаем. Упомянем только, что при доказательстве необходимости, вместо предложения на с. 344, мы пользуемся доказательством теоремы 11.

Заметим, наконец, что теорема 13 является непосредственным обобщением одной теоремы С. И. Зуховицкого и М. Г. Крейна [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Чакалов. Экстремальные элементы нормированных пространств и некоторые связанные с ними экстремальные задачи. I. *Сердика* **12**, 1986, 250—264.
2. Е. Димитров, В. Чакалов. Об одной экстремальной задаче. *Сердика* 10, 1984, 384—396.
3. В. Чакалов, Экстремальные элементы некоторых нормированных пространств. *Доклады БАН*, **36**, кн. 2, 1983, 173—176.
4. Е. Ремез. Про методов найкращого, в розумiнi Чебишова, наближенного представления функцiй. Київ, 1935.
5. С. Зуховицкий. О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева. *Успехи мат. наук*, **11**, 1956, № 2, 125—159.
6. I. Singer. Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Berlin, 1970.
7. М. Крейн, А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973.
8. A. Tihonov. Über die topologische Erweiterung von Räumen. *Math. Ann.*, **102**, 1929, 544—561.
9. А. Колмогоров. Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции. *Успехи мат. наук.*, **1**, 1948, № 1, 216—221.
10. I. Singer. Choquet Spaces and Best Approximation. *Math. Ann.*, **148**, 1962, 330—340.
11. С. Зуховицкий, М. Крейн. Замечание об одном возможном обобщении теорем А. Хаара и А. Н. Колмогорова. *Успехи мат. наук*, **5**, 1950, № 1, 217—229.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 8. 7. 1985