Serdica
Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика
Българско математическо
списание

МЕТОД ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ ВСЕХ НУЛЕЙ ДАННОГО ОБОБЩЕННОГО ПОЛИНОМА ПО ЧЕБЫШЕВСКОЙ СИСТЕМЕ

И. В. МАКРЕЛОВ, Х. И. СЕМЕРДЖИЕВ, С. Г. ТАМБУРОВ

Предлагается новый метод для одновременного нахождения всех нулей произвольной кратности заданного обобщенного полинома по произвольной чебышевской системе. Метод можно рассматривать как обобщение известного метода Эрлиха, относящегося лишь к простым нулям данного алгебраического полинома. Доказана кубическая скорость сходимости метода и приведены численные примеры его реализации на ЭВМ.

Пусть задан обобщенный полином

$$P_N(x)=\sum_{j=0}^{N} a_j\varphi_j(x) \tag{1}$$

по произвольной чебышевской системе базисных функций $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^N$ с действительными или комплексными коэффициентами $\{a_j\}_{j=0}^N$, $a_N\neq0$, имеющий действительные или комплексные нули $z_1, z_2, \dots, z_m$ с кратностями $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, соотв. ($\Sigma_{j=1}^m \beta_j=N$), т. е.

$$P_N(z_i)=P'_N(z_i)=\cdots=P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)=0,\ P_N^{(\beta_i)}(z_i)\neq0,\quad i=1, 2, \dots, m. \tag{2}$$

В ряде частных случаев задача о нахождении всех нулей полинома (1) решена достаточно полно. Здесь остановимся только на методах, имеющих кубическую скорость сходимости. Для индивидуального поиска какого-нибудь простого нуля функции $f(x)$ Обрешков [1, 2] и Хайнц [9] предлагают итерационный метод с кубической скоростью сходимости

$$x^{[k+1]}=x^{[k]}-f(x^{[k]})/[f'(x^{[k]}-\frac{1}{2}f(x^{[k]})f''(x^{[k]})/f'(x^{[k]})], \tag{3}$$

$$k=0,\ 1,\ 2, \dots$$

В случае, когда $f(x)$ — алгебраический полином, т. е. имеет вид (1) с $\varphi_j(x)=x^j$, $j=0, 1, 2, \dots, N$, весьма эффективный аналог метода (3) для одновременного нахождения всех нулей полинома $P_N(x)$ (если они простые) предложил Эрлих [8]. Его метод можно записать в виде [3]

$$x_i^{[k+1]}=x_i^{[k]}-P_N(x_i^{[k]})/[P'_N(x_i^{[k]})-\frac{1}{2}P_N(x^{[k]})Q''_k(x_i^{[k]})/Q'_k(x_i^{[k]})], \tag{4}$$

$$i=1,\ 2, \dots, N;\quad k=0,\ 1,\ 2, \dots,$$

где

$$Q_k(x)=\prod_{j=1}^{N}(x-x_j^{[k]}).$$

Метод Эрлиха (4) имеет более широкую область сходимости, чем метод (3) зарекомендовал себя как один из лучших и вызвал ряд дальнейших его модификаций. В случаях тригонометрических и экспоненциальных полиномов (простые нули),

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 12, 1986, с. 351—357.

Макрелов и Семерджиев разработали [3] аналоги метода (4). Несомненный интерес представляет обобщение метода Эрлиха для полинома (1) в случае, когда $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^N$ — произвольная чебышевская система. Обобщение такого рода нам удалось получить в случае, когда все нули полинома (1) простые [7]. Оказывается, однако, что, следуя методике, развитой Семерджиевым и Тамбуровым в [6], где рассматривается метод с квадратической скоростью сходимости для одновременного нахождения всех нулей полинома (1), метод [7] можно еще обобщить и на случай нулей произвольной кратности.

В этой работе мы предлагаем новый метод для одновременного приближенного нахождения всех нулей полинома (1), который по своей вычислительной трудоемкости соизмерим с методом Семерджиева и Тамбурова [6], так как при его применении нет необходимости в перенормировке полинома (1), но зато имеет более высокую (кубическую) скорость сходимости. Настоящий метод можно считать обобщением метода Эрлиха (4) в двух направлениях: первое — произвольность чебышевской системы $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^N$, и второе — произвольная кратность нулей полинома по этой системе. Вопрос об определении кратностей нулей обобщенного полинома остается открытым. Отметим только, что в важном частном случае алгебраического полинома Семерджиевым и Тамбуровым [4] предложен простой эффективный метод для определения кратностей его нулей по его коэффициентам.

Для краткости введем обозначения:

$$M\begin{bmatrix}\varphi_0, & \varphi_1, \dots, \varphi_N\\ x, & z_1, \dots, z_m\\ 1, & \beta_1, \dots, \beta_m\end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=\!=} \left|\begin{matrix}\varphi_0(x) & \varphi_1(x) & \cdots & \varphi_N(x)\\ \varphi_0(z_1) & \varphi_1(z_1) & \cdots & \varphi_N(z_1)\\ \varphi_0'(z_1) & \varphi_1'(z_1) & \cdots & \varphi_N'(z_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_0^{(\beta_1-1)}(z_1) & \varphi_1^{(\beta_1-1)}(z_1) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_1-1)}(z_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_0(z_m) & \varphi_1(z_m) & \cdots & \varphi_N(z_m)\\ \varphi_0'(z_m) & \varphi_1'(z_m) & \cdots & \varphi_N'(z_m)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_0^{(\beta_m-1)}(z_m) & \varphi_1^{(\beta_m-1)}(z_m) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_m-1)}(z_m)\end{matrix}\right|$$

$$D\begin{bmatrix}\varphi_0, & \varphi_1, \dots, \varphi_N\\ x, & z_1, \dots, z_m\\ 1, & \beta_1, \dots, \beta_m\end{bmatrix} = \det M\begin{bmatrix}\varphi_0, & \varphi_1, \dots, \varphi_N\\ x, & z_1, \dots, z_m\\ 1, & \beta_1, \dots, \beta_m\end{bmatrix}$$

Итак, рассмотрим следующий метод:

$$x_i^{[k+1]} = x_i^{[k]} - P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})\left[P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) - \frac{1}{2}P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})\frac{Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})}{Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})}\right]^{-1}, \tag{5}$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x_i^{[k]}$ — k-тое приближение k i-тому нулю z_i полинома (1), а $Q_k(x)$ — обобщенный полином порядка N по этой же системе $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^N$, представлен в виде

(6) $$Q_k(x)=D\begin{bmatrix}\varphi_0, & \varphi_1, & \dots, \varphi_N\\ x, & x_1^{[k]}, & \dots, x_m^{[k]}\\ 1, & \beta_1, & \dots, \beta_m\end{bmatrix}.$$

Очевидно, $Q_k(x)$ имеет в качестве нулей числа $x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \dots, x_m^{[k]}$ с кратностями $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, соотв. Предполагаем также, что базисные функции $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{N}$ — достаточно гладкие.

При $\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_m=1$ метод (5) совпадает с нашим методом [7]. В еще более частном случае, когда $\varphi_j(x)=x^j$, $j=0, 1, \dots, N$ обобщенный полином $Q_k(x)$ (6) является определителем Вандермонда и из (5) получается метод Эрлиха (4).

Формула (5) удобна для практического применения метода. Для обоснования его сходимости, однако, необходимо (5) преобразовать в более удобную форму. Именно, из обеих частей (5) вычитаем z_i и используем, что выполняются (2). Тогда (5) записывается следующим образом

(7)
$$x_i^{[k+1]}-z_i=x_i^{[k]}-z_i-\left[P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})-P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)\right]\left[P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})-\frac{1}{2}P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})\frac{Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})}{Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})}\right]^{-1}.$$

К разнице $P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})-P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)$ применяем теорему о конечных приращениях и выделяя справа общий множитель $x_i^{[k]}-z_i$, (7) преобразуется к виду

(8) $$x_i^{[k+1]}-z_i=(x_i^{[k]}-z_i)\left\{1-P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})\left[P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})-\frac{1}{2}P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})\frac{Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})}{Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})}\right]^{-1}\right\},$$

где $\xi_i^{[k]}\in(x_i^{[k]}, z_i)$, $i=1, 2, \dots, m$.

Используя еще раз (2), (8) можем записать следующим образом:

(9)
$$x_i^{[k+1]}-z_i=(x_i^{[k]}-z_i)\,\frac{2Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})\,[P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})-P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})]-Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})\,[P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})-P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)]}{2Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})-Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})\,[P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})-P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)]}.$$

Применяя снова к разницам $P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})-P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})$ и $P_N^{(\beta_i-1)}(x_i^{[k]})-P_N^{(\beta_i-1)}(z_i)$ теореме о конечных приращениях от (9), получаем

(10) $$x_i^{[k+1]}-z_i=(x_i^{[k]}-z_i)\Omega_i^{[k]}/\Delta_i^{[k]},$$

где

(11) $$\Omega_i^{[k]}=Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[k]})(x_i^{[k]}-\xi_i^{[k]})-Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})(x_i^{[k]}-z_i)/2,$$

(12) $$\Delta_i^{[k]}=Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})\,P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})-Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})\,P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})(x_i^{[k]}-z_i)/2$$

и $\eta_i^{[k]}\in(x_i^{[k]}, \xi_i^{[k]})$, $i=1, 2, \dots, m$.

В дальнейшем докажем лишь теорему о локальной сходимости метода (5). Поэтому, при условиях локальности, т. е. при достаточно близких $x_i^{[k]}$ к соответствующим z_i, можем считать, что $(x_i^{[k]}-z_i)/2\approx x_i^{[k]}-\xi_i^{[k]}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}l_i^{[k]}$, $i=1, 2, \dots, m$, и, следовательно,

(13) $$\Omega_i^{[k]}\approx[Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[k]})-Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})\,P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})]\,l_i^{[k]}.$$

Имея в виду (6) можем записать

$$
\begin{aligned}
(14)\qquad & Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})\,P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[k]})-Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})\,P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})\\
&=(-1)^{N+3}\left\{\begin{vmatrix}
\varphi_0^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]}) & P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[k]})\\
\varphi_0^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) & 0\\
\varphi_0(x_1^{[k]}) & \cdots & \varphi_N(x_i^{[k]}) & 0\\
\varphi_0'(x_1^{[k]}) & \cdots & \varphi_N'(x_1^{[k]}) & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\varphi_0^{(\beta_m-1)}(x_m^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_m-1)}(x_m^{[k]}) & 0
\end{vmatrix}\right.\\
&\left.-\begin{vmatrix}
\varphi_0^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) & P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})\\
\varphi_0^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]}) & 0\\
\varphi_0(x_1^{[k]}) & \cdots & \varphi_N(x_1^{[k]}) & 0\\
\varphi_0'(x_1^{[k]}) & \cdots & \varphi_N'(x_1^{[k]}) & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\varphi_0^{(\beta_m-1)}(x_m^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_m-1)}(x_m^{[k]}) & 0
\end{vmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

В первом определителе справа в (14) умножаем первые $N+1$ — столбцы на $-a_0, -a_1, \dots, -a_N$, соотв., и добавляем их к последнему $N+2$-му столбцу, а во втором определителе — меняем места двух первых строк и таким образом правую часть (14) можно записать в виде одного только определителя:

$$
(15)\qquad (-1)^{N+3}\begin{vmatrix}
\varphi_0^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]}) & P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[k]})-P_N^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})\\
\varphi_0^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) & P_N^{(\beta_i)}(\xi_i^{[k]})\quad -P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})\\
\varphi_0(x_1^{[k]}) & \cdots & \varphi_N(x_1^{[k]}) & P_N(z_1)\quad -P_N'(x_1^{[k]})\\
\varphi_0'(x_1^{[k]}) & \cdots & \varphi_N'(x_1^{[k]}) & P_N'(z_1)\quad -P_N'(x_1^{[k]})\\
\dots & \dots & \dots & \dots\\
\varphi_0^{(\beta_m-1)}(x_m^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_m-1)}(x_m^{[k]}) & P_N^{(\beta_m-1)}(z_m)-P_N^{(\beta_m-1)}(x_m^{[k]})
\end{vmatrix},
$$

где снова использовали (2). Ко всем разницам последнего столбца (15) применяем теорему о конечных приращениях и вопросный столбец преобразуется к виду

$$
\{P_N^{(\beta_i+2)}(\zeta_i^{[k]})(\eta_i^{[k]}-x_i^{[k]}),\ P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[k]})(\xi_i^{[k]}-x_i^{[k]}),\quad P_N'(\xi_{11}^{[k]})(z_1-x_1^{[k]}),\dots,P_N^{(\beta_1)}(\xi_{1\beta_1}^{[k]})(z_1-x_1^{[k]})
$$
$$
,\dots,P_N'(\xi_{m1}^{[k]})(z_m-x_m^{[k]}),\dots,P_N^{(\beta_m)}(\xi_{m\beta_m}^{[k]})(z_m-x_m^{[k]})\}^T,
$$

где $\zeta_i^{[k]}\in(\eta_i^{[k]},\ x_i^{[k]})$, $\xi_{il}^{[k]}\in(z_i,\ x_i^{[k]})$, $i=1, 2,\dots, m$, $l=1, 2,\dots,\beta_i$.

Таким образом, используя преобразованный определитель (15), окончательно получаем, что

$$(16)\qquad |\Omega_i^{[k]}|=|x_i^{[k]}-z_i|\left|\begin{vmatrix} \varphi_0^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]}) & P_N^{(\beta_i+2)}(\zeta_i^{[k]})(\eta_i^{[k]}-x_i^{[k]}) \\ \varphi_0^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]}) & P_N^{(\beta_i+1)}(\eta_i^{[k]})(\xi_i^{[k]}-x_i^{[k]}) \\ \varphi_0(x_1^{[k]}) & \cdots & \varphi_N(x_1^{[k]}) & P'_N(\xi_{11}^{[k]}) \quad (z_1-x_1^{[k]}) \\ \varphi'_0(x_1^{[k]}) & \cdots & \varphi'_N(x_1^{[k]}) & P''_N(\xi_{12}^{[k]}) \quad (z_1-x_1^{[k]}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0^{(\beta_m-1)}(x_m^{[k]}) & \cdots & \varphi_N^{(\beta_m-1)}(x_m^{[k]}) & P_N^{(\beta_m)}(\xi_{m\beta m}^{[k]})(z_m-x_m^{[k]}) \end{vmatrix}\right|.$$

Лемма. *Пусть*

$$(17)\qquad L(c)=\min_{i=1,2,\ldots,m}\ \inf_{\substack{|y_j-z_j|<c\\ j=1,2,\ldots,m}}\left|\frac{d^{\beta_i}}{dx^{\beta_i}}\left\{D\begin{bmatrix}\varphi_0, & \varphi_1,\ldots,\varphi_N\\ x, & y_1,\ldots,y_m\\ 1, & \beta_1,\ldots,\beta_m\end{bmatrix}\right\}\right|_{x=y_i}.$$

При достаточно маленьком $C>0$, величина $L(c)$ строго положительна.

Доказательство. Определитель в (17) как непрерывная функция от своих элементов, при достаточно близких y_j к z_j, $j=1, 2, \ldots, m$, достаточно близок к определителю

$$(18)\qquad \frac{d^{\beta_i}}{dx^{\beta_i}}\left\{D\begin{bmatrix}\varphi_0, & \varphi_1,\ldots,\varphi_N\\ x, & z_1,\ldots,z_m\\ 1, & \beta_1,\ldots,\beta_m\end{bmatrix}\right\}_{x=z_i}.$$

Определитель (18), со своей стороны, представляет β_i-тую производную некоторого обобщенного полинома по системе $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^N$, совпадающего $P_N(x)$ с точностью до ненулевого множителя

$$a_N/D\begin{bmatrix}\varphi_0, & \varphi_1,\ldots,\varphi_{N-1}\\ z_1, & z_2,\ldots,z_m\\ \beta_1, & \beta_2,\ldots,\beta_m\end{bmatrix},\quad \text{так как } a_N\neq 0$$

и система $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^N$ — чебышевская. Доказательство леммы завершается применением (2).

Теорема. *Пусть $\beta=\max\limits_{i=1,2,\ldots,m}\beta_i$ и чебышевская система $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^N$ состоит из достаточно гладких функций. Пусть $|\varphi_j^{(l)}(x)|\le M_{jl}$, $l=0, 1, 2, \ldots, \beta+2$. Пусть $0<q<1$, $0<c<1$ и константа c выбрана достаточно маленькой, чтобы выполнялись неравенства*

$$(19)\qquad N(c)\overset{\text{def}}{=\!=}L^2(c)-c\{(\sum_{r=0}^N|a_r|M_{r\beta})[\prod_{s=0}^N(M^2_{s(\beta+1)}+\sum_{i=1}^m\sum_{k=0}^{\beta_i-1}M^2_{sk})]^{1/2}\}>0,$$

$$(20)\qquad K(c)\overset{\text{def}}{=\!=}c^2\{\prod_{s=0}^N(M^2_{s(\beta+1)}+M^2_{s\beta}+\sum_{i=1}^m\sum_{k=0}^{\beta_i-1}M^2_{sk})[(\sum_{r=0}^N|a_r|M_{r(\beta+2)})^2$$

$$+(\sum_{r=0}^N|a_r|M_{r(\beta+1)})^2+\sum_{i=1}^m\sum_{k=0}^{\beta_i-1}(\sum_{r=0}^N|a_r|M_{rk})^2]\}^{1/2}<N(c),$$

где величина $L(c)$ определяется формулой (17). Тогда, если начальные приближения $x_i^{[0]}$ удовлетворяют неравенствам

$$(21)\qquad |x_i^{[0]}-z_i|\le cq,\quad i=1, 2, \ldots, m,$$

то для каждого $k=0, 1, 2, \ldots$ *выполняются и неравенства*

$$|x_i^{[k]}-z_i| \leqq cq^{3^k}, \quad i=1, 2, \ldots, m. \tag{22}$$

Доказательство: Согласно лемме, так как $0<q<1$ и c достаточно маленькие, то $L(c)>0$. Доказательство неравенств (22) проведем методом математической индукции. При $k=0$ (22) совпадает с (21). Пусть (22) выполняются при некотором целом $k \geqq 0$. Следовательно $|x_i^{[k]}-z_i| \leqq c$, $i=1, 2, \ldots, m$, и, используя (17), находим

$$|Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})| \geqq L(c) > 0, \quad |P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})| \geqq L(c) > 0. \tag{23}$$

Далее, используя неравенство Адамара

$$|\det(b_{ij})_{i,j=1}^n| \leqq \{\prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ij}^2\}^{1/2},$$

и факт, что $\xi_{il}^{[k]}, \eta_i^{[k]}, \zeta_i^{[k]} \in (x_i^{[k]}, z_i)$, $i=1, 2, \ldots, m$, $l=1, 2, \ldots, \beta_i$, а также неравенства (22)—(23), получаем оценки

$$|\Delta_i^{[k]}| \geqq |\,|Q_k^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})||P_N^{(\beta_i)}(x_i^{[k]})| - |Q_k^{(\beta_i+1)}(x_i^{[k]})||P_N^{(\beta_i)}(\xi_{ij}^{[k]})||x_i^{[k]}-z_i|/2\,| \geqq N(c), \tag{24}$$

$$i=1, 2, \ldots, m, \; j=0, 1, 2, \ldots, \beta_i-1.$$

$$|\Omega_i^{[k]}| \leqq (cq^{3^k})^2 . K(c), \quad i=1, 2, \ldots, m. \tag{25}$$

Тогда из (10), (19), (20), (22), (24) и (25) окончательно находим, что

$$|x_i^{[k+1]}-z_i| \leqq cq^{3^{k+1}}, \quad i=1, 2, \ldots, m,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим несколько численных примеров, расчитанных на ЭВМ ЕС 1020 с двойной точностью (16 дес. зн.). В таблицах принята сокращенная запись чисел. Например, 1.(4*0)39 надо понимать как 1.000039.

Пример 1. Для алгебраического полинома

$$P_6(x)=x^6-6x^5+50x^3-45x^2-108x+108,$$

имеющего нули $z_1=-2$, $z_2=1$ и $z_3=3$ с кратностями $\beta_1=2$, $\beta_2=1$ и $\beta_3=3$, соотв., начальные и последовательные приближения, полученные методом (5), представлены в табл. 1.

Таблица 1

k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$
0	—3.00	0.100	4.00
1	—1.81379	1.03533	2.90799
2	—2.00224	1.(4*0)39	3.00045
3	—1.(8*9)67	1.(12*0)25	2.(10*9)79
4	—2.(15*0)	1.(15*0)	3.(14*0)1

Пример 2. Для тригонометрического полинома

$$T_8(x)=(\sin\frac{x-2}{2})^2 \sin\frac{x-2.5}{2} (\sin\frac{x-1}{2})^3$$

результаты вычислительного эксперимента представлены в табл. 2

Таблица 2

k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$	$x_3^{[k]}$
0	1.9	2.6	1.1
1	1.99461	2.50321	0.99121
2	2.(5*0)135	2.5(5*0)585	1.(5*0)692
3	2.(14*0)8	2.5(14*0)	0.(13*9)7
4	2.(15*0)	2.5(14*0)	1.(15*0)

Пример 3. По базисной системе функций $\{1, x^2, \sin 3x, e^{-x}, 1/(1+x^2)\}$ был построен обобщенный полином, имеющий в качестве двукратных нулей числа $z_1=-0.5$ и $z_2=3$. Начальные и несколько последующих приближений приводятся в табл. 3.

Таблица 3

k	$x_1^{[k]}$	$x_2^{[k]}$
0	—0.4	2.8
1	—0.5021054	2.9677106
2	—0.5(6*0)81	2(3*9)35
3	—0.5(15*0)	2.(8*9)15
4	—0.5(15*0)	3.(16*0)

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Обрешков. Висша алгебра. С., 1958.
2. Н. Обрешков. Върху численото решение на уравненията. *Год. Соф. унив.*, 56, кн. 1, 1963, 73—83.
3. Ил. Макрелов, Хр. Семерджиев. О двух аналогах метода Эрлиха для одновременного нахождения всех нулей тригонометрических и экспоненциальных полиномов. *Доклады БАН*, 36, 1983, 879—882.
4. Х. И. Семерджиев, С. Г. Тамбуров. Об одном методе определения кратностей нулей алгебраических полиномов. *Доклады БАН*, 37, 1984, 1143.
5. И. В. Макрелов, Х. И. Семерджиев. Метод Дочева для обобщенного полинома по произвольной чебышевской системе. *Доклады БАН*, 38, 1985.
6. Х. И. Семерджиев, С. Г. Тамбуров. Метод для определения всех нулей обобщенного полинома по произвольной чебышевской системе. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 26, 1986 (в печати).
7. И. В. Макрелов, Х. И. Семерджиев, С. Г. Тамбуров. Об одном обобщении метода Эрлиха. *Доклады БАН*, 39, 1986 (в печати).
8. L. W. Ehrlich. A modified Newton Method for Polynomials. *Comm. ACM*, 10, 1967, 107-108
9. J. Heinz. Polynom-Nullstellen mit dem Rechenstab. *Prax. Math.*, 5, № 4, 1963, 97-99.

Математический факультет
Пловдивского университета
4000 Пловдив, Болгария

Поступила 16. 7. 1985