Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

ГЕОРГИ Р. ГРОЗЕВ

Пусть дифференциальный оператор $Ly:=y^{(r)}+a_{r-1}y^{(r-1)}+\ldots+a_0y$, $a_i\in\mathbb{R}$, $i=0,\ldots,r-1$, обладает свойством W Пойа на $[a, b]$. Мы доказываем единственность оптимальных узлов для квадратурных формул вида

$$\int_b^a f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu_k-1}a_{k\lambda}f^{(\lambda)}(x_k)$$

с заданными кратностями $(\nu_k)_1^n$ на классах

$LW_q^r[a, b]:=\{f\in C^{(r-1)}[a, b]:\ f^{(r-1)}$ — абс. непр., $\|Lf\|_q\leq 1\}$, для $1<q<\infty$.

1. Введение. Пусть $\mathscr{F}$ — некоторый класс интегрируемых на $[a, b]$ функций и $(\nu_k)_1^n$ заданные естественные числа. Обозначим через $\Omega(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ множество всех систем

$$\bar{x}:=\begin{pmatrix}x_1,\ldots,x_n\\ \nu_1,\ldots,\nu_n\end{pmatrix}\tag{1.1}$$

состоящихся из узлов $(x_k)_1^n$, $a<x_1<\cdots<x_n<b$ с заданными кратностями $(\nu_k)_1^n$. Для $f\in\mathscr{F}$ рассмотрим квадратурную формулу (к. ф).

$$I(f):=\int_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu_k-1}a_{k\lambda}f^{(\lambda)}(x_k)=:Q(f).\tag{1.2}$$

К. ф. (1.2) называется наилучшей на классе $\mathscr{F}$, если $R(\bar{a};\bar{x})=\inf\{R(\bar{b};\bar{x}):\ \bar{b}=(b_{k\bar{\lambda}})$, $b_{k\bar{\lambda}}$ — вещественные числа$\}=:R(\bar{x})$, где $R(\bar{b};\bar{x}):=\sup\{|I(f)-Q(f)|: f\in\mathscr{F}\}$. Соответствующие коэффициенты $\bar{a}=\{a_{k\lambda}\}$ называются наилучшими для узлов $\bar{x}$. Мы говорим, что узлы $(x_k)_1^n$ оптимальные типа $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$, если $x_1<\cdots<x_n$ и $R(\bar{x})=\inf\{R(\bar{z}):\ \bar{z}\in\Omega(\nu_1,\ldots,\nu_n)\}=:R(\nu_1,\ldots,\nu_n)$. Соответствующая наилучшая к. ф, для этих узлов называется оптимальной типа $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$.

Задача об оптимальной к. ф. заданного типа на классе $\mathscr{F}$ поставлена А. Н. Колмогоровым (см. [4]). За прошедшие годы в математической печати появились много работ, связанных с этой задачей (см. [4, 17]). Моторный [3], Женсыкбаев [1], Лигун [2] показали, что равноотстоящие узлы являются единственными оптимальными для Соболевых классов периодических функций $\tilde{W}_q^r$. В этих работах рассматривался случай, когда $\nu_1=\cdots=\nu_n=1$. Б. Боянов [6], [7] дал полную характеризацию оптимальных к. ф. произвольного заданного типа $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ для классов W_q^r и $\tilde{W}_q^r$ и разработал метод доказательства существования и единственности, который можно применять к разным классам дифференцируемых функций.

В предлагаемой работе мы доказываем единственность для классов

$$LW_q^r[a, b]:=\{f:\ f\in C^{(r-1)}[a, b],\ f^{(r-1)}\text{-абс. непр.},\ \|Lf\|_q\leq 1\},\quad 1<q<\infty,$$

где

$$Ly:=y^{(r)}+a_{r-1}y^{(r-1)}+\cdots+a_0y \tag{1.3}$$

линейный дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами, который обладает свойством W Пойа на $[a, b]$. Отметим, что пространства W_q^r получаются, когда $Ly\equiv y^{(r)}$.

Оптимальные квадратуры на периодических классах $L\widetilde{W}_q^r[a, b]$ исследовались в работах К. И. Осколкова [12] и М. А. Чахкиева [5] при более сильных ограничениях, когда оператор L с вещественными коэффициентами и все корни его характеристического многочлена вещественные.

В этой работе мы доказываем единственность оптимальных к. ф. заданного типа $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $1\leqq\nu_k\leqq r$, на непериодических и периодических классах $LW_q^r[a, b]$ и $L\widetilde{W}_q^r[a, b]$, $1< q < \infty$. Существование оптимальных к. ф. на этих классах доказано в [8]. Доказательство основных результатов основано на методе Б. Боянова [6], [7].

2. Свойство W Пойа. Пусть L — линейный дифференциальный оператор вида (1.3) и пусть $u_1, \ldots, u_n$ — n — линейно независимые решения уравнения $Lu=0$. Мы говорим, что оператор L обладает свойством W Пойа на $[a, b]$, если определители Вронского

$$w(u_1, \ldots, u_k)(x)=\det\,[u_j^{(i-1)}(x)]_{i,j=1}^k,\ k=1, \ldots, r,$$

положительны на $[a, b]$ (см. [13]).

В этой работе мы предполагаем, что оператор L обладает свойством W Пойа на $[a, b]$. Тогда $\{u_i\}_1^n$ образуют обобщенную полную систему Чебышева и, следовательно, существуют r положительные функции $w_i\in C^{(r)}[a, b]$, $i=1, \ldots, r$, такие, что L можно представить в виде

$$Lf=D_rD_{r-1}\ldots D_1f, \tag{2.1}$$

где
$$D_i\,f(x)=w_i(x)\ \frac{d}{dx}\,(f(x)/w_i(x)),\ i=1, \ldots, r.$$

(доказательство см. в [14] или [9]).

Обозначим $D^{[j]}:=D_jD_{j-1}\ldots D_1$, $j=1, \ldots, r$. Используя указанное свойство Пойа установил следующий результат. Это широкое обобщение теоремы Ролля.

Теорема А. *Пусть $D^{[j]}f$ существует на интервале (c, d) и не обращается в нуль на никаком его подынтервале. Тогда, если f имеет N нулей $(N>j)$ на (c, d), то $D^{[j]}f$ имеет не менее чем $N-j$ перемен знака на (c, d).*

3. Квадратурные формулы и L-моносплайны. Пусть $G_L(x\,;\,y)$ — функция Гриина для дифференциального оператора L (см. [15]). Обозначим

$$G_L^{(\lambda)}(z\,;\,y):=\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\,(G_L(x\,;\,y))\big|_{x=z}.$$

L-моносплайном с узлами $x_1, \ldots, x_n$ с кратностями $\nu_1, \ldots, \nu_n$, соответственно, называют каждую функцию, представимую в виде

$$S(t)=\int_t^b G_L(\tau\,;\,t)d\tau-\sum_{j=0}^{r-1}B_jG_L^{(j)}(b\,;\,t)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu_k-1}a_{k\lambda}\,G_L^{(\lambda)}(x_k\,;\,t), \tag{3.1}$$

где B_j, $a_{k\lambda}$ — действительные числа.

Доказательство теоремы единственности основывается на связи оптимальных к. ф. для классов $LW_q^r[a, b]$ с L-моносплайнами, наименее уклоняющихся от нуля на $[a, b]$ в метрике L_p, где $q>0$, $1/p+1/q=1$. Это подробно описано в [8]. Отметим что когда дифференциальный оператор L обладает свойством W Пойа, каждый L-моносплайн $S(t)$ является и Чебишовым T-моносплайном, который можно представить в виде

$$S(t)=\int_t^b G_L(\tau;\ t)d\tau-\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j D^{[j]}G_L(b;\ t)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu_k-1} l_{k\lambda}D^{[\lambda]}G_L(x_k;\ t) \tag{3.2}$$

Тогда соответствующая к. ф. имеет вид:

$$Q(f)=\sum_{j=0}^{r-1}\alpha_j D^{[j]}f(a)+\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j D^{[j]}f(b)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu_k-1} l_{k\lambda}D^{[\lambda]}f(x_k). \tag{3.3}$$

Обозначим, через $S(\bar{x};t)$ экстремальную функцию для задачи $\|S(\bar{x};\ \cdot)\|_p=\min\{\|S(\cdot)\|_p:\ S\in\delta(\bar{x})\}$, где $\delta(\bar{x})$ множество всех L-моносплайнов с узлами $\bar{x}$. Тогда имеем

$$R_q(\bar{x})=\|S(\bar{x};\ \cdot)\|_p$$

и

$$R_q(\nu_1,\ldots,\nu_n)=\inf\{\|S(\bar{z};\ \cdot)\|_p:\ \bar{z}\in\Omega(\nu_1,\ldots,\nu_n)\}.$$

4. Непериодический случай. Обозначим, через $LN_{2r-1}(\omega;\bar{x})$ множество всех естественных L-сплайнов порядка $2r-1$ с весовой функцией $\omega(t)$, по фиксированному разбиению $\bar{x}$. Следующие две леммы являются следствиями интерполяционных теорем для естественных L-сплайнов (см. [15], с. 391—396).

Лемма 1. *Пусть* $1<p<\infty$, $\bar{x}\in\Omega(\nu_1,\ldots,\nu_n)$, $1\le\nu_k\le r$ *и* $\omega(t)$ *фиксированная весовая функция в* $[a, b]$. *Тогда для любой функции* $f\in C^{(r-1)}[a, b]$ *существует единственный естественный* L-*сплайн* $S\in LN_{2r-1}(\omega;\bar{x})$, *удовлетворяющий интерполяционным условиям*

$$S^{(j)}(a)=f^{(j)}(a),\quad j=0,\ldots,r-1,$$
$$S^{(\lambda)}(x_k)=f^{(\lambda)}(x_k),\ k=1,\ldots,n,\ \lambda=0,\ldots,\nu_k-1,$$
$$S^{(j)}(b)=f^{(j)}(b),\quad j=0,\ldots,r-1.$$

Лемма 2. *Пусть* $e_1, e_2\in\{0, 1\}$ *и*

$$\bar{\xi}=\begin{pmatrix}\xi_1,\ldots,\xi_m\\ \mu_1,\ldots,\mu_m\end{pmatrix},\qquad \bar{x}=\begin{pmatrix}x_1,\ldots,x_n\\ \nu_1,\ldots,\nu_n\end{pmatrix}$$

— *произвольные системы узлов, удовлетворяющие условиям*

$$a=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_m<\xi_{m+1}=b,$$
$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=b,$$
$$0\le\nu_k\le r,\quad k=1,\ldots,n,\quad 0\le\mu_i<r,\quad i=1,\ldots,m,$$
$$\nu_1+\cdots+\nu_n-e_1-e_2=\mu_1+\cdots+\mu_m.$$

Предположим, что

1) *если* $x_{j-1}\le\xi_i<x_j<\cdots<x_{j+l}<\xi_{i+k}\le x_{j+l+1}$,
   то $1+\nu_j+\cdots+\nu_{j+l}\ge\mu_{i+1}+\cdots+\mu_{i+k-1}$.
2) *если* $x_l<\xi_i\le x_{l+1}$,
   то $1-e_1+\nu_1+\cdots+\nu_l\ge\mu_1+\cdots+\mu_{i-1}$,
   и если $x_{j-1}\le\xi_i<x_j$,
   то $1-e_2+\nu_j+\cdots+\nu_n\ge\mu_{i+1}+\cdots+\mu_m$.

Пусть $\omega(t)$ — *фиксированная весовая функция на* $[a, b]$. *Тогда для любой функции* $f \in C^{(r-1)}[a, b]$ *существует единственный естественний* L-*сплайн* $S \in LN_{2r-1}(\omega; \xi)$, *удовлетворяющий интерполяционным условиям* $S^{(j)}(a)=f^{(j)}(a)$, $j=0, \ldots, r-1-e_1$, $S^{(\lambda)}(x_k)=f^{(\lambda)}(x_k)$, $k=1, \ldots, n$, $\lambda=0, \ldots, \nu_k-1$, $S^{(j)}(b)=f^{(j)}(b)$, $j=0, \ldots, r-1-e_2$.

Доказательство следующей леммы можно найти в [11].

Лемма 3. *Пусть* $\{\nu_k\}_1^n$ — *нечетные числа. Тогда для любого* L-*моносплайна* $S(t)$ *вида* (3.1) ((3.2)), *имеющего* $r+\Sigma_{k=1}^n(\nu_k+1)$ *разные нули на* $[a, b]$, *существует константа* $A>0$, *такая, что* $|B_j|<A$, $j=0, \ldots, r-1$, $|a_{k\lambda}|<A$, $k=1, \ldots, n$, $\lambda=0, \ldots, \lambda_k-1$. Следующая лемма определяет экстремальные элементы в периодическом и непериодическом случае.

Лемма 4. *Пусть* $1<p<\infty$. *Для того, чтобы* L-*моносплайн* $S(t)$ *вида* (3.1) *или* (3.2) *имел минимальную* L_p-*норму, необходимо и достаточно существование чисел* $a_0, \ldots, a_{r-1}$, *таких, что функция*

$$\Phi(t)=\sum_{i=0}^{r-1} a_i \frac{d^i}{dy^i}(G_L(t;\, y))\Big|_{y=a}+\int_a^b G_L(t;\, \tau)|S(\tau)|^{p-2}S(\tau)d\tau$$

удовлетворяет условиям

(4.1)
(а) *непериодический случай* $\Phi^{(j)}(a)=0$, $j=0, \ldots, r-1$, $\Phi^{(\lambda)}(x_k)=0$, $k=1, \ldots, n$, $\lambda=0, \ldots, \nu_k-1$, $\Phi^{(j)}(b)=0$, $j=0, \ldots, r-1$,

(б) *периодический случай* $\Phi^{(j)}(a)=\Phi^{(j)}(b)$, $j=0, \ldots, r-1$, $\Phi^{(\lambda)}(x_k)=0$, $k=1, \ldots, n$, $\lambda=0, \ldots, \nu_k-1$, $S^{(j)}(a)=S^{(j)}(b)$, $j=0, \ldots, r-1$.

Доказательство: Необходимость доказана в [8] Лемме 1. Достаточность. Рассмотрим непериодический случай.

Пусть L-моносплайн $S^*(t)$ и $a_0^*, \ldots, a_{r-1}^*$ удовлетворяют (4.1). Докажем, что для любого L-сплайна $g(t)$ степени $r-1$, имеющий вид

$$g(t)=\sum_{i=0}^{r-1} c_i G_L^{(i)}(b;\, t)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu_k-1} d_{k\lambda}G_L^{(\lambda)}(x_k;\, t),$$

выполнено равенство $\int_a^b |S^*(t)|^{p-2}S^*(t)g(t)dt=0$.

Из (4.1)

$$\Phi^{(j)}(a)=\sum_{i=0}^{r-1} a_i^*\frac{d^i}{dy^i}(G_L^{(j)}(a;\, y))\Big|_{y=a}+0=0,$$

и из свойства функций Грина $G_L(x; y)$ следует $a_0^*=\cdots=a_{r-1}^*=0$. Тогда $\Phi(t)=\int_a^b G_L(t:\, \tau)|S^*(\tau)|^{p-2}S^*(\tau)d\tau$ и имеем

$$\int_a^b |S^*(t)|^{p-2}S^*(t)g(t)dt=\sum_{i=0}^{r-1} c_i\int_a^b G_L^{(i)}(b;\, t)|S^*(t)|^{p-2}S^*(t)dt$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu_k-1} d_{k\lambda}\int_a^b G_L^{(\lambda)}(x_k;\, t)|S^*(t)|^{p-2}S^*(t)dt=0.$$

Пусть теперь $S(t)$ L-моносплайн степени $r-1$. Тогда

$$\int_a^b |S^*(t)|^p dt=\int_a^b |S^*(t)|^{p-2}S^*(t)(S^*(t)-S(t)+S(t))dt$$

$$= \int_a^b |S^*(t)|^{p-2}S^*(t)(S^*(t)-S(t))dt + \int_a^b |S^*(t)|^{p-2}S^*(t)S(t)\,dt$$

$$= \int_a^b |S^*(t)|^{p-2}S^*(t)S(t)dt \leq \int_a^b |S^*(t)|^{p-1}|S(t)|\,dt.$$

Применение неравенства Гельдера дает $\|S^*\|_p \leq \|S\|_p$.
Аналогичным образом доказывается и периодический случай. Следующая теорема доказана в [8].

Теорема В. *Пусть* $1<q\leq\infty$, $(\nu_k)_1^n$, $1\leq\nu_k\leq r$ — *действительные числа. Тогда существует оптимальная квадратурная формула вида* (1.2) ((3.3), *соответственно*) *для классов* $LW_q^r[a, b]$. *При этом для коэффициентов и узлов выполнены соотношения*

$$a<x_1<\cdots<x_n<b,$$

$$\left.\begin{array}{l} l_{k,\nu_k-1}=0, \quad l_{k\lambda}>0, \quad \lambda=0,\ 2,\ldots,\ \nu_k-2 \\ (a_{k,\nu_k-1}=0, \quad a_{k,\nu_k-2}>0) \end{array}\right\}, \text{ если } \nu_k \text{ — четное}$$

$$l_{k\lambda}>0, \quad \lambda=0,\ 2,\ldots,\ \nu_k-1 \ (a_{k,\nu_k-1}>0), \quad \text{если } \nu_k \text{ — нечетное,}$$

$$\alpha_j>0, \quad j=0,\ldots,\ r-1(A_{r-1}>0),$$

$$(-1)^j\beta_j>0, \quad j=0,\ldots,\ r-1\,((-1)^{r-1}B_{r-1}>0).$$

Приступим теперь к доказательству центральной теоремы о единственности. Доказательство основано на использовании топологической степени (см. [16], [6]).

Пусть D — открытое ограниченное множество в евклидовом пространстве R^n. Обозначим через $\overline{D}$ и ∂D замыкание и границу множества D, соотв. Пусть Φ — непрерывное отображение, $\Phi: \overline{D}\to\mathsf{R}^n$. Тогда, если $c\in\mathsf{R}^n$ и $c\notin\Phi(\partial D)$, то определяется топологическая степень отображения Φ по отношению D и c. Она принимает целые значения и обозначается через $\deg(\Phi;\ D;\ c)$. Введем следующие обозначения:

$$D:=\{\overline{x}\in\mathsf{R}^n:\ \overline{x}=(x_1,\ldots,\ x_n),\ \ a<x_1<\cdots<x_n<b\},$$

$$D_\varepsilon:=\{\overline{x}\in D:\ x_{i+1}-x_i>\varepsilon,\quad i=0,\ldots,\ n,\ x_0=a,\ x_{n+1}=b\}.$$

Пусть дифференциальный оператор L имеет постоянные вещественные коэффициенты a_j, $j=0,\ldots,\ r-1$. Рассмотрим следующие операторы: $L_\alpha f:=D_\alpha^{[r]}f$ $=D_{r\alpha}D_{r-1\alpha}\ldots D_{1\alpha}f$, $\alpha\in[0,\ 1]$, где

$$D_{i\alpha}f(x)=w_{i\alpha}(x)\frac{d}{dx}(f(x)/w_{i\alpha}(x)),\ i=1,\ldots,\ r,$$

$$w_{i\alpha}(x):=\alpha w_i(x)+1-\alpha,\quad i=1,\ldots,\ r.$$

Очевидно $L_1\equiv L$ и $L_0\equiv d^r/dx^r$. Операторы L_α обладают свойством W Пойа. Когда оператор L с постоянными коэффициентами, то функция Грина $G_L(x;\ t)$ имеет вид $G_L(x-t)$ (см. [10]).

Определим отображение

$$\Phi(\alpha;\ \overline{x}):=(b_1(\alpha;\ \overline{x}),\ldots,\ b_n(\alpha;\ \overline{x})). \tag{4.2}$$

где $b_k(\alpha;\ \overline{x})$ коэффициенты a_{k,ν_k-1} L_α-моносплайна $S_\alpha(\overline{x};\ t)$.

Лемма 5. *Пусть* $1<p<\infty$, $r>1$ *и* $\{\nu_k\}_1^n$ — *четные числа,* $1\leq\nu_k\leq r$, $k=1,\ldots,\ n$. *Тогда существует* $\varepsilon>0$, *такое, что если* $\Phi(\alpha;\ \overline{x})=\overline{0}$ *для некоторых* $\alpha\in[0,\ 1]$ *и* $\overline{x}\in D$, *то* $\overline{x}\in D_\varepsilon$.

Эта лемма доказывается аналогично полиномиальному случаю (см. [6], [7]) при помощи леммы 3 и теоремы для нулей моносплайнов [11].

Пусть $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — фиксированные кратности и $\bar{x} \in \Omega(\nu_1, \ldots, \nu_n)$. Рассмотрим линейную систему

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} &F^{(j)}(a)=0, \quad j=0, \ldots, r-1,\\ &F^{(\lambda)}(x_k)=0, \quad k=1, \ldots, n, \quad \lambda=0, \ldots, \nu_k-1,\\ &F^{(j)}(b)=0, \quad j=0, \ldots, r-1,\end{aligned}$$

где

$$F(x)=\sum_{i=0}^{r-1} a_i \frac{d^i}{dy^i}(G_L(x;\ y))\Big|_{y=a}+\int_a^b G_L(x;\ t)\,\omega(t)S(t)\,dt,$$

$$S(t)=\int_a^t G_L(t;\ \tau)\,d\tau+\sum_{j=0}^{r-1}\beta_j \frac{d^j}{dy^j}(G_L(t;\ y))\Big|_{y=a}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\nu_k-1} c_{ij}\frac{d^j}{dy^j}(G_L(t;\ y))\Big|_{y=x_k}$$

и $\omega(t)$ весовая функция на $[a, b]$.
Из леммы 1 эта система имеет единственное решение. Из леммы 4 следует, что если $\omega(t)\equiv|S(\bar{x};\ t)|^{p-2}$, то единственным решением $\bar{c}$ системы (4.3) являются некоторые числа $a_0, \ldots, a_{r-1}$ и коэффициенты β_j, c_{ij} L-моносплайна $S(\bar{x};\ t)$. Рассмотрим дифференциальный оператор L_α, $\alpha \in [0, 1]$. Обозначим матрицу системы (4.3) для $\bar{c}$ с $\Delta_\alpha(\omega;\ \bar{x})$.

Из леммы 1 следует, что $\det \Delta_\alpha(\omega;\ \bar{x})\neq 0$, для каждой весовой функции $\omega(t)$ и $\alpha \in [0, 1]$. Так как $\det \Delta_\alpha(\omega;\ \bar{x})$ непрерывная функция параметра α, то $\operatorname{sign}\det \Delta_\alpha(\omega\ \bar{x})=\operatorname{sign}\det \Delta_0(\omega;\bar{x})$. Из [6] имеем $\operatorname{sign}\det \Delta_0(\omega;\ \bar{x})=1$.
Пусть $\omega(t)=|S(\bar{x};\ t)|^{p-2}$ и рассмотрим (4.3) как нелинейную систему для $\bar{c}$., Из леммы 4 следует, что эта система имеет единственное решение $\bar{c}=c^*$.

Обозначим через $J(\alpha)$ якобиан этой нелинейной системы, вычисленный в точке c^*,

$$J(\alpha)=\frac{D(F_1, \ldots, F_{N+2r})}{D(c_0, \ldots, c_n, \nu_{n-1})}\Big|_{\bar{c}=c^*},$$

где $N=\nu_1+\cdots+\nu_n$. Для элементов матрицы $J(\alpha)$ имеем

$$\frac{\partial F^{(\lambda)}(x_k)}{\partial c_{ij}}\Big|_{\bar{c}=c^*}=(p-1)\int_a^b G^{(\lambda)}_{L_\alpha}(x_k;\ t)\,|S_\alpha(\bar{x};\ t)|^{p-2}\frac{d^j}{dy^j}(G_{L_\alpha}(t;\ y))\Big|_{y=x_i}\,dt$$

Следовательно, $\det J(\alpha)=(p-1)^{N+r}\Delta_\alpha(|S_\alpha(\bar{x};\ t)|^{p-2};\bar{x})$.
Обозначим через $J_{kj}(\alpha)$ матрицу, которая получается из $J(\alpha)$, если выключить m_k-тую строку и n_j-тый столбец, где

$$m_k=\begin{cases} r+\nu_1+\cdots+\nu_k, & k=1, \ldots, n,\\ r, & k=0,\\ 2r+N, & k=n+1,\end{cases}$$

$$n_j=2r+\nu_1+\cdots+\nu_j,\quad j=1, \ldots, n.$$

Из леммы 2 следует, что $\det J_{kj}(\alpha)\neq 0$, $k=0, \ldots, n+1$, $j=1, \ldots, n$, $\alpha \in [0, 1]$. Так как $\det J_{kj}(\alpha)$ — непрерывная функция параметра α, из [6] получаем

$$\operatorname{sign}\det J_{kj}(\alpha)=\operatorname{sign}\det J_{kj}(0)=1,\ \text{для каждого}\ \alpha \in [0, 1].$$

Теперь докажем теорему о единственности.

Теорема 1. *Пусть дифференциальный оператор L с постоянными коэффициентами и обладает свойством W Пойа на $[a, b]$. Если $r>0$, $\nu_k>0$ целые числа, удовлетворяющие неравенствам $1<2[(\nu_k+1)/2]<r$, $k=1, \ldots, n$. Тогда для каждого p, $1<p<\infty$, существует единственный L-моносплайн порядка r, типа $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$, наименее уклоняющийся от нуля на $[a, b]$ в метрике L_p.*

Доказательство. Существование экстремального L-моносплайна доказано в [8]. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\nu_1, \ldots, \nu_n$ четные. Оптимальные узлы удовлетворяют системе

$$\Phi(\alpha\,;\,\overline{x})=\overline{0} \quad \text{для} \quad \alpha=1, \tag{4.4}$$

где отображение Φ определено в (4.2).

Покажем, что (4.4) имеет единственное решение в D.

Из леммы 5 следует, что существует $\varepsilon>0$ такое, что для каждого решения $\overline{x}\in D$ системы (4.4) выполнено $\overline{x}\in D_\varepsilon$, для любого $\alpha\in[0, 1]$. Из свойства степени (см. [6], [16]) вытекает

$$\deg(\Phi(\alpha\,;\,\cdot)\,;\; D_\varepsilon\,;\,\overline{0})=\deg(\Phi(0\,;\,\cdot)\,;\; D_\varepsilon\,;\,\overline{0})$$

для каждого $\alpha\in[0, 1]$. Но

$$\deg(\Phi(0\,;\,\cdot)\,;\; D_\varepsilon : \overline{0})=(-1)^n$$

(см. [6]) и, следовательно, $\deg(\Phi(1\,;\,\cdot)\,;\; D_\varepsilon\,;\,\overline{0})=(-1)^n$.

Покажем, что

$$\operatorname{sign}\det\left(\frac{\partial\Phi(1\,;\,\overline{x})}{\partial\,\overline{x}}\right)=(-1)^n \tag{4.5}$$

для каждого $\overline{x}\in D_\varepsilon$, которое удовлетворяет (4.4).

Из этого, используя свойства степени следует, что система (4.4) имеет единственное решение в D и теорема будет доказана. Пусть $\overline{x}$ удовлетворяет (4.4). Рассмотрим систему (4.3) для $\omega(t)=|S(t)|^{p-2}$. Из леммы 4 следует, что эта система имеет единственное решение, которое определяет функцию $F(\overline{x}\,;\,t)$ и коэффициенты экстремального L-моносплайна $S(\overline{x}\,;\,t)$. Обозначим это решение через $\widehat{c}=(\widehat{c}_0, \ldots, \widehat{c}_{r-1}, \widehat{\beta}_0, \ldots, \widehat{\beta}_{r-1}, \widehat{c}_{10}, \ldots, \widehat{c}_{n,\nu_n-1})$. Так как якобиан $J(\alpha)$ системы (4.3) отличен от нуля, из теоремы для неявных функций следует, что $\widehat{c}_{ij}$ — дифференцируемые функции и

$$\frac{\partial c_k^*}{\partial x_j}=-\det A_{jk}/\det J(1), \tag{4.6}$$

где $c_k^* := \widehat{c}_{k,\nu_k-1}$, $k=1, \ldots, n$,

$$A_{jk}=\frac{D(F_1, \ldots, F_{N+2r})}{D(\widehat{c}_0, \ldots, \widehat{c}_{k,\nu_k-2}, \; x_j, \; \widehat{c}_{k+1,0}, \ldots, \widehat{c}_{n,\nu_n-1})}.$$

Из этого видно, что A_{jk} отличаются от $J(1)$ только по $(2r+\nu_1+\cdots+\nu_k)$-тому столбцу. Вычисление соответствующих производных дает

$$\gamma_{kj} := \frac{\partial b_k(1\,;\,\overline{x})}{\partial x_j}=F(\nu_j)(x_j)|_{\overline{c}=\widehat{c}}\det J_{jk}(1)/\det J(1), \quad k\neq j,$$

$$\frac{\partial b_j(1\,;\,\overline{x})}{\partial x_j}=F(\nu_j)(x_j)|_{\overline{c}=\widehat{c}}\det J_{jj}(1)/\det J(1)-a_{j,\nu_j-2}=:\gamma_{jj}-a_{j,\nu_j-2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\Phi(1\,;\,\overline{x})}{\partial\overline{x}}=\begin{vmatrix}\gamma_{11}-a_{1,\nu_1-2} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}-a_{2,\nu_2-2} & \cdots & \gamma_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \gamma_{n1} & \nu_{n2} & \cdots & \gamma_{nn}-a_{n,\nu_n-2}\end{vmatrix}.$$

Покажем, что этот определитель имеет доминирующую главную диагональ. Рассмотрим функцию

$$f(x):\ =F'(x)\,|_{\overline{c}=\widehat{c}}-\sum_{k=1}^{n}F^{(\nu_k)}(x_k)|_{\overline{c}=\widehat{c}}\,S_k(x),$$

где

$$S_k(x)=\sum_{i=0}^{r-1}a_i^{(k)}G_L^{(i)}(x-a)+\int_a^b G_L(x-t)|S(\overline{x}\,;\,t)|^{p-2} \tag{4.7}$$

$$\times\{\sum_{i=0}^{r-1}b_i^{(k)}G_L^{(i)}(x-a)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\nu_i-1}c_{ij}^{(k)}G_L^{(j)}(t-x_i)\}\,dt$$

и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned}&S_k^{(\lambda)}(a)=0,\quad \lambda=0,\ldots,r-1,\\ &S_k^{(\lambda)}(x_i)=0,\quad i\neq k,\ \lambda=0,\ldots,\nu_i-1,\\ &S_k^{(\lambda)}(x_k)=0,\quad \lambda=0,\ldots,\nu_k-2,\quad S_k^{(\nu_k-1)}(x_k)=1,\\ &S_k^{(\lambda)}(b)=0,\quad \lambda=0,\ldots,r-1.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Система (4.8) имеет единственное решение. Из формул Крамера получаем

$$c_{j,\nu_j-1}^{(k)}=(-1)^r(p-1)\det J_{kj}(1)/\det J(1),\ k=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,n. \tag{4.9}$$

Продифференцировав $F(x)$ с учетом (4.9) и сравнивая коэффициенты перед $G_L^{(\nu_j-1)}(x-x_j)$ получаем $\widehat{c}_{j,\nu_j-1}=(-1)^r(p-1)\,(-a_{j,\ \nu_j-2}+\Sigma_{k=1}^n\gamma_{jk})$. Функция $f(x)$ удовлетворяет системе:

$$\begin{aligned}&f^{(\lambda)}(a)=0,\ \lambda=0,\ldots,\ r-2,\ f^{(r-1)}(a)=F^{(r)}(a)|_{\overline{c}=\widehat{c}},\\ &f^{(\lambda)}(x_k)=0,\ k=1,\ldots,n,\ \lambda=0,\ldots,\ \nu_k-1,\\ &f^{(\lambda)}(b)=0,\ \lambda=0,\ldots,\ r-2,\ f^{(r-1)}(b)=F^{(r)}(b)|_{\overline{c}=\widehat{c}}.\end{aligned}$$

Из формул Крамера, получим

$$(-1)^{\nu_j-1}\widehat{c}_{j,\nu_j-1}=(-1)^r(p-1)\,(F^{(r)}(a)|_{\overline{c}=\widehat{c}}\det J_{0j}(1)/\det J(1)+(-1)^rF^{(r)}(b)|_{\overline{c}=\widehat{c}}$$
$$\det J_{n+1,j}(1)/\det J(1)).$$

Следовательно, $\operatorname{sign}\widehat{c}_{j,\nu_j-1}=(-1)^{r-1}$. Отсюда заключаем, что

$$a_{j,\nu_j-2}-\gamma_{jj}>\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\gamma_{jk}\quad\text{и}\quad \operatorname{sign}\det\left(\frac{\partial\Phi(1\,;\,\overline{x})}{\partial\overline{x}}\right)=(-1)^n.$$

Теорема 1 доказана.

Используя связь оптимальных к. ф. с L-моносплайнами можно сформулировать теорему 1 другим образом.

Теорема 2. *Пусть* $r>0$, $\nu_k>0$ *целые числа, удовлетворяющие неравенствам* $1<2[(\nu_k+1)/2]<r$, $k=1,\ldots,n$. *Тогда для каждого* q, $1<q<\infty$, *существует единственная оптимальная квадратурная формула типа* $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ *для классов* $LW_q^r[a, b]$.

5. Периодический случай. В этом параграфе мы докажем единственность оптимальной квадратурной формулы вида

$$I(f)\approx\sum_{k=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{\nu_k-1}a_{k\lambda}f^{(\lambda)}(x_k),$$

для классов $L\widetilde{W}_q^r[a, b]:=\{f\in LW_q^r[a, b]: f-(b-a)$ — периодическая$\}$, $1<q<\infty$. Леммы 1, 2, 3 можно сформулировать и в периодическом случае, а следующие две леммы доказываются аналогично леммам в непериодическом случае.

Введем следующие обозначения $\widetilde{D}:=\{\widetilde{x}\in R^{n-1}:\widetilde{x}=(x_2,\ldots,x_n),\ a=x_1<x_2<\cdots<x_n<b\}$, $\widetilde{D}_\varepsilon:=\{\widetilde{x}\in\widetilde{D}: x_{i+1}-x_i>\varepsilon,\ i=1,\ldots,n,\ x_{n+1}=b\}$. Определим отображение $\widetilde{\Phi}(\alpha;\widetilde{x}):\widetilde{D}\to R^{n-1}$:

$$\widetilde{\Phi}(\alpha;\ \widetilde{x}):=(b_2(\alpha;\ \widetilde{x}),\ldots,b_n(\alpha;\ \widetilde{x})), \tag{5.1}$$

где $b_k(\alpha;\widetilde{x})$ — коэффициенты a_{k,ν_k-1} — периодического L_α-моносплайна $S_\alpha(\widetilde{x};t)$.

Лемма 6. *Пусть* $1<p<\infty$, $r>1$ *и* $\{\nu_k\}_1^n$ — *четные числа* $1\leq\nu_k\leq r$, $k=1,\ldots,n$. *Тогда существует* $\varepsilon>0$, *такое, что, если* $\widetilde{\Phi}(\alpha;\ \widetilde{x})=0$ *для некоторых* $\alpha\in[0, 1]$ *и* $\widetilde{x}\in\widetilde{D}$, то $\widetilde{x}\in\widetilde{D}_\varepsilon$.

Лемма 7. *Для каждого фиксированного* k

$$\det J_{jk}(\alpha)\neq 0$$

и имеет постоянный знак для любого j, $\omega(t)$ *и* $\alpha\in[0,1]$.

Теперь докажем теорему об единственности в периодическом случае.

Теорема 3. *Пусть дифференциальный оператор* L *с постоянными коэффициентами и обладает свойством* W *Пойа на* $[a, b]$. *Если* $r>0$, $\nu_k>0$ — *целые числа, удовлетворяющие неравенствам* $1<2[(\nu_k+1)/2]<r$, $k=1,\ldots,n$. *Тогда для каждого* p, $1<p<\infty$ *существует единственный (с точностью до сдвига)* $(b-a)$ *-периодический* L*-моносплайн порядка* r, *типа* $(\nu_1,\ldots,\nu_n)$, *наименее уклоняющийся от нуля на* $[a, b]$ *в метрике* L_p.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\nu_1,\ldots,\nu_n$ — четные. Надо доказать, что уравнение

$$\widetilde{\Phi}(1;\widetilde{x})=\overline{0} \tag{5.2}$$

имеет единственное решение в $\widetilde{D}$. Из свойства степени и [7] следует $\deg(\widetilde{\Phi}(\alpha;\cdot);\widetilde{D}_\varepsilon;\overline{0})=\deg(\widetilde{\Phi}(0;\cdot);\widetilde{D}_\varepsilon;\ \overline{0})=(-1)^{n-1}$, для каждого $\alpha\in[0, 1]$. Докажем, что

$$\operatorname{sign}\det\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi}(1;\widetilde{x})}{\partial\widetilde{x}}\right)=(-1)^{n-1}. \tag{5.3}$$

Отсюда следует, что система (5.2) имеет единственное решение в $\widetilde{D}$ и теорема будет доказана.

Пусть $\widetilde{x}$ удовлетворяет (5.2). Из теоремы для неявных функций следует

$$\gamma_{kj}:=\frac{\partial b_k(1;\widetilde{x})}{\partial x_j}=(-1)^{r-1}F^{(\nu_j)}(x_j)\det J_{jk}(1)/\det J(1).$$

для $j \neq k$,

$$\frac{\partial b_j(1;\widetilde{x})}{\partial x_j} = (-1)^{r-1} F_j^{(\nu_j)}(x_j) \det J_{jj}(1)/\det J(1) - a_{j,\nu_j-2}.$$

Так как $F^{(\nu_j)}(x_j) > 0$ и $\det J_{jk}(1)$ имеет постоянный знак, то γ_{kj} имеет постоянный знак для фиксированного k и $j = 1, \ldots, n$.

Покажем, что определитель

$$\det\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}(1;\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}}\right) = \begin{vmatrix} \gamma_{22} - a_{2,\nu_2-1} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \gamma_{32} & \gamma_{33} - a_{3,\nu_3-1} & \cdots & \gamma_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdots & \gamma_{nn} - a_{n,\nu_n-2} \end{vmatrix}$$

имеет доминирующую главную диагональ.

Рассмотрим снова функцию $f(x) := F'(x)\big|_{\widetilde{c}=\widehat{c}} - \Sigma_{k=1}^{n} F^{(\nu_k)}(x_k)\big|_{\widetilde{c}=\widehat{c}} S_k(x)$, где $S_k(x)$ определяется равенством (4.7) и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &S_k^{(\lambda)}(a) - S_k^{(\lambda)}(b) = 0, \quad \lambda = 0, \ldots, r-1, \\ &S_k^{(\lambda)}(x_i) = 0, \quad i \neq k, \quad \lambda = 0, \ldots, \nu_i - 1, \\ &S_k^{(\lambda)}(x_k) = 0, \quad \lambda = 0, \ldots, \nu_k - 2, \quad S_k^{(\nu_k - 1)}(x_k) = 1, \\ &LS_k^{(\lambda)}(a) - LS_k^{(\lambda)}(b) = 0, \quad \lambda = 0, \ldots, r - \nu_1 - 1. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Функция f удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} &f^{(\lambda)}(a) - f^{(\lambda)}(b) = 0, \quad \lambda = 0, \ldots, r-1, \\ &f^{(\lambda)}(x_j) = 0, \quad \lambda = 0, \ldots, \nu_j - 1, \quad j = 2, \ldots, n, \\ &(Lf)^{(\lambda)}(a) - (Lf)^{(\lambda)}(b) = 0, \ \lambda = 0, \ldots, r - \nu_1 - 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(x) \equiv 0$. Из формул Крамера для (5.4), сравнивая коэффициенты при $G_L^{(\nu_j-1)}(x_i - x)$, получим $a_{k,\nu_k-2} = \Sigma_{j=1}^{n} \gamma_{kj}$.

Так как $a_{k,\nu_k-2} > 0$ (из теоремы B), то $a_{k,\nu_k-2} > \Sigma_{j=2}^{n} \gamma_{kj}$. Следовательно,

$$\operatorname{sign}\det\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}(1;\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}}\right) = (-1)^{n-1}.$$

Теорема 3 доказана.

Используя связь оптимальных к. ф. с L-моносплайнами, получим:

Теорема 4. *Пусть $r > 0$, $\nu_k > 0$ — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $1 < 2[(\nu_k + 1)/2] < r$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда для каждого q, $1 < q < \infty$, существует единственная оптимальная квадратурная формула типа* $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ *для классов $L\widetilde{W}_q^r[a, b]$ с фиксированным узлом $x_1 = a$.*

Следующая теорема является простым следствием теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть $r > 0$, $\nu_1 = \cdots = \nu_n = \rho$ и $1 < 2[(\rho + 1)/2] < r$. Тогда для каждого q, $1 \leq q \leq \infty$, равноотстоящие узлы оптимальны типу* $(\rho, \ldots, \rho)$ *для классов $L\widetilde{W}_q^r[a, b]$. Коэффициенты для этих узлов удовлетворяют равенствам*

$$a_{1\lambda} = \cdots = a_{n\lambda} = 0, \quad \textit{если } \lambda \textit{ — нечетное},$$
$$a_{1\lambda} = \cdots = a_{n\lambda} > 0, \quad \textit{если } \lambda \textit{ — четное}.$$

Оптимальные узлы единственные в случае $1<q<\infty$.

Заметим, что теорема 5 установлена для $\rho=1$ М. А. Чахкиевым в случае, когда все корни характеристического многочлена оператора L вещественные.

В заключение автор выражает глубокую признательность проф. Б. Боянову за постановку задач, внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Женсыкбаев. О наилучшей квадратурной формуле на классе W^rL_p. *Докл. АН СССР* 227, 1976, 277—279.
2. А. А. Лигун. Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций. *Матем. заметки*, 16, 1976, 913—926.
3. В. П. Моторный. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 38, 1974. 583—614.
4. С. М. Никольский. Квадратурные формулы. М., 1979.
5. М. А. Чахкиев. Линейные дифференциальные операторы с вещественным спектром и оптимальные квадратурные формулы. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 48, 1984, 1078—1108.
6. B. D. Bojanov. Uniqueness of the monosplines of least deviation. Numerische Integration (*ISNM 45*), Basel, 1979, 67-97.
7. B. D. Bojanov. Uniqueness of the optimal nodes of quadrature formulae. *Math. Comput.*, 36, 1981, 525-546.
8. G. R. Grozev. Optimal quadrature formulae for differentiable functions. *Calcolo*, 23, 1986, No 1, 67-92.
9. S. Karlin, W. Studden. Tchebycheff systems: with applications in analysis and statistics. New York, 1966.
10. H. G. Morsche. Interpolational and extremal properties of L-spline functions (Diss.). Helmond, 1982.
11. C. Micchelli. The fundamental theorem of algebra for monosplines with multiplicities. — In: Linear operators and application. Basel, 1972, 419-430.
12. K. I. Oskolkov. On optimal quadrature formulae on certain classes of periodic functions. *Appl. Math. Optim.*, 8, 1982, 245-263.
13. G. Polya. On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1922, 312-324.
14. G. Polya, G. Szegö. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I, 57. Berlin, 1925.
15. L. Schumaker. Spline functions: basic theory. New York, 1981.
16. J. T. Schwartz. Nonlinear functional analysis. New York, 1969.
17. J. F. Traub, H. Wozniakowski. A general theory of optimal algorithms. New York, 1980.

Единый центр биологии
***Проблемная** группа*
математического моделирования
в биологии

Поступила 16. 9. 1985
В переработанном виде 2. 6. 1986