Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ УСРЕДНЕНИИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

МАРИН Л. МАРИНОВ

В работе изучается усреднение одного класса вырождающихся квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. Доказаны теоремы о существовании, единственности и сходимости решений граничных задач к решению усредненной задачи.

Вопрос об усреднении линейных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами исследован достаточно хорошо (см. [1—6] и приведенную там библиографию). Однако, когда дифференциальные уравнения не являются линейными, в ряде случаев исследования остаются на физическом уровне строгости ([7, 8]). Имеющиеся математические работы в основном посвящены эллиптическим операторам ([9—13]) или параболическим операторам, недопускающим вырождений ([4]). В настоящей работе этот вопрос исследован для одного класса уравнений, встречающихся в теории нестационарной фильтрации, в теории сильно нагретых тел и в других разделах математической физики. Приведенное доказательство устанавливает сильную G-сходимость (в смысле [3, 14] для соответствующих операторов.

В 1 вводятся некоторые обозначения, дается определение обобщенного решения краевой задачи и формулируются основные предположения о данных задачи.

В 2 доказывается существование и единственность обобщенного решения краевой задачи. При помощи энергетических методов получены равномерные оценки по малому параметру ε.

В 3 с помощью двухмасштабного разложения ([1, 2, 6]) находится усредненное уравнение. Доказывается теорема о сходимости решения (обобщенных градиентов) к решению (обобщенным градиентом) усредненной задачи.

1. Обозначения и основные предположения. Пусть Ω — ограниченная область в R^n с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u^\varepsilon(x,\ t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial x_j}=0 \text{ в } Q, \tag{1}$$

$$u^\varepsilon(x,\ 0)=u_0(x) \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$u^\varepsilon(x,\ t)=0 \quad \text{для любого } (x,\ t)\in S, \tag{3}$$

где $\varepsilon>0$, $Q=\Omega\times(0,\ T)$ и $S=\partial\Omega\times(0,\ T)$. Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n. Будем также предполагать, что выполнены следующие предположения:

(H1) Коэффициенты $a_{ij}(y)$ являются Y-периодическими функциями класса $C^2(R^n)$, для которых $a_{ij}(y)=a_{ji}(y)$ и $\lambda\xi_i\xi_i\le a_{ij}(y)\,\xi_i\xi_j$, где λ — положительная постоянная, $Y=[0,\ y_1^0]\times\cdots\times[0,\ y_n^0]$ — фиксированный параллелепипед с ребрами y_i^0, $y\in Y$ и $(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in R^n$;

(H2) Функция $\varphi(s)$ принадлежит классу $C^1(S)\cap C^3(R_+)$ и, кроме того, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(s)>0$ для любого $s\neq 0$ и $\varphi''(s)>0$ для любого $s>0$;

(H3) Начальное условие $u_0(x)$ — неотрицательная, непрерывная функция на $\bar{\Omega}$, такая, что $\varphi(u_0(x))\in C^1(\bar{\Omega})$ и $u_0(x)=0$ при $x\in\partial\Omega$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том, 12, 1986, с. 381—389.

Далее будем пользоваться следующими обозначениями: $\Phi(\tau)$ — обратная функция к функции $\varphi(s)$; $\|f\| = \iint_Q |f(x, t)|^2 dxdt$; $|\xi|^2 = \xi_i\xi_i$, если $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$; $|\Omega| = \text{mess}\ \Omega$ и $H^1(Q)$ — пространство Соболева, полученное пополнением пространства $C^\infty(Q)$ по норме $\|f\|_1^2 = \iint_Q (|f|_2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i})\, dxdt.$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1)÷(3) *назовем функцию* $u^\varepsilon(x, t)$, *если выполнены следующие условия:*

(a) $u^\varepsilon(x, t) \in L^\infty(Q)$ *и* $u^\varepsilon(x, t) \geqq 0$;

(b) *Обобщенные производные* $\frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial t}$, $\frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *принадлежат классу* $L^2(Q)$;

(c) *Для любой функции* $f(x, t) \in H^1(Q) \cap C(\overline{Q})$ *и* $f(x, t) = 0$ *при* $x \in \partial\Omega$ *или* $t = T$ *справедливо интегральное тождество*

$$\iint_Q \{u^\varepsilon \frac{\partial f}{\partial t} - a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}\} dxdt + \int_\Omega f(x, 0) u_0(x) dx = 0;$$

(d) *Для п. в.* $(x^0, t^0) \in S$ *существует* $\lim u^\varepsilon(x, t) = 0$, *если* $(x, t) \in Q$ *и* (x, t) *стремится к* (x^0, t^0) *по нормали к* S.

2. Вспомогательные предложения. В этом параграфе мы установим равномерные по ε оценки решения задачи (1)—(3). Сначала докажем существование, а потом — единственность обобщенного решения задачи (1)—(3). Доказательство основано на идее из работы [15].

Теорема 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует обобщенное решение* $u^\varepsilon(x\ t)$ *задачи* (1)—(3). *Функции* $u^\varepsilon(x, t)$ *подчиняются неравенствам*

$$\begin{cases} 0 \leq u^\varepsilon(x, t) \leq M & \text{п. в. в } Q, \\ \| \frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial t} \| \leq M, \ \| \frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial x_j} \| \leq M & (j = 1, \ldots, n), \end{cases} \tag{4}$$

где постоянная M *не зависит от* ε.

Доказательство состоит из четырех этапов. Сначала введем обозначения $\vartheta(x, t) = \varphi(u^\varepsilon(x, t))$, $\vartheta_0(x) = \varphi(u_0(x))$, $A = \sup\{\varphi(u_0(x))\} + 1$. Тогда замена искомой функции

$$\vartheta(x, t) = \varphi(u^\varepsilon(x, t)), \quad u^\varepsilon(x, t) = \Phi(\vartheta(x, t))$$

преобразует задачу (1)—(3) к виду

$$\frac{\partial\vartheta(x, t)}{\partial t} = \varphi'(\Phi(\vartheta(x, t))) \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial\vartheta(x, t)}{\partial x_j} \text{ в } Q, \tag{5}$$

$$\vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x) \text{ в } \Omega, \ \vartheta(x, t) = 0 \text{ на } S.$$

1. Построение приближенных решений. Фиксируем последовательность функций $\{\vartheta_{0,p}(x);\ p = 1, 2, \ldots\}$ со следующими свойствами:

(a) $\vartheta_{0,p}(x) \in C^\infty(R^n)$; (b) $\frac{1}{p} \leq \vartheta_{0,p}(x) \leq A$;

(c) $\vartheta_{0,1}(x) \geq \vartheta_{0,2}(x) \geq \cdots$ и $\lim_{p\to\infty} \vartheta_{0,p}(x) = \vartheta_0(x)$;

(d) $\vartheta_{0,p}(x) = 1/p$ в окрестности границы $\partial\Omega$;

(e) $\sup_\Omega \{ | \frac{\partial\vartheta_{0,p}(x)}{\partial x_1} |, \ \cdots, \ | \frac{\partial\vartheta_{0,p}(x)}{\partial x_n} | \} \leq K$,

где постоянная K не зависит от p, x и ε. Доказательство существования такой последовательности функций приведено в работе [16, с. 406]. Фиксируем еще одну последовательность функций $\{\chi_p(s);\ p=1, 2, 3, \dots\}$ со следующими свойствами:

(6) $$\chi_p(s)=\varphi'(\Phi(s)), \text{ если } s\in[1/2p,\ A+1];$$

$$\chi_p(s)\in[\varphi'(\Phi(\frac{1}{2p+1})),\ \varphi'(\Phi(A+2))], \text{ если } s\notin[1/2p,\ A+1];$$

$$\chi_p(s)\in C^3(R);$$

$$\chi'_p(s)\geqq 0 \text{ и } \lim_{s\to\infty}\chi'(s)=0.$$

Из теории квазилинейных параболических уравнений [17] следует, что существует единственное решение $\vartheta_p(x, t)$ краевой задачи

$$\frac{\partial\vartheta(x, t)}{\partial t}-\chi_p(\vartheta(x, t))\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial\vartheta(x, t)}{\partial x_j}=0 \text{ в } Q,$$

$$\vartheta(x, 0)=\vartheta_{0,p}(x) \text{ в } \Omega,\ \vartheta(x, t)=1/p \text{ на } S.$$

(Если воспользоваться обозначениями работы [17] функция $\vartheta_p(x, t)$ принадлежит классу $H^{2+\beta,1+\beta/2}$ и $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_i\partial t}\in L^2(Q)$.) При помощи принципа сравнения нетрудно проверяется, что

(7) $$\frac{1}{p}\leqq\vartheta_p(x, t)\leqq A,$$

(8) $$\vartheta_p(x, t)\leqq\vartheta_{p+1}(x, t) \text{ для любого } (x, t)\in Q.$$

Из (7) и (6) получаем, что $\vartheta_p(x, t)$ является решением уравнения (5). Следовательно, для функции $u_p(x, t)=\Phi(\vartheta_p(x, t))$ выполнено

(9) $$\frac{\partial u_p(x, t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial\varphi(u_p(x, t))}{\partial x_j}=0, \text{ в } Q;$$

(10) $$u_p(x, 0)=\Phi(\vartheta_{0,p}(x)) \text{ в } \Omega;$$

(11) $$u_p(x, t)=\Phi(\frac{1}{p}) \text{ на } S;$$

(12) $$\Phi(\frac{1}{p+1})\leqq u_{p+1}(x, t)\leqq u_p(x, t)\leqq\Phi(A) \text{ на } \bar{Q}.$$

2. Оценка градиента функции $\varphi(u_p(x, t))$. Сначала докажем, что

(13) $$\iint_Q\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_i}dxdt\leqq\frac{|\Omega|}{\lambda}(F(\Phi(A))+\Phi(A)),$$

где $F(s)=\int_0^s\varphi(\tau)\,d\tau$.

Умножаем равенство (9) на $\varphi(u_p)-1/p$ и интегрируем по Q.

$$0=\iint_Q\{\frac{\partial u_p}{\partial t}(\varphi(u_p)-\frac{1}{p})-[\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_j}](\varphi(u_p)-\frac{1}{p})\}dxdt$$

$$=\iint_Q\frac{\partial}{\partial t}[F(u_p)-\frac{1}{p}u_p]\,dxdt+\iint_Q a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_i}dxdt$$

$$\geqq\int_\Omega[F(u_p)-\frac{1}{p}u_p]\big|_0^T dx+\lambda\iint_Q\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_i}dxdt.$$

Полученное неравенство можно записать как

$$\iint_Q\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_i}dxdt\leqq\frac{1}{\lambda}\{\int_\Omega[F(\Phi(\vartheta_{0p}(x)))+\frac{1}{p}\Phi(\vartheta_p(x, T))]\,dx$$

$$-\int_\Omega [F(u_p(x,\ T))+\frac{1}{p}\ \Phi(\vartheta_{0p}(x))]dx\}\leq\frac{|\Omega|}{\lambda}\ [F(\Phi(A))+\Phi(A)].$$

Докажем, что

$$\iint_Q (\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial t})^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\ \varphi'(\Phi(A))\Lambda n\,|\,\Omega\,|\,K^2, \tag{14}$$

где постоянная Λ не зависит от ε и такая, что $a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\xi_i\xi_j\leq\Lambda\,|\,\xi\,|^2$ для любого $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)\in R^n$ и $x\in R^n$.

Умножаем равенство (9) на $\partial\varphi(u_p)/\partial t$ и интегрируем по области Q. После элементарных преобразований находим, что

$$0=\iint_Q \{\frac{\partial u_p}{\partial t}\ \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial t}-[\frac{\partial}{\partial x_i}\,a_{ij}\,(\frac{x}{\varepsilon})\ \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_j}\ ]\ \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial t}\}dxdt$$

$$=\iint_Q [\varphi'(u_p)^{\frac{1}{2}}\ \frac{\partial u_p}{\partial t}]^2dxdt+\iint_Q a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\ \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_j}\ \frac{\partial^2\varphi(u_p)}{\partial x_i\partial t}\,dxdt$$

$$=\iint_Q (\frac{\partial G(u_p)}{\partial t})^2dxdt+\frac{1}{2}\iint_Q \frac{\partial}{\partial t}\,[a_{ij}\,(\frac{x}{\varepsilon})\ \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_j}\ \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_i}]dxdt,$$

где $G(s)=\int_a^s (\varphi'(\tau))^{\frac{1}{2}}\,d\tau$ и $a=\frac{1}{2}\Phi\,(\frac{1}{p})$. Тогда, пользуясь свойством (е) функций $\{\vartheta_{0p}(x)\}$ получаем

$$\iint_Q (\frac{\partial G(u_p)}{\partial t})^2 dxdt= -\ \frac{1}{2}\iint_Q \frac{\partial}{\partial t}\,[a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\,\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_j}\ \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_i}\,]\,dxdt \tag{15}$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_\Omega a_{ij}\,(\frac{x}{\varepsilon})\,\frac{\partial\varphi(u_p(x,\ 0))}{\partial x_i}\ \frac{\partial\varphi(u_p(x,\ 0))}{\partial x_j}\,dx$$

$$\leq\frac{\Lambda}{2}\int_\Omega \frac{\partial\vartheta_{0p}(x)}{\partial x_i}\ \frac{\partial\vartheta_{0p}(x)}{\partial x_i}\,dx\leq\ \frac{1}{2}\ \Lambda nK^2\,|\,\Omega\,|.$$

Так как $\varphi'(s)$ — монотонно возрастающая функция при $s>0$, то имеем

$$(\frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial t})^2\leq\varphi'(\Phi(A))\,(\frac{\partial G(u_p)}{\partial t})^2.$$

Интегрируем это неравенство по области Q и, пользуясь неравенством (15), получаем (14).

3. Определение функции $u^\varepsilon(x,\ t)$ и доказательство (4). Для любой точки $(x, t)\in\overline{Q}$ из неравенства (12) следует, что существуют пределы

$$u^\varepsilon(x,\ t)=\lim u_p(x,\ t),\quad \varphi(u^\varepsilon(x,\ t))=\lim\varphi(u_p(x,\ t)) \tag{16}$$

при $p\to\infty$ и кроме того

$$0\leq u^\varepsilon(x,\ t)\leq\Phi(A)\ \text{ и }\ 0\leq\varphi(u^\varepsilon(x,\ t))\leq A. \tag{17}$$

Из теоремы Фату [18, с. 301] следует, что $u^\varepsilon(x,\ t)$ и $\varphi(u^\varepsilon(x,\ t))$ — суммируемые функции класса $L^2(Q)$. При помощи теоремы Лебега [18, с. 298] получаем, что для любой функции $\psi(x,\ t)\in C_0^\infty(Q)$

$$\lim_{p\to\infty}\iint_Q \varphi(u_p(x,\ t))\psi(x,\ t)dxdt=\iint_Q \varphi(u^\varepsilon(x,\ t))\psi(x,\ t)dxdt. \tag{18}$$

Кроме того мы уже доказали (см. неравенства (13) и (14)), что

$$\iint_Q |\operatorname{grad} \varphi(u_p(x, t))|^2 dxdt \leq M^2, \tag{19}$$

где $M^2 = \frac{|\Omega|}{\lambda}[F(\Phi(A)) + \Phi(A)] + \varphi'(\Phi(A))n/2\,\Lambda\,|\Omega|\,K^2 + (\Phi(A))^2$. Но тогда из теоремы Соболева [19, с. 42] следует, что обобщенные производные $\frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial x_j}$, $\frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial t}$ принадлежат классу $L^2(Q)$ и

$$\lim \frac{\partial\varphi(u_p(x, t))}{\partial t} = \frac{\partial\varphi(u^\varepsilon(x, t))}{\partial t}, \quad \lim \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_j} = \frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial x_j} \tag{20}$$

в слабом смысле в $L^2(Q)$. Тогда из [20, с. 81] и неравенств (17) и (19) сразу следует

$$\left\| \frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial x_j} \right\| \leq \underline{\lim} \left\| \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_j} \right\| \leq M,$$

$$\left\| \frac{\partial\varphi(u^\varepsilon)}{\partial t} \right\| \leq \underline{\lim} \left\| \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_j} \right\| \leq M.$$

4. Докажем, что $u^\varepsilon(x, t)$ является решением задачи (1)—(3). Мы уже проверили условия (а) и (в). Проверим требования (с). Пусть функция $f(x, t)$ принадлежит классу $H^1(Q) \cup C(\overline{Q})$ и $f(x, t) = 0$, если $x \in \partial\Omega$ или $t = T$. Умножаем равенство (9) на $f(x, t)$ и интегрируем по области Q. После интегрирования по частям находим, что

$$0 = \iint_Q \left\{ u_p \frac{\partial f}{\partial t} - a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial\varphi(u_p)}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} dxdt + \int_\Omega f(x, 0) u_p(x, 0) dx.$$

В полученном равенстве, при помощи теоремы Лебега и равенств (20) перейдем к пределу при $p \to \infty$ и получаем (с).

Проверим требование (d). Из неравенства (12) следует, что для любого p и любой точки $(x, t) \in \overline{Q}$ выполнено неравенство $0 \leq u^\varepsilon(x, t) \leq u_p(x, t)$. Следовательно если $(x^0, t^0) \in S$, $(x, t) \in Q$ и (x, t) стремится к (x^0, t^0) то

$$0 \leq \underline{\lim}\, u^\varepsilon(x, t) \leq \overline{\lim}\, u^\varepsilon(x, t) \leq 1/p.$$

Так как p — произвольное целое число, то $\lim u^\varepsilon(x, t) = 0$.

Теорема 1 доказана.

Перейдем к доказательству единственности обобщенного решения краевой задачи.

Лемма 1. *Задача* (1)—(3) *не может иметь более одного обобщенного решения.*

Доказательство. Пусть функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ являются обобщенными решениями задачи (1)—(3). Рассмотрим функцию

$$f(x, t) = \int_T^t [\varphi(u_1(x, \tau)) - \varphi(u_2(x, \tau))] d\tau.$$

Непосредственно проверяется, что $f(x, t) \in H^1(Q)$,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \varphi(u_1(x, t)) - \varphi(u_2(x, t)),$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x_j} = \int_T^t \frac{\partial}{\partial x_j}[\varphi(u_1(x, \tau) - \varphi(u_2(x, \tau))] d\tau$$

и, кроме того, выполнено равенство

$$0=\iint_Q \{(u_1-u_2)\frac{\partial f}{\partial t}-a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\frac{\partial}{\partial x_j}[\varphi(u_1)-\varphi(u_2)]\frac{\partial f}{\partial x_i}\}\,dxd\tau. \tag{21}$$

После элементарных преобразований равенства (21) получаем

$$-I_1=I_2,$$

где $I_1=\iint_Q (u_1-u_2)[\varphi(u_1)-\varphi(u_2)]\,dxdt$ и

$$I_2=\frac{-1}{2}\iint_Q \frac{\partial}{t\partial}\{a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\int_T^t \frac{\partial}{\partial x_j}[\varphi(u_1)-\varphi(u_2)]d\tau \int_T^t \frac{d}{dx_i}[\varphi(u_1)-\varphi(u_2)]\,d\tau\}\,dx.$$

При помощи теоремы Фубини и абсолютной непрерывности интеграла доказываем, что

$$I_2=\frac{1}{2}\int_Q \{a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})\int_T^0 \frac{\partial}{\partial x_j}[\varphi(u_1)-\varphi(u_2)]\,d\tau \int_T^0 \frac{\partial}{\partial x_i}[\varphi(u_1)-\varphi(u_2)]d\tau\}dx\geqq 0.$$

Следовательно, $I_1\leqq 0$. Теперь, пользуясь предположением (H2), получаем

$$u_1(x,t)=u_2(x,t) \quad \text{п. в. в } Q.$$

Лемма 1 доказана.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Для любого $k=1, 2, \ldots, n$ существует единственная Y-периодическая функция $\omega^k(y)$, такая, что*

$$\begin{cases} \omega^k(y)\in H^1_{loc}(R^n), & \int_Y \omega^k(y)dy=0, \\ \int_Y a_{ij}(y)\frac{\partial\omega^k}{\partial y_j}\frac{\partial\vartheta}{\partial y_i}\,dy=\int_Y \vartheta\frac{\partial a_{ik}(y)}{\partial y_i}\,dy \end{cases} \tag{22}$$

для любой Y-периодической функции $\vartheta(y)\in H^1_{loc}(R^n)$, где пространство $H^1_{loc}(R^n)$ состоит из функций, сужение которых на любую ограниченную область $\Omega\subset R^n$ принадлежит $H^1(\Omega)$.

Доказательство этой леммы приведено в [2, с. 71].

Заметим, что для рассматриваемой задачи (1)—(3) имеет место и соответствующий принцип сравнения. Доказательство проводится стандартным образом и основывается на теореме 1, лемме 1 и соответствующем принципе сравнения для невырождающихся квазилинейных параболических уравнений.

3. Основной результат. В ряде работ (см. [1, 2, 6]) усредненная задача находится при помощи эвристического приема, основанного на предположении, что $u^\varepsilon(x,t)$ допускает двухмасштабное разложение вида

$$u^\varepsilon(x,t)=u^0(x,t)+\varepsilon u^1(x,y,t)+\varepsilon^2 u^2(x,y,t)+\cdots,$$

где $y=x/\varepsilon$, функции $u^i(x,y,t)$ — Y-периодические по y. Мы тоже воспользуемся этим методом. После некоторых вычислений, приходим к предположению, что в рассматриваемом случае усредненная задача имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial x_i}b_{ij}\dfrac{\partial\varphi(u(x,t))}{\partial x_j}=0 & \text{в } Q, \\ u(x,0)=u_0(x) & \text{в } \Omega, \\ u(x,t)=0 & \text{на } S, \end{cases} \tag{23}$$

где

$$b_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y [a_{ij}(y) + a_{ik}(y) \frac{\partial \omega^j(y)}{\partial y_k}]\, dy \tag{24}$$

и $\omega^j(y)$, $i=1, \ldots, n$ являются решениями задачи (22). Доказательство этого предположения приведено ниже (см. теорему 2). Сначала отметим, что $b_{ij} = b_{ji}$ и $\lambda |\xi|^2 \leq b_{ij}\xi_i\xi_j$, где положительная постоянная λ задана предположением (H1) (см. [1], p. 31). Тогда существование и единственность обобщенного решения задачи (23) обеспечивается теоремой 1 и лемой 1. Если обозначим через $u^0(x, t)$ обобщенное решение задачи (23), то имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть $u^\varepsilon(x, t)$ является решением задачи* (1)—(3). *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\lim u^\varepsilon(x, t) = u^0(x, t) \text{ в } L^2(Q) \text{ и}$$

$$\lim a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \varphi(u^\varepsilon)}{\partial x_j} = b_{ij} \frac{\partial \varphi(u^0)}{\partial x_j} \text{ в слабом смысле в } L^2(Q).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{\varepsilon_n\}$, такую что $\varepsilon_n \to 0$. Для простоты обозначим через $u_n(x, t)$ решение задачи (1)—(3) при $\varepsilon = \varepsilon_n$. Из теоремы 1 следует, что последовательность $\vartheta_n(x, t) = \varphi(u_n)$ ограничена в пространстве $H^1(Q)$. Это достаточно (см. [20, с. 81]) для существования подпоследовательности $\{\vartheta_{n'}(x, t)\}$ и функции $\vartheta(x, t) \in H^1(Q)$, такие, что $\lim \vartheta_n(x, t) = \vartheta(x, t)$ в слабом смысле в $H^1(Q)$. Здесь и далее все подпоследовательности будем снова обозначать через $\{\vartheta_n(x, t)\}$.

Из теоремы вложения следует, что $\lim \vartheta_n(x, t) = \vartheta(x, t)$ сильно в $H^{3/4}(Q)$, а из теоремы о следах получаем $\lim \vartheta_n(x, t) = \vartheta(x, t)$ как элементы пространства $H^{1/4}(S)$.

Таким образом мы доказали, что существуют подпоследовательность $\{\vartheta_n(x, t)\}$ и функция $\vartheta(x, t) \in H^1(Q)$, для которых $\lim \vartheta_n(x, t) = \vartheta(x, t)$ в $L^2(Q)$ и для п. в. $(x^0, t^0) \in S$

$$\lim \vartheta(x, t) = 0, \tag{25}$$

если $(x, t) \in Q$ и стремится к (x^0, t^0) по нормали к S ([21]).

Из теоремы Рисса следует, что существует подпоследовательность $\{\vartheta_n(x, t)\}$, такая, что $\lim \vartheta_n(x, t) = \vartheta(x, t)$ для п. в. (x, t) из Q. Тогда для п. в. (x, t) из Q

$$\lim u_n(x, t) = \Phi(\vartheta(x, t)).$$

Вводим обозначение $u(x, t) = \Phi(\vartheta(x, t))$. Так как $0 \leq u_n(x, t) \leq M$, то при помощи теоремы Лебега проверяется, что

$$\lim u_n(x, t) = u(x, t) \text{ в } L^2(Q), \tag{26}$$

$$0 \leq u(x, t) \leq M \text{ п. в. в } Q. \tag{27}$$

Докажем, что функция $u(x, t)$ является решением усредненной задачи (23). Требования (a) и (b) мы проверили выше, а требование (d) следует из (25) и непрерывности функции $\Phi(\tau)$. Проверим требование (c).

Из неравенств (4) следует, что

$$\| a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \frac{\partial \varphi(u_n)}{\partial x_j} \| \leq \Lambda_1 n M,$$

где $\Lambda_1 = \sup\{|a_{ij}(y)|, i, j = 1, \ldots, n\}$. Тогда существуют подпоследовательность $\{u_n\}$ и функция $p_i \in L^2(Q)$ такие, что

$$\lim [a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \frac{\partial \varphi(u_n)}{\partial x_j}] = p_i(x, t) \text{ в слабом смысле в } L^2(Q). \tag{28}$$

Так как $u_n(x,t)$ есть решение задачи (1)—(3), то

$$(29)\qquad 0=\iint_Q \{u_n \frac{\partial f}{\partial t} - a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon_n})\frac{\partial\varphi(u_n)}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\}dxdt+\int_\Omega f(x,0)u_0(x)\,dx.$$

Принимая во внимание (26) и (28), совершаем предельный переход в (29) и заключаем, что

$$(30)\qquad 0=\iint_Q \{u\frac{\partial f}{\partial t} - p_i(x,t)\frac{\partial f}{\partial x_i}\}\,dxdt+\int_\Omega f(x,0)u_0(x)\,dx.$$

Следовательно, для доказательства требования (c) осталось проверить, что $p_i(x,t) = b_{ik}\ \partial\varphi(u)/\partial x_k$ п. в. в Q. Для любого $k=1,\dots,n$ рассмотрим функцию $\omega_n(x)=x_k + \varepsilon_n\omega^k(\frac{x}{\varepsilon_n})$, где $\omega^k(y)$ есть решение задачи (22). Тогда легко проверить, что

$$(31)\qquad \lim\omega_n(x)=x_k \quad \text{в } L^2(Q),$$

$$(32)\qquad \iint_Q \{a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon_n})\frac{\partial\omega_n(x)}{\partial x_j}\frac{\partial[\theta(x,t)\varphi(u_n)]}{\partial x_i}\,dxdt=0,$$

где $\theta(x,t)\in C^\infty(Q)$ и $\theta(x,t)=0$ в окрестности поверхности $SU(\Omega\times T)$. Рассмотрим сумму равенств (32) и (29) при $f=\theta(x,t)\omega_n$ и получаем

$$(33)\qquad 0=\iint_Q\{u_n\omega_n\frac{\partial\theta}{\partial t} - [a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon_n})\frac{\partial\varphi(u_n)}{\partial x_i}\frac{\partial(\theta\omega_n)}{\partial x_i} - a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon_n})\frac{\partial\omega_n}{\partial x_j}\frac{\partial[\theta\cdot\varphi(u_n)]}{\partial x_i}]\}dxdt$$

$$+\int_\Omega f(x,0)\,u_0(x)dx=\int_\Omega\theta(x,0)\omega_n(x)u_0(x)dx$$

$$+\iint_Q\{u_n\omega_n\frac{\partial\theta}{\partial t}-[a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon_n})\frac{\partial\varphi(u_n)}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\omega_n-a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon_n})\frac{\partial\omega_n}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\varphi(u_n)]dxdt.$$

Принимая во внимание, что

$$\lim a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon_n})\frac{\partial\omega_n}{\partial x_i}=\frac{1}{|Y|}\int_Y[a_{ik}(y)+a_{ij}(y)\frac{\partial\omega^k(y)}{\partial y_j}]dy$$

в слабом смысле в $L^2(Q)$, переходим к пределу в равенстве (33) при $n\to\infty$ и получаем

$$0=\iint_Q\{u\cdot\frac{\partial\theta}{\partial t}\cdot x_k-[p_i(x,t)x_k-b_{ik}\varphi(u)]\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\}dxdt+\int_\Omega u_0(x)x_k\theta(x,0)dx.$$

Из этого равенства и равенства (30) при $f=x_k.\theta(x,t)$ получаем

$$0=\iint_Q[p_k(x,t)\theta(x,t)+b_{ik}\varphi(u)\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x_i}]\,dxdt=\iint_Q[p_k(x,t)-b_{ik}\frac{\partial\varphi(u(x,t)}{\partial x_i}]\,\theta(x,t)dxdt,$$

что и завершает проверку равенства $p_k(x,t)=b_{ki}\dfrac{\partial\varphi(u(x,t))}{\partial x_i}$. Следовательно, $u(x,t)$ есть решение задачи (23) и в силу единственности $u(x,t)=u^0(x,t)$. Тогда, принимая во внимание равенства (26) и (28), завершаем доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е I. Теорему 2 можно доказать и для некоторых классов квазилинейных уравнений вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_j}a_j(\frac{x}{\varepsilon},\ u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}).$$

Оказывается, что и в этом случае правило нахождения усредненного уравнения сохраняется. Сначала решается задача

$$\frac{\partial}{\partial y_i} a_i\left(y, \sigma, \xi_1+\frac{\partial\omega}{\partial y_1}, \ldots, \xi_n+\frac{\partial\omega}{\partial y_n}\right)=0,$$

где $\omega(y)$ есть Y-периодическая функция по y и $\int_Y \omega(y, \sigma, \xi)dy$, а $(\sigma, \xi)=(\sigma, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ — параметры.

Определяем функции

$$b_i(\sigma, \xi)=\frac{1}{|Y|} \int\limits_Y a_i\left(y, \sigma, \xi_1+\frac{\partial\omega}{\partial y_1}, \ldots, \xi_n+\frac{\partial\omega}{\partial y_n}\right)dy.$$

Тогда усредненное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_i} b_i\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Amsterdam, 1984.
2. Э. Санчес-Паленсия. Неоднородные среды и теория колебаний. М., 1984.
3. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. О G-сходимости параболических операторов. *Успехи мат. наук.*, **36**, 1981, № 1, 11—58.
4. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник. Усреднение параболических операторов. *Труды Моск. мат. общ.*, **45**, 1982.
5. S. Spagnolo. Convergence of parabolic equations. *Bollet. U.M.I.* (5), **14—B**, 1977, 547-568.
6. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко. Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984.
7. Н. С. Бахвалов. Осреднение нелинейных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами. *Доклады СССР*, **225**, 1975, 249—252.
8. В. Л. Бердичевский. Пространственное осреднение периодических структур. *Доклады СССР*, **222**, 1975, 565—567.
9. В. В. Жиков. Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления. *Изв. АН СССР, сер. Матем.*, **47**, 1983, 961—997.
10. У. Е. Райтум. К G-сходимости квазилинейных эллиптических операторов с неограниченными коэффициентами. *Доклады АН СССР*, **261**, 1981, 30—34.
11. А. А. Панков. Об усреднении и G-сходимости нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида. *Доклады АН СССР*, **278**, 1984, 37—41.
12. L. Boccardo, F. Murat. Homogeneisation de problemes quasilineaires. *I. R. M. A.*, Lille 3(7), 1981.
13. M. Artola, G. Duvaut. Homogeneisation d'une class de problemes non lineaires. *C. R. Acad Sci. Paris, Ser. A*, 288, 1979, 775-778.
14. М. М. Маринов. О G-сходимости квазилинейных параболических дифференциальных операторов. *Доклады БАН*, **39**, 1986 № 5, 19—22.
15. О. А. Олейник, А. С. Калашников, Чжоу Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации. *Изв. АН СССР. Сер. Матем.*, **22**, 1958, 667—704.
16. D. G. Aronson, L. A. Peletier. Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains. *J. Diff. Equations*, **3**, 1981, 378-412.
17. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
18. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функции и функционального анализа. М., 1968.
19. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
20. Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. Линейные операторы (Общая теория). М., 1962.
21. С. Мизохата. Теория уравнений с частными производными. М., 1977.

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. Я. 373*

Поступила 22. 11. 1985