Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ОДНОГО КЛАССА ПОВЕРХНОСТЕЙ В ОБОБЩЕННОМ БИАКСИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ $P_4^{1,2}$

РУМЯНА Т. КОЖУХАРОВА

В четырехмерном проекционном пространстве группа коллинеаций, сохраняющая прямую и скрещенную с ней плоскость, определяет обобщенное биаксиальное пространство $P_4^{1,2}$. С каждой точкой поверхности класса Σ_2 связан инвариантный репер самого натурального способа. Получены основные уравнения дифференциальной геометрии поверхности класса Σ_2.

1. Пусть в вещественном четырехмерном проективном пространстве P_4 фиксированы вещественная прямая j и скрещенная с ней вещественная плоскость k. Геометрия Клейна, фундаментальной группой которой является множество всех вещественных коллинеаций в P_4, сохраняющих j и k, называется геометрией обобщенного биаксиального пространства $P_4^{1,2}$ [3]. В P_4 будем использовать проективные реперы $(A;\ B)\equiv(A_1,\ A_2;\ B_1,\ B_2,\ B_3)$, для которых первые их две вершины A_e — точки из j, а остальные три вершины B_λ — точки из k. Однородные проективные координаты относительно фиксированного репера $(A^0;\ B^0)$ произвольной точки пространства P_4 будем обозначать через $(x;\ y)=(x^1,\ x^2;\ y^1,\ y^2, y^3)$. Во всем изложении для индексов $l,\ m,\ \lambda,\ \mu$ справедливо: $l,\ m\in\{1;\ 2\},\ \lambda,\ \mu\in\{1;\ 2;\ 3\}$. Будем использовать терминологию, обозначения и результаты работ [1—7].

Предполагаем, что даны пять вещественнозначных функций $x^e=x^e(u,\ v)$, $y^\lambda=y^\lambda(u,\ v)$ вещественных независимых переменных u и v, изменяющихся в вещественной области U и гладкие до третьего порядка на ней. Относительно $(A^0;\ B^0)$ рассматриваем точку с координатами

$$(x;\ y)=(x(u,\ v);\quad y(u,\ v)),\quad (u,\ v)\in U. \tag{1}$$

Когда u и v меняются в U, точка (1) опишет поверхность S.

Все геометрические объекты (точки, прямые, плоскости, линии и др.), величины, свойства и др., которые будем связывать с поверхностью, будем выражать посредством функций x, y и их частных производных. Объекты, величины, свойства и др., для того, чтобы принадлежали рассматриваемой биаксиальной геометрии, должны обладать инвариантностью всех следующих трех видов:

1) B — инвариантность относительно B — замены:

$$\overline{x}^e=\alpha^l_m x^m,\quad \overline{y}^\lambda=\beta^\lambda_\mu y^\mu\quad (\det(\alpha^e_m)\neq 0,\ \det(\beta^\lambda_\mu)\neq 0). \tag{2}$$

2) D — инвариантность относительно D — замены координат текущей точки (1) поверхности S новыми координатами $(\overline{x}(u,\ v);\overline{y}(u,\ v))$ следующим образом:

$$\overline{x}=\alpha x,\ \overline{y}=\alpha y\quad (\alpha=\alpha(u,v)\neq 0\quad \text{для } (u,\ v)\in U). \tag{3}$$

3) P — инвариантность относительно P — замены параметров u и v новыми параметрами $\overline{u}$ и $\overline{v}$:

$$u=u(\overline{u},\ \overline{v}),\ v=v(\overline{u},\ \overline{v}), \tag{4}$$

где $u(\bar{u}, \bar{v})$ и $v(\bar{u}, \bar{v})$ — функции, определенные в области $\bar{U} \subset R^2$ при обычных предположениях и специально, что функциональный определитель $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = u_{\bar{u}} v_{\bar{v}} - v_{\bar{u}} u_{\bar{v}} \neq 0$ для $(\bar{u}, \bar{v}) \in \bar{U}$.

С каждой точкой поверхности S свяжем подвижный репер $(A; B)$, для которого координаты вершины A_e и B_λ обозначаем, соотв., через $(x_e(u, v); 0)$ и $(0; y_\lambda(u, v))$. Частные производные функций x_e и y_λ относительно u и v, из-за выбора $(A; B)$, можем записать в виде

$$x_{eu} = a_e^m x_m, \quad x_{ev} = b_e^m x_m, \quad y_{\lambda u} = c_\lambda^\mu y_\mu, \quad y_{\lambda v} = d_\lambda^\mu y_\mu, \tag{5}$$

где

$$a_e^m = a_e^m(u, v), \quad b_e^m = b_e^m(u, v), \quad c_\lambda^\mu = c_\lambda^\mu(u, v), \quad d_\lambda^\mu = d_\lambda^\mu(u, v) \tag{6}$$

являются гладкими функциями в области U. Из (5) легко найти выражения для функций (6). Из равенств $x_{euv} = x_{evu}$, $y_{\lambda uv} = y_{\lambda vu}$, которые выполняются для любой пары $(u, v) \in U$, получаем условия интегрируемости производных.

Будем исследовать изменение функций (6) при B-, D-, и P- заменах.

1. При B- замене (2) получаем $\bar{a}_e^m = a_e^m$, $\bar{b}_e^m = b_e^m$, $\bar{c}_\lambda^\mu = c_\lambda^\mu$, $\bar{d}_\lambda^\mu = d_\lambda^\mu$. Следовательно, функции (6) B — инвариантные.

2. При D- замене (3) функции $x_e(u, v)$, $y_\lambda(u, v)$ заменяются новыми функциями $\bar{x}_e(u, v)$, $\bar{y}_\lambda(u, v)$ переменных $(u, v) \in U$:

$$\bar{x}_e = \rho_e x_e, \quad \bar{y}_\lambda = \sigma_\lambda y_\lambda, \tag{7}$$

где $\rho_e = \rho_e(u, v) \neq 0$, $\sigma_\lambda = \sigma_\lambda(u, v) \neq 0$ — гладкие функции $(u, v) \in U$. При этой замене для функций (6) находим следующие представления

$$\bar{a}_e^e = a_e^e + \frac{\rho_{eu}}{\rho_e}, \quad \bar{a}_e^m = \frac{\rho_e}{\rho_m} a_l^m (l \neq m), \quad \bar{b}_l^l = b_l^l + \frac{\rho_{ev}}{\rho_e}, \quad \bar{b}_l^m = \frac{\rho_e}{\rho_m} b_l^m (l \neq m),$$

$$\bar{c}_\lambda^\lambda = c_\lambda^\lambda + \frac{\sigma_{\lambda u}}{\sigma_\lambda}, \quad \bar{c}_\lambda^\mu = \frac{\sigma_\lambda}{\sigma_\mu} c_\lambda^\mu (\lambda \neq \mu), \quad \bar{d}_\lambda^\lambda = d_\lambda^\lambda + \frac{\sigma_{\lambda v}}{\sigma_\lambda}, \quad \bar{d}_\lambda^\mu = \frac{\sigma_\lambda}{\sigma_\mu} d_\lambda^\mu (\lambda \neq \mu).$$

Оттуда следует D- инвариантность величин:

$$a_1^2 a_2^1, \quad b_1^2 b_2^1, \quad c_1^2 c_2^1, \quad c_1^3 c_3^1, \quad c_2^3 c_3^2, \quad d_1^2 d_2^1, \quad d_1^3 d_3^1, \quad \frac{b_1^2}{a_1^2}, \quad \frac{d_1^3}{c_1^3}, \quad \frac{c_1^2}{d_1^2}, \quad \frac{c_2^3}{d_2^3}, \quad \frac{a_2^1}{b_2^1}. \tag{8}$$

3. Формулы трансформации функций (6) при P- замене имеют вид:

$$\bar{a}_e^m = a_e^m u_{\bar{u}} + b_e^m v_{\bar{u}}, \quad \bar{b}_e^m = a_e^m u_{\bar{v}} + b_e^m v_{\bar{v}}, \quad \bar{c}_\lambda^\mu = c_\lambda^\mu u_{\bar{u}} + d_\lambda^\mu v_{\bar{u}}, \quad \bar{d}_\lambda^\mu = c_\lambda^\mu u_{\bar{v}} + d_\lambda^\mu v_{\bar{v}}.$$

II. В [4] множество поверхностей в $P_4^{1,2}$ разбивается на семь непересекающихся B-, D- и P- инвариантных классов поверхностей Σ_l, $l \in \{1; \ldots; 7\}$. В [5] каждый из этих классов геометрически интерпретирован. В дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемая поверхность принадлежит одному из самых общих классов поверхностей в $P_4^{1,2}$-классу Σ_3. Тогда для нее выполнены

$$(xx_u)^2 + (xx_v)^2 \neq 0, \quad yy_u y_v = 0, \quad y_{uu} y y_u \neq 0 \text{ для } (u, v) \in U. \tag{9}$$

Через каждую точку $(x; y)$ поверхности S проходит одна и только одна трансверсальная прямая для j и k, единственная общая точка которой с j есть

$$(x(u, v); 0), \tag{10}$$

а с k —

$$(0; y(u, v)). \tag{11}$$

Касательная плоскость η к поверхности S в ее точке $(x;\ y)$ четвертого типа (см. [6]). т. е. она имеет единственную общую точку с j и единственную общую точку с k. Определим эти точки. Произвольная точка плоскости η имеет координаты

$$(\alpha x+\beta x_u+\gamma x_v;\quad \alpha y+\beta y_u+\gamma y_v),\quad |\alpha|+|\beta|+|\gamma|\neq 0. \tag{12}$$

Эта точка является точкой из j тогда и только тогда, когда $\alpha y+\beta y_u+\gamma y_v=0$. Оттуда, из-за (9_3), находим $\alpha=y_u y_v y_{uu}$, $\beta=y_v y y_{uu}$, $\gamma=y y_u y_{uu}$. Тогда общая точка плоскости η с абсолютной прямой j имеет относительно $(A^0;\ B^0)$ координаты

$$(y_u y_v y_{uu}\,.\,x+y_v y y_{uu}\,.\,x_u+y y_u y_{uu}\,.\,x_v;\ 0)\,. \tag{13}$$

Точка (12) будет точкой из k тогда и только тогда, когда $\alpha x+\beta x_u+\gamma x_v=0$, откуда, из-за (9_1), находим $\alpha=x_u x_v$, $\beta=x_v x$, $\gamma=x x_u$. Следовательно, общая точка плоскостей η и k имеет относительно $(A^0;\ B^0)$ координаты

$$(0;\quad x_u x_v\,.\,y+x_v x\,.\,y_u+x x_u\,.\,y_v). \tag{14}$$

В [6] мы установили, что на поверхности S класса Σ_2 через каждую ее точку $(x;\ y)$ существует единственная линия c_1 класса K_2 и единственная линия c_2 класса K_1, которые являются присоединенными. Следовательно, соприкасающаяся плоскость τ_2 линии c_2 на S в точке $(x;\ y)$ из S есть плоскость первого типа (см. [7]), т. е. она скрещивается с прямой j и имеет единственную общую точку с k. Теперь переходим к ее нахождению. Произвольная точка из τ_2 имеет координаты

$$(\alpha x+\beta x'+\gamma x'';\quad \alpha y+\beta y'+\gamma y''),\quad |\alpha|+|\beta|+|\gamma|\neq 0. \tag{15}$$

Через $'$ обозначаем дифференцирование относительно параметра линии c_2. Точка (15) будет принадлежать k тогда и только тогда, когда $\alpha x+\beta x'+\gamma x''=0$. Учитывая, что $xx'\neq 0$ для линии c_2 класса K_1 [7], находим $\alpha=x'x''$, $\beta=x''x$, $\gamma=xx'$. Тогда общая точка плоскостей τ_2 и k имеет относительно $(A^0;\ B^0)$ координаты

$$(0;\quad x'x''\,.\,y+x''x\,.\,y'+xx'\,.\,y''). \tag{16}$$

Всюду x' и x'' равны, соотв., $x_u u'+x_v v'$ и $x_{uu}u'^2+2x_{uv}u'v'+x_{vv}v'^2+x_u u''+x_v v''$, причем u' и v' удовлетворяют дифференциальным уравнениям линии c_2 на поверхности S через ее точку $(x;\ y)$.

3. Пусть подвижный репер $(A;\ B)$, связанный с произвольной точкой $(x;\ y)$ поверхности S таков, что A_1+B_1 есть точка $(x;\ y)$ из S. Тогда A_1 — первая а, B_1 — вторая проекция точки $(x;\ y)$ поверхности S. В качестве координатных вершин A_2 и B_2 подвижного репера $(A;\ B)$ для S выбираем общие точки касательной плоскости поверхности S в точке $(x;\ y)$, соотв., с j и k, а в качестве координатной вершины B_3 — общую точку соприкасающейся плоскости линии c_2 в точке $(x;\ y)$ с k. Тогда из (7), (10), (11), (13), (14) и (16) имеем

$$\begin{gathered}
x_1=x,\quad y_1=y,\quad \rho_1=\sigma_1,\\
x_2=y_u y_v y_{uu}\cdot x+y_v y_u y_{uu}\cdot x_u+y y_u y_{uu}\cdot x_v,\\
y_2=x_u x_v\cdot y+x_v x\cdot y_u+x x_u\cdot y_v,\\
y_3=x'x''\cdot y+x''x\cdot y'+xx'\cdot y''.
\end{gathered} \tag{17}$$

В качестве v- линии и u- линии поверхности S выбираем, соотв., замечательные линии c_1 класса K_2 и c_2 класса K_1 на S через $(x;\ y)$ из S. Из соответствующих дифференциальных уравнений, данных в [6], находим

$$\begin{gathered}
xx_v=0,\quad xx_u\cdot y_{uu}y_v y_{vv}+xx_{uu}\cdot y_{vv}y_v y_u\\
+x_u x_v\cdot y_{uu}yy_{vv}+x_u x_{uu}\cdot y_{vv}yy_v+x_u x_{vv}\cdot y_{uu}y_v y+x_v x_{uu}\cdot y_{vv}y_u y=0.
\end{gathered} \tag{18}$$

Мы получили репер $(A;\ B)$ поверхности S, который в каждой ее точке геометрически определен, причем параметрическая сеть имеет специальный выбор. Этот репер характеризуется следующими зависимостями, которые получаются из (9), (17) и (18), после использования (5):

$$
(19)\qquad \begin{gathered} b_1^2=c_1^3=d_1^3=d_2^1=0, \quad d_1^1=b_1^1, \quad c_1^1=a_1^1, \quad c_1^2c_2^1=a_1^2a_2^1, \\ a_1^2(c_{1u}^2+c_1^2c_2^2)-c_1^2(a_{1u}^2+a_1^2a_2^2)=0, \quad a_1^2d_1^2c_1^2c_2^3\neq 0. \end{gathered}
$$

Теперь D- инвариантные величины (8) имеют, соотв., вид

$$
a_1^2a_2^1,\ 0,\ a_1^2a_2^1,\ 0,\ c_2^3c_3^2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{c_1^2}{d_1^2},\quad \frac{c_2^3}{d_2^3},\quad \frac{a_2^1}{b_2^1}.
$$

При допустимых P- замен получаем $\overline{a}_1^2\,\overline{a}_2^1=a_1^2a_2^1(u\overline{u})^2$, $\overline{c}_2^3\overline{c}_3^2=c_2^3c_3^2(u\overline{u})^2$, $\dfrac{\overline{c}_1^2}{\overline{d}_1^2}=\dfrac{c_1^2}{d_1^2}\cdot\dfrac{u\overline{u}}{v\overline{v}}$, $\dfrac{\overline{c}_2^3}{\overline{d}_2^3}=\dfrac{c_2^3}{d_2^3}\cdot\dfrac{u\overline{u}}{v\overline{v}}$, $\dfrac{\overline{a}_2^1}{\overline{b}_2^1}=\dfrac{a_2^1}{b_2^1}\cdot\dfrac{u\overline{u}}{v\overline{v}}$.

Нетрудно установить, что $\dfrac{a_1^2a_2^1}{c_2^3c_3^2}$, $\dfrac{c_1^2d_2^3}{c_2^3d_1^2}$, $\dfrac{b_2^1c_1^2}{a_2^1d_1^2}$ являются B-, D- и P- инвариантными величинами, т. е. они — абсолютные инварианты поверхности. Причем для S могут быть образованы следующие квадратические формы: $a_1^2a_2^1du^2$, $c_2^3c_3^2du^2$.

Выбираем $\rho_2:=\rho_1a_1^2$, $\sigma_2:=\sigma_1c_1^2$, $\sigma_3:=\sigma_2c_2^3$. Тогда для репера, полученного из $(A;\ B)$ после D-$=$замены, получаем $\overline{a}_1^2=\overline{c}_1^2=\overline{c}_2^3=1$. Обозначаем $\overline{a}_1^2$, $\overline{c}_1^2$, $\overline{c}_2^3$ снова через a_1^2, c_1^2, c_2^3 и, следовательно, имеем

$$
(20)\qquad a_1^2=c_1^2=c_2^3=1.
$$

При D- замене теперь имеем $\overline{x}_e=\rho_1\cdot x_e$, $\overline{y}_\lambda=\rho_1\cdot y_\lambda$. Связь между определителем Δ координат вершины репера $(A;\ B)$ и определителем $\overline{\Delta}$ координат вершин репера, полученного из $(A;\ B)$ после D- замены, следующая: $\overline{\Delta}=(\rho_1)^5\Delta$. Выбираем $\rho_1:=1/\sqrt[5]{\Delta}$. Тогда $\overline{\Delta}=1$ и, обозначая $\overline{\Delta}$ снова через Δ, имеем $\Delta=x_1x_2\cdot y_1y_2y_3=1$. Дифференцируя относительно u и v и учитывая (5), находим равенства:

$$
(21)\qquad a_1^1+a_2^2+c_1^1+c_2^2+c_3^3=0, \quad b_1^1+b_2^2+d_1^1+d_2^2+d_3^3=0.
$$

Из условий интегрируемости производных, используя (19), (20) и (21), находим следующие связи:

$$
(22)\qquad b_1^1=b_2^2, \quad d_2^3=d_1^2, \quad b_2^1+a_2^1d_1^2=0, \quad d_1^2(a_1^1+4a_2^2)=2b_1^1+3d_2^2.
$$

Из (5), имея в виду (19), (20), (21) и (22), получаем основные уравнения дифференциальной геометрии поверхности:

$$
(23)\qquad \begin{aligned} x_{1u}&=a_1^1x_1+x_2, & x_{1v}&=b_1^1x_1, \\ x_{2u}&=a_2^1x_1+a_2^2x_2, & x_{2v}&=-a_2^1d_1^2x_1+b_1^1x_2, \\ y_{1u}&=a_1^1y_1+y_2, & y_{1v}&=b_1^1y_1+d_1^2y_2, \\ y_{2u}&=a_2^1y_1+a_2^2y_2+y_3, & y_{2v}&=d_2^2y_2+d_1^2y_3, \\ y_{3u}&=c_3^1y_1+c_3^2v_2-2(a_1^1+a_2^2)y_3, & y_{3v}&=d_3^1y_1+d_3^2y_2-(3b_1^1+d_2^2)y_3. \end{aligned}
$$

Коэффициенты, фигурирующие в (23), связаны между собой следующими зависимостями:

$$a^1_{1v}-b^1_{1u}=a^1_2d^2_1, \qquad a^1_{2v}+(a^1_2d^2_1)u=a^1_2\,d^2_1(a^2_2-a^1_1),$$

$$a^2_{2v}-b^1_{1u}=-a^1_2d^2_1, \qquad d^2_{1u}=d^2_2-b^1_1+d^2_1(a^1_1-a^2_2),$$

$$a^1_{2v}=a^1_2(d^1_2-b^1_1)+d^2_1c^1_3-d^1_3, \qquad a^2_{2v}-d^2_{2u}=d^2_1(c^2_3-a^1_2)-d^2_3,$$

$$c^1_{3v}-d^1_{3u}=c^1_3(-4b^1_1-d^2_2)+d^1_3(3a^1_1+2a^2_2)+d^2_3a^1_2,$$

$$c^2_{3v}-d^2_{3u}=d^2_3(3a^2_2+2a^1_1)-c^2_3(3b^1_1+2d^2_2)-c^1_3d^2_1+d^1_3,$$

$$-2(a^1_1+a^2_2)_v+(3b^1_1+d^2_2)_u=d^2_3-c^2_3d^2_1,\ d^2_1(a^1_1+4a^2_2)=2b^1_1+3d^2_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Петканчин. Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия. *Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак.*, 48, кн. 1, ч. 1, 1954, 33—67.
2. Б. Петканчин. Върху един аналог в нечетномерно проективно пространство на двуосната геометрия. *Год. Соф. унив., Мат. фак.*, 60, 1966, 33—60.
3. Гр. Станилов. Върху интегралната геометрич на обобщени двуосни пространства. *Изв. Мат. инст. БАН*, 11, 1970, 39—53.
4. Р. Т. Кожухарова, Д. Г. Мекеров. Инвариантные равенства для поверхности в одном общенном биаксиальном пространстве. *Доклады БАН*, 37, 1984, 1463—1466.
5. Р. Т. Кожухарова, Д. Г. Мекеров. Геометрическая характеристика одной классификации поверхности в обобщенном биаксиальном пространстве $P^{1,2}_4$. *Доклады БАН*, 38, 1985, 39—42.
6. Р. Т. Кожухарова. Върху един клас от повърхнини в обобщеното двуосно пространство $P^{1,2}_4$. Математика и мат. образование, С. 1986.
7. Д. Г. Мекеров, Р. Т. Кожухарова. Об одной классификации кривых в четырехмерном обобщенном биаксиальном пространстве. *Плиска — Бълг. мат. студии*, 9, 1987.

Пловдивский университет
4000 Пловдив, Болгария

Поступила 25. 11. 1985