Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПРОБЛЕМА СЕГЕ ДЛЯ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

ЛЮБОМИР Г. ИЛИЕВ

Обозначим через S класс функций

$$(S)\qquad f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots\quad c_0=0,\ c_1=1$$

регулярных и однолистных в единичном круге $|z|<1$.

Через S_k, $k=1, 2, \ldots$, $(S_1\equiv S)$ обозначим подсовокупность S, состоящуюся из функций

$$(S_k)\qquad f_k(z)=z+c_{k+1}z^{k+1}+c_{2k+1}z^{2k+1}+\cdots$$
$$=z+c_1^{(k)}z^{k+1}+c_2^{(k)}z^{2k+1}+\cdots,$$

k-симметричных, однолистных и регулярных в круге $|z|<1$.

Отметим, что если $f_1(z)\in S_1$, то тогда $f_k(z)=\sqrt[k]{f_1(z^k)}\in S_k$.

Обозначим через Σ класс функций

$$(\Sigma)\qquad F(\zeta)=\zeta+\gamma_0+\frac{\gamma_1}{\zeta}+\cdots,$$

однолистных и голоморфных в области $|\zeta|>1$, за исключением простого полюса в несобственной точке.

Если $f(z)\in S$, то $F(\zeta)=1/f(1/\zeta)\in\Sigma$.

Классическая теорема Кёбе [1] гласит:

Теорема К (Об искажении, Verzerrungssatz). *Если $f(z)\in S$ и $|z|\leq r<1$, то*

$$(1)\qquad \frac{1-r}{(1+r)^3}\leq|f'(z)|\leq\frac{1+r}{(1-r)^3}.$$

Оценки в (1) *достигаются для функции $f(z)=z/(1-z)^2$.*

Из этой теоремы Л. Бибербах [2] получил:

Теорема В. *Если $f(z)\in S$ и $|z|\leq r<1$, то*

$$(2)\qquad \frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leq|f(z)|\leq\frac{|z|}{(1-|z|)^2};$$

если $f(z)\in S_k$, $k=1, 2, \ldots$, $|z|\leq r<1$, то:

$$(3)\qquad \frac{|z|}{(1+|z|^k)^{2/k}}\leq|f_k(z)|\leq\frac{|z|}{(1-|z|^k)^{2/k}}.$$

Оценки в (2) *и* (3) *достигаются для функций $f_k(z)=z(1-z^k)^{2/k}$.*

Г. М. Голузин [3] установил:

Теорема Г. *Если $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, $(n\geq1)$ принадлежат области $|\zeta|>1$ и $F(\zeta)\in\Sigma$, то при $|\zeta|>1$*

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 3—17.

$$(4)\qquad \prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\zeta_\nu\bar\zeta_{\nu'}}\right)\leqq\left|\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\frac{F(\zeta_\nu)-F(\zeta_{\nu'})}{\zeta_\nu-\zeta_{\nu'}}\right|\leqq 1/\prod_{\nu,\nu'=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\zeta_\nu\bar\zeta_{\nu'}}\right),$$

где в среднем произведении при $\nu=\nu'$ *под соответным множителем следует понимать* $F'(\zeta_\nu)$.

Оценки (4) — *точные при* $\zeta_\nu=\zeta e^{\frac{2\pi\nu i}{n}}$, $\nu=1, 2, \ldots;$ $|\zeta|>1$.

Нижняя оценка всегда точная при $n=2$.

1. В [4], [12] Л. Илиев, используя теорему Г, установил:

Теорема И. *Если* $f_k(z)\in S_k$ *и* $|z|\leqq r<1$, $|z_1|\leqq r$, $|z_2|\leqq r$, $z_1\neq z_2$, *то*

$$(1.1)\qquad \frac{1-r^2}{(1+r^k)^{4/k}}\leqq\left|\frac{f_k(z_1)-f_k(z_2)}{z_1-z_2}\right|\leqq\frac{1}{(1-r^2)(1-r^k)^{4/k}}.$$

Нижняя оценка точная при $k=1$ *и* $k=2$.

Эта теорема обобщает теорему Кёбе.

Доказательство. Как отметил Г. Голузин [3], если $F(\zeta)\in\Sigma$ и $|\zeta_1|>1$, то

$$(1.2)\qquad G(\zeta)=\frac{(1-|\zeta_1|^2)F'(\zeta_1)}{F\left(\frac{1+\zeta_1\zeta}{\bar\zeta_1+\zeta}\right)-F(\zeta_1)}=\zeta+\beta_0+\frac{\beta_1}{\zeta}+\cdots$$

тоже принадлежит классу Σ, так что из (4) при $n=1$ получаем в $|\zeta|>1$:

$$(1.3)\qquad 1-\frac{1}{|\zeta|^2}\leqq|G'(\zeta)|\leqq\frac{1}{1-1/|\xi|^2}.$$

Следуя Голузину, положив $\zeta=\frac{1-\bar\zeta_1\zeta_2}{\zeta_2-\zeta_1}$, $|\zeta_2|>1$, из (1.3) получаем

$$(1.4)\qquad \frac{(1-|\zeta_1|^2)(1-|\zeta_2|^2)}{|1-\zeta_1\bar\zeta_2|^2}\leqq\left|F'(\zeta_1)F'(\zeta_2)\left(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{F(\zeta_2)-F(\zeta_1)}\right)^2\right|$$

$$\leqq\frac{|1-\zeta_1\bar\zeta_2|^2}{(1-|\zeta_1|^2)(1-|\zeta_2|^2)}.$$

Кроме того, из (4) при $n=2$ получаем

$$(1.5)\qquad \left(1-\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right)\left(1-\frac{1}{|\zeta_2|^2}\right)\left|1-\frac{1}{\zeta_1\bar\zeta_2}\right|\leqq\left|F'(\zeta_1)F'(\zeta_2)\left(\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right)^2\right|$$

$$\leqq\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right)\left(1-\frac{1}{|\zeta_2|^2}\right)\left|1-\frac{1}{\zeta_1\bar\zeta_2}\right|^2}.$$

Из (1.4) и (1.5) находим

$$(1.6)\qquad \left(1-\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{1}{|\zeta_2|^2}\right)^{1/2}\leqq\left|\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|$$

$$\leqq\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|\zeta_1|^2}\right)^{1/2}\left(1-\frac{1}{|\zeta_2|^2}\right)^{1/2}}.$$

Пусть $f(z)\in S$. Тогда $F(\zeta)=1/f(1/\zeta)\in\Sigma$. Если $|z_1|<1$, $|z_2|<1$ и $\zeta_1=1/z_1$, $\zeta_2=1/z_2$, то из (1.6) получаем

$$(1.7)\qquad \left|\frac{f(z_1)f(z_2)}{z_1z_2}\right|(1-|z_1|^2)^{1/2}(1-|z_2|^2)^{1/2}\leqq\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|$$

$$\leqq\left|\frac{f(z_1)f(z_2)}{z_1z_2}\right|\frac{1}{(1-|z_1|^2)^{1/2}(1-|z_2|^2)^{1/2}}.$$

Если $f(z)=f_k(z)\in S_k$ из (1.7) и (3) при $|z_1|\leqq r$, $|z_2|\leqq r$ следуют неравенства

$$(1.8)\qquad \frac{(1-r_1^2)^{1/2}(1-r_2^2)^{1/2}}{(1+r_1^k)^{2/k}(1+r_2^k)^{2/k}}\leqq\left|\frac{f_k(z_1)-f_k(z_2)}{z_1-z_2}\right|$$

$$\leqq\frac{1}{(1-r_1^k)^{2/k}(1-r_2^k)^{2/k}(1-r_1^2)^{1/2}(1-r_1^2)^{1/2}},$$

откуда при $r_1\leqq r$ и $r_2\leqq r$ следует (1.1).

2. В [5] Сегё создал один метод, с помощью которого можно исследовать частичные суммы однолистных функций. Он установил следующую теорему:

Теорема S I. *Если функция*

$$(2.1)\qquad f(z)=z+c_2z^2+\cdots$$

принадлежит классу S, то ее частичные суммы

$$(2.2)\qquad \sigma_n(z)=z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n,\quad n=1,\ 2,\ldots,$$

однолистны в круге $|z|<1/4$. Константу $1/4$ нельзя заменить большей.

При доказательстве Сегё использовал свою следующую теорему:

Теорема S II. *Если $f(z)\in S$, $|z_1|<1$, $|z_2|<1$, $z_1\neq z_2$, то*

$$(2.3)\qquad \left(\frac{1-|z_2|}{1+|z_2|}\right)^2\frac{|1-\bar z_2z_1|}{(|z_1-z_2|+|1-\bar z_2z_1|)^2}\leqq\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|$$

$$\leqq\left(\frac{1+|z_2|}{1-|z_2|}\right)^2\frac{|1-\bar z_2z_1|}{(|z_1-z_2|-|1-\bar z_2z_1|)^2}.$$

Неравенства (2.3) не точны. Прилагая теорему 4, Илиев доказал методом Сегё нижеуказанные в этом пункте теоремы и упростил доказательство теоремы S II, данное Сегё.

Теорема 1. *Пусть функция*

$$(2.4)\qquad f_2(z)=z+c_3z^3+\cdots$$

принадлежит классу S_2. Тогда её частичные суммы

$$(2.5)\qquad \sigma_n^{(2)}(z)=z+c_3z^3+\cdots+c_{2n+1}z^{2n+1},\quad n=1,\ 2,\ldots$$

однолистны в круге $|z|<1/\sqrt{3}$. Константу $1/\sqrt{3}$ нельзя заменить большей.

С. Такахаши [6] установил эту теорему в следующих частных случаях: 1) если область, в которой определена переменная $\omega=f_2(z)$, $|z|<1$, является выпуклой и 2) если эта область является звездной относительно $\omega=0$. К. Джо [7] дал доказательство общего случая, которое оказалось ошибочным (см. [8], с. 1154 и [9], 980—981). Однако данное им прямое доказательство для случаев $n=1$ и $n=2$, т. е. для $\sigma_3^{(2)}(z)$ и $\sigma_5^{(2)}(z)$, верно, так что в этих случаях теорема установлена. Тот же автор [10] доказал позже теорему для случая, когда все коэффициенты $c_{2\nu+1}$ в (2.4) вещественны. В более поздней работе [11] он достиг новых результатов для общего случая, но не доказал теорему полностью. В [4] и [12] теорема установлена полностью, где она доказана для всякого целого числа $n \geqq 3$.

В [13] и [14] установлена

Теорема 2. *Пусть функция*

$$f_3(z) = z + c_1^{(3)} z^4 + c_2^{(3)} z^7 + \cdots \tag{2.6}$$

принадлежит классу S_3. Тогда её частичные суммы

$$\sigma_n^{(3)}(z) = z + c_1^{(3)} z^3 + \cdots + c_n^{(3)} z^{3n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

однолистны в круге $|z| < \sqrt[3]{3}/2$. Константу $\sqrt[3]{3}/2$ нельзя заменить большей.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f_2(z) \in S_2$. При $r = 1/\sqrt{3}$, если $|z_1| < 1/\sqrt{3}$, $|z_2| < 1/\sqrt{3}$, $z_1 \neq z_2$ из (1.1) следует [4], [12]:

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geqq 3/8. \tag{2.8}$$

Следовательно, (см. [5]) частичная сумма $\sigma_n^{(2)}(z)$ есть однолистная функция в $|z| < 1/\sqrt{3}$, если

$$\left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_{2\nu+1} \frac{z_1^{2\nu+1} - z_2^{2\nu+1}}{z_1 - z_2} \right| < 3/8. \tag{2.9}$$

Последнее неравенство будет выполнено, если

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |c_{2\nu+1}| (c_{2\nu+1}) r^{2\nu} < 3/8, \tag{2.10}$$

где $r = 1/\sqrt{3}$. Как показал В. Левин [15], $|c_{2\nu+1}| < 3{,}4$ для всякого ν и, более того, $|c_9| < 1{,}4$, $|c_{11}| < 1{,}7$ так что (2.10) выполнено при $n \geqq 3$, если

$$9 \,.\, 1{,}4 r^8 + 11 \,.\, 1{,}7 \,.\, r^{10} + 3{,}4 \sum_{\nu=6}^{\infty} (2\nu + 1) r^{2\nu} < 3/8, \tag{2.11}$$

т. е., если

$$9 \,.\, 1{,}4 r^8 + 11 \,.\, 1{,}7 \,.\, r^{10} + 3{,}4 \frac{13(1 - r^2) + 2r^2}{(1 - r^2)^2} < 3/8 \tag{2.12}$$

или, если

$$9 \,.\, 1{,}4/3^4 + 11 \,.\, 1{,}4/3^5 + 3{,}4 \,.\, 7/3^5 < 3/8.$$

Так как последнее неравенство верно, то согласно отмеченному после формулировки теоремы, её первая часть доказана. Что константа $1/\sqrt{3}$ является наилучшей, известно из цитированных работ.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f_3(z) \in S_3$. Используя метод В. Левина [15], получаем неравенство

$$|c_n^{(3)}| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|c_{n-\nu}^{(3)}|^2}{3\nu - 1}, \tag{2.13}$$

где $c_0^{(3)} = 1$.

Как известно [16]:

$$|c_2^{(k)}| \leqq \frac{2}{k} e^{-2\frac{k-1}{k+1}} + \frac{1}{k}, \tag{2.14}$$

так что

$$|c_2^{(3)}| \leqq \frac{2}{3e} + \frac{1}{3} < 0{,}579. \tag{2.15}$$

Так как $|c_1^{(3)}| \leqq 2/3$ из (2.13) и (2.15) получаем

$$\begin{gathered} |c_2^{(3)}| < 0{,}579,\ |c_3^{(3)}| < 0{,}618,\ |c_4^{(3)}| < 0{,}636,\ |c_5^{(3)}| < 0{,}658, \\ |c_6^{(2)}| < 0{,}683,\ |c_7^{(3)}| < 0{,}711,\ |c_8^{(3)}| < 0{,}741,\ |c_9^{(3)}| < 0{,}774. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Согласно неравенству Буняковского для $0 \leq r < 1$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{r^{3\nu}}{(3\nu+1)^{1/3}} &= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1)^{1/2} \cdot r^{3\nu} \cdot \frac{1}{(3\nu+1)^{1/2+1/3}} \\ &\leqq \Big\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1) r^{6\nu} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{(3\nu+1)^{1+2/3}} \Big\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Так как

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{(3\nu+1)^{1+2/3}} < \sum_{k=0}^{\infty} \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{d\nu}{(3\nu+1)^{1+2/3}} = \int_{n}^{\infty} \frac{d\nu}{(3\nu+1)^{1+2/3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(3n+1)^{2/3}} \tag{2.18}$$

и

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1) r^{6\nu} = r^{6n+6} \frac{(3n+4)(1-r^6)+3r^6}{(1-r^6)^2}, \tag{2.19}$$

то

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{r^{3\nu}}{(3\nu+1)^{1/2}} < \frac{1}{2^{1/2}} \frac{r^{3n+3}}{(3n+1)^{1/2}} \frac{\sqrt{(3n+4)(1-r^6)+3r^6}}{1-r^6}. \tag{2.20}$$

Из неравенства Гёльдера аналогично получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1)^{2/3} r^{3\nu} &= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1)^{2/3} r^{2\nu} \cdot r^{\nu} \\ &= \Big\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1) r^{3\nu} \Big\}^{2/3} \Big\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} r^{3\nu} \Big\}^{1/3} = \Big\{ r^{3n+3} \cdot \frac{(3n+4)(1-r^2+3r^3)}{1-r^3} \Big\}^{2/3} \cdot \\ &\Big\{ \frac{r^{3n+3}}{1-r^3} \Big\}^{1/3} = r^{3n+3} \frac{\{(3n+4)(1-r^2)+3r^3\}^{2/3}}{(1-r^3)^{5/3}}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Из (1.1), следуя методу Сегё, получаем, что частичная сумма $\sigma_n^{(3)}(z)$ при $n>2$ является однолистной в круге $|z| < \sqrt[3]{3}/2$, если

$$\sum_{\nu=4}^{\infty} |c_\nu^{(3)}| (3\nu+1) r^{3\nu} < \frac{4(4-\sqrt[3]{9})}{11\sqrt[3]{11}}, \tag{2.22}$$

где $r^3 = 3/8$.

Как установил К. Джо [10] для произвольного ν существует неравенство*

(2.23) $$(3\nu+1)^{1/3}|c_{3\nu+1}|<7{,}96.$$

Из (2.16), (2.21) и (2.23) следует, что (2.22) будет выполнено, если

(2.24) $$\begin{gathered}0{,}636\,.\,13(3/8)^4+0{,}658\,.\,16\,.\,(3/8)^5+0{,}683\,.\,19(3/8)^6\\+0{,}711\,.\,22\,.\,(3/8)^7+0{,}741\,.\,25\,.\,(3/8)^8+0{,}774\,.\,28(3/8)^9\\+7\,.\,96\cdot\frac{8}{5}\cdot\left(\frac{164}{5}\right)^{2/3}(3/8)^{10}<0{,}312.\end{gathered}$$

Так как неравенство (2.24) верно, а частичная сумма $\sigma_1^{(3)}(z)$ однолистна в круге $|z|<\sqrt[3]{3}/2$, то теорема 2 доказана при $n\neq 2$.

Доказательство теоремы для $n=2$ было получено Л. Илиевым [14] при помощи метода К. Лёвнера.

Согласно методу Лёвнера [17], для того чтобы установить, что частичная сумма

(2.α) $$\sigma_2^{(3)}(z)=z+c_1^{(3)}z^4+c_2^{(3)}z^7$$

функции $f_3(z)\in S_3$ однолистна в круге $|z|<\sqrt[3]{3}/2$ достаточно установить это для функций, для которых

(2.β) $$\begin{aligned}c_1^{(3)}&=-\frac{2}{3}\int_0^\infty k(\tau)e^{-\tau}\,d\tau,\\ c_2^{(3)}&=\frac{8}{9}\left(\int_0^\infty k(\tau)e^{-\tau}\,d\tau\right)^2-\frac{2}{3}\int_0^\infty k^2(\tau)e^{-2\tau}\,d\tau,\end{aligned}$$

где $k(\tau)$ обозначает произвольную непрерывную функцию, абсолютная величина которой равна 1 при любом $\tau\geqq 0$.

Следуя известным методам (см., например [10], с. 10, 11), легко доказать, что это утверждение будет установлено, если мы докажем, что

(2.γ) $$\mathrm{Re}\,(1+4\,c_1^{(3)}z^3+7\,c_2^{(3)}z^6)>0$$

при $|z|<\sqrt[3]{3}/2$, где $c_1^{(3)}$ и $c_2^{(3)}$ определяются формулами (2.β).

Для этого достаточно доказать, что минимум левой части (2.γ) на окружности $|z|=\sqrt[3]{3}/2$ положителен. Пусть этот минимум получается при $z=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}e^{i\varphi}$, т. е. пусть

$$\min_{|z|=\sqrt[3]{3}/2}\mathrm{Re}\,(1+4\,c_1^{(3)}z^3+7\,c_2^{(3)}z^6)=\mathrm{Re}\,\left(1+\frac{3}{2}\,c_1^{(3)}\,e^{3i\varphi}+\frac{63}{64}\,c_2^{(3)}\,e^{6i\varphi}\right),$$

где

$$\frac{3}{2}\,c_1^{(3)}\,e^{3i\varphi}=-\int_0^\infty k(\tau)\,e^{3i\varphi}\,e^{-\tau}\,d\tau=\int_0^\infty k_1(\tau)e^{-\tau}\,d\tau=x_1+iy_1,$$

---

* Это неравенство позже было улучшено.

$$(2.\delta)\qquad \frac{63}{64}\ c_2^{(3)}\ e^{6i\varphi}=\frac{7}{8}\Big(\int_0^\infty k(\tau)\,e^{3i\varphi}\,e^{-\tau}\,d\tau\Big)^2-\frac{21}{32}\int_0^\infty k^2(\tau)\,e^{6i\varphi}\,e^{-2\tau}\,d\tau$$

$$=\frac{7}{8}\Big(\int_0^\infty k_1(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau\Big)^2-\frac{21}{32}\int_0^\infty k_1^2(\tau)\,e^{-2\tau}\,d\tau=x_2+iy_2$$

и

$$(2.\varepsilon)\qquad k_1(\tau)=x(\tau)+iy(\tau),\quad x^2(\tau)+y^2(\tau)=1.$$

Утверждение будет доказано, если докажем, что $1+x_1+x_2>0$. Из (2.δ) и (2.ε) находим:

$$1+x_1+x_2=1+x_1+\frac{7}{8}\,\mathrm{Re}\Big(\int_0^\infty k_1(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau\Big)^2-\frac{21}{32}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty k_1^2(\tau)\,e^{-2\tau}\,d\tau$$

$$=1+x_1+\frac{7}{8}\,(x_1^2-y_1^2)-\frac{21}{32}\int_0^\infty [x^2(\tau)-y^2(\tau)]\,e^{-2\tau}\,d\tau$$

$$=1+x_1+\frac{7}{8}\,x_1^2-\frac{7}{8}\,\Big(\mathrm{Im}\int_0^\infty k_1(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau\Big)^2-\frac{21}{32}\int_0^\infty [1-2y^2(\tau)]\,e^{-2\tau}\,d\tau$$

$$=\frac{43}{64}+x_1+\frac{7}{8}\,x_1^2-\frac{7}{8}\Big(\int_0^\infty y(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau\Big)^2+\frac{21}{16}\int_0^\infty y^2(\tau)\,e^{-2\tau}\,d\tau$$

$$>0{,}38-\frac{7}{8}\int_0^\infty y^2(\tau)\,e^{-\tau}\,d\tau+\frac{21}{16}\int_0^\infty y^2(\tau)\,e^{-2\tau}\,d\delta$$

$$=0{,}38-\int_0^\infty\Big[\frac{7}{8}\,e^{-\tau}-\frac{21}{16}\,e^{-2\tau}\Big]\,y^2(\tau)\,dt$$

$$>0{,}38-\int_{\ln 3/2}^\infty\Big(\frac{7}{8}\,e^{-\tau}-\frac{21}{16}e^{-2\tau}\Big)\,d\tau>0{,}38-\frac{7}{24}>0,$$

что требовалось доказать.

Замечание. После того, как это доказательство [14] было послано в редакцию ДАН СССР, в библиотеке Математического института Болгарской академии наук был получен № 1 (1954) Acta Mathematica Sinica, содержащий аналогичное доказательство утверждения (2.α), данное Гун Сыном [18].

О доказательстве теоремы S I. В цитированной работе [5] Сегё установил теорему S I, используя изложенный метод и неравенства (2.3). Как он сам отметил, „Эта теорема доказывается легко для $n=2$ и $n\geqq 5$, но её не так просто доказать для $n=3$ и $n=4$“.

В сущности, его методом, используя неравенство $|c_n|<en$ Дж. Литлвуда [19] для функций класса S, легко следует верность теоремы для $n\geqq 6$, а используя неравенство $|c_n|<\dfrac{n^n}{(n-1)^{n-1}}$ (см. [5]) — и для $n=5$. Доказательство Сегё для $n=2$, 3 и 4 является прямым. При этом для последних двух случаев оно слишком сложно. С помощью неравенства (1.1) и одного результата Голузина доказательство теоремы можно значительно упростить.

Для $|z_1|<1/4$, $|z_2|<1/4$, $z_1\neq z_2$ для функций класса S из (1.1) получаем именно

$$(2.25)\qquad \Big|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\Big|\geqq\frac{48}{125}.$$

Следовательно, утверждение теоремы для n-той частичной суммы функции (2.1) класса S верно, если выполнено неравенство

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\nu|c_\nu|}{4^{\nu-1}} < \frac{48}{125}. \tag{2.26}$$

Как показал Г. Голузин [20] для функций класса S выполнено неравенство $|c_n| < \frac{3}{4} en$, так что (2.26) выполнено, если

$$\frac{3}{4} e \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\nu^2}{4^{\nu-1}} < \frac{48}{125}, \tag{2.27}$$

т. е., если

$$\frac{3}{4} e \frac{9n^2+24n+20}{27 \cdot 4^{n-1}} < \frac{48}{125}. \tag{2.28}$$

Для $n=4$ неравенство (2.28) верно, следовательно, теорема доказана для $n \geqq 4$ Таким образом прямое доказательство Сегё для $n=4$, которое очень сложно, является излишним. Отметим еще, что при помощи метода Сегё нельзя внести существенного упрощения в доказательство. Действительно, исходя из неравенства (2.25), методом Сегё нельзя установить теорему для $n=3$ даже, если установить предположение Л. Бибербаха, что для функций класса S выполнено неравенство $|c_n| \leqq n$. С другой стороны, левое неравенство в (1.1) для $k=1$ — точное, так что (2.25) нельзя улучшить.

3. Используя метод Сегё, В. Левин [21] установил следующую теорему:

Теорема L. *Пусть функция*

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \cdots \tag{3.1}$$

принадлежит классу S. Частичная сумма

$$\sigma_n(z) = z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n \tag{3.2}$$

при $n \geqq 17$ является однолистной по крайней мере в круге $|z| < 1 - 6\frac{\ln n}{n}$.

С помощью неравенства (1.1), следуя путь В. Левина в [22], [14] были установлены теоремы:

Теорема 3. *Частичная сумма (3.2) функции (3.1) однолистна при $n \geqq 15$ по крайней мере в круге $|z| < 1 - 4\frac{\ln n}{n}$.*

Теорема 4. *Пусть функция*

$$f_2(z) = z + c_3 z^3 + \cdots \tag{3.3}$$

принадлежит классу S_2. Частичная сумма

$$\sigma_n^{(2)}(z) = z + c_3 z^3 + \cdots + c_{2n+1} z^{2n+1} \tag{3.4}$$

при $n \geqq 12$ однолистна по крайней мере в круге $|z| < \left(1 - 3\frac{\ln n}{n}\right)^{1/2}$

Теорема 5. *Если функция*

$$f_3(z) = z + c_1^{(3)} z^4 + \cdots \tag{3.5}$$

принадлежит классу S_3, частичная сумма

$$\sigma_n^{(3)}(z) = z + c_1^{(3)} z^4 + \cdots + c_n^{(3)} z^{3n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.6}$$

однолистна по крайней мере в круге $|z|<\{1-\frac{8}{3}\,\frac{\ln\vartheta(n+1)}{n+1}\}^{1/3}$, $\vartheta=7{,}96^{3/8}\cdot 3^{1/4}\cdot 2^{7/8}$.

Доказательство теоремы 3. При $k=1$, если $|z_1|\leqq r$, $|z_2|\leqq r$, $r<1$, $z_1\neq z_2$ для функций класса S из (1.1), получаем:

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqq\frac{1-r}{(1+r)^3}. \tag{3.7}$$

Следовательно, если для $|z_1|\leqq r_n$, $|z_2|\leqq r_n$, $z_1\neq z_2$, $r_n<1$ выполнено

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu\,\frac{z_1^\nu-z_2^\nu}{z_1-z_2}\right|<\frac{1-r_n}{(1+r_n)^3} \tag{3.8}$$

или

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|c_\nu|\,\nu r_n^{\nu-1}<\frac{1-r_n}{(1+r_n)^3}, \tag{3.9}$$

то (3.2) однолистна.

Имея в виду неравенство Дж. Литлвуда: $|c_\nu|<e\nu$, мы видим, что (3.9) выполнено, если

$$e\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^2 r_n^{\nu-1}<\frac{1-r_n}{(1+r_n)^3}. \tag{3.10}$$

Но

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^2 r_n^{\nu-1}=\frac{r_n^n}{(1-r_n)^2}\,[n^2(1-r_n)^2-(2n-1)r_n+2n+1], \tag{3.11}$$

так как, если положить $\Sigma_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^2 r^{\nu+1}=S(r)$, то

$$\int_0^{r_n}\{\frac{1}{x}\int_0^x S(t)dt\}dx=\sum_{\nu=n+1}^{\infty} r_n^\nu=\frac{r_n^{n+1}}{1-r_n}. \tag{3.12}$$

Таким образом неравенство (3.10) принимает вид

$$\frac{r_n^n}{(1-r_n)^4}\,[n^2(1-r_n)^2-(2n-1)r_n+2n+1]<\frac{1}{e(1+r_n)^3}. \tag{3.13}$$

Последнее неравенство верно, если

$$\frac{r_n^n}{(1-r_n)^4}[n^2(1-r_n)^2-(2n-1)r_n+2n+1]<1/4e. \tag{3.14}$$

Пусть $r_n=1-\frac{\alpha}{n}$, $0<\alpha<n$, так что

$$r_n=(1-\frac{\alpha}{n})^n<e^{-\alpha} \tag{3.15}$$

и

$$n^2(1-r_n)^2-(2n-1)r_n+2n+1<\alpha^2+2\alpha+2. \tag{3.16}$$

Из (3.15) и (3.16) следует, что неравенство (3.14) верно, если

$$n^4 e^{-\alpha}\frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^4}<1/4e. \tag{3.17}$$

Если $\alpha=4\ln n$, неравенство (3.17) выполнено для $n\geqq 3$. Однако, чтобы теорема была ценной, необходимо $r_n>1/4$. Последнее условие выполнено при $n\geqq 15$, чем теорема 3 установлена.

Доказательство теоремы 4. При $k=2$, $|z_1|<r$, $|z_2|<r$, $z_1\neq z_2$, $r<1$ для функции $f_2(z)$ из неравенства (1.1) находим, что

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right|\geqq\frac{1-r^2}{(1+r^2)^2}. \tag{3.18}$$

Имея в виду, что для функций класса S_2, как уже отметили, $|c_{2\nu+1}|<3{,}4$ (согласно В. Левину), то, как при доказательстве теоремы 3, устанавливаем, что частичная сумма (3.4) является однолистной функцией в круге $|z|<r_n$, если выполнено неравенстго

$$3{,}4\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(2\nu+1)\,r_n^{2\nu}<\frac{1-r_n^2}{(1+r_n^2)^2}. \tag{3.19}$$

Так как

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}(2\nu+1)\,r_n^{2\nu}=\frac{r_n^{2n+2}}{(1-r_n^2)^2}\,[(2n+3)(1-r_n^2)+2r_n^2], \tag{3.20}$$

неравенство (3.19) принимает вид

$$\frac{r_n^{2n+2}}{(1-r_n^2)^3}\,[(2n+3)(1-r_n^2)+2r_n^2]<\frac{1}{3{,}4\,(1+r_n^2)^2}. \tag{3.21}$$

Последнее неравенство верно, если

$$\frac{r_n^{2n+2}}{(1-r_n^2)^3}\,[(2n+3)(1-r_n^2)+2r_n^2]<\frac{1}{4\,.\,3,\,4}. \tag{3.22}$$

Пусть $r_n^2=1-\frac{\alpha}{n}$, $0<\alpha<n$ так, что

$$r_n^{2n+2}=\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n+1}<\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}<e^{-\alpha} \tag{3.23}$$

и

$$(2n+3)(1-r_n^2)+2r_n^2=2\alpha+2+\frac{\alpha}{n}<2\alpha+3. \tag{3.24}$$

Неравенство (3.22) принимает вид

$$n^3e^{-\alpha}(2\alpha+3)/\alpha^3<1/4\,.\,3{,}4. \tag{3.25}$$

Если $\alpha=3\ln n$, это неравенство верно при $n\geqq 8$, так что функция (3.4) при $n\geqq 8$ является однолистной в круге $|z|<r_n=\left(1-\frac{3\ln n}{n}\right)^{1/2}$. Имея в виду теорему 1, последний результат является ценным только в случае, когда $r_n=\left(1-\frac{3\ln n}{n}\right)^{1/2}>\frac{1}{\sqrt{3}}$. Последнее неравенство верно при $n\geqq 12$; этим теорема доказана.

Доказательство теоремы 5. Методом Левина утверждение теоремы устанавливается аналогичным образом с помощью неравенства (1.1) при $k=3$ и (2.21).

4. Применение теоремы I позволяет установить, сохраняя введенные обозначения, также следующие результаты [23]:

Теорема 6. *Если функция $f_1(z) \in S_1$, многочлен*

$$\sigma_n^{(1)}(z)/z = 1 + c_2 z + \cdots + c_n z^n \tag{4.1}$$

при $n \geqq 1$ *не обращается в нуль в круге* $|z| < 1 - 2\frac{\ln 3n}{n}$, *а при* $n \geqq 55$ — *в круге* $|z| < 1 - 2\frac{\ln n}{n}$. *Вообще для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует число* N, *такое, что* (4.1) *не обращается в нуль в круге* $|z| < 1 - 2\frac{\ln \varepsilon n}{n}$ *при* $n \geqq N$.

Теорема 7. *Если функция $f_2(z) \in S$, многочлен*

$$\sigma_n^{(2)}(z)/z = 1 + c_2 z^2 + \cdots + c_{2n+1} z^{2n} \tag{4.2}$$

при $n \geqq 1$ *не обращается в нуль в круге* $|z| < \left(1 - \frac{\ln 4{,}3\, n}{n}\right)^{1/2}$. *При каждом* $\varepsilon > 0$ *существует число* N, *такое, что* (4.2) при $n \geqq N$ *не обращается в нуль в круге* $|z| < \left(1 - \frac{\ln \varepsilon n}{n}\right)^{1/2}$.

Теорема 8. *Если функция $f_3(z) \in S_3$, многочлен*

$$\sigma_n^{(3)}(z)/z = 1 + c_1^{(3)} z^3 + \cdots + c_n^{(3)} z^{3n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

не обращается в нуль в круге $|z| < \left\{1 - \frac{4}{3}\,\frac{\ln \vartheta(n+1)}{n+1}\right\}^{1/6}$, *где* $\vartheta = 7{,}96^{3/2} \cdot 3^{3/4} \cdot 2^{1/2}$.

Доказательство. Положим

$$f_1(z) = \sigma_n^{(1)}(z) + p_n^{(1)}(z). \tag{4.4}$$

Согласно теореме Бибербаха, если $|z| \leqq r < 1$, то

$$\left|\frac{f_1(z)}{z}\right| \geqq \frac{1}{(1+r)^2}. \tag{4.5}$$

Следовательно, если для $|z| \leqq r_n < 1$ выполнено неравенство

$$\left|\frac{p_n^{(1)}(z)}{z}\right| < \frac{1}{(1+r_n)^2}, \tag{4.6}$$

т. е,

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu z^{\nu-1}\right| < \frac{1}{(1+r_n)^2}, \tag{4.7}$$

то $\sigma_n^{(1)}(z)/z$ не может обратиться в нуль в круге $|z| < r_n$.

Неравенство (4.7) выполнено, если

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |c_\nu| r_n^{\nu-1} < \frac{1}{(1+r_n)^2}. \tag{4.8}$$

Согласно результату Голузина $|c_\nu| < \frac{3}{4} e$, $\nu = 2, 3, \ldots$, так что (4.8) выполнено, если

$$\frac{3}{4} e \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu r_n^{\nu-1} < \frac{1}{(1+r_n)^2} \tag{4.9}$$

или, если

$$3e \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu r_n^{\nu-1} < 1. \tag{4.10}$$

Из тождества $\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} r^{\nu}=\frac{r^{n+1}}{1-r}$ при $0<r<1$ получаем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu r^{\nu-1}=r^n \frac{(n+1)(1-r)+r}{(1-r)^2}. \tag{4.11}$$

Согласно (4.11) неравенство (4.10) принимает вид:

$$3er_n^n \frac{(n+1)(1-r_n)+r_n}{(1-r_n)^2}<1. \tag{4.12}$$

Если $r_n=1-\frac{\alpha}{n}$, $0<\alpha<n$, то $r_n^n=\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n<e^{-\alpha}$ и $(n+1)(1-r_n)+r_n=\alpha+1$. Тогда неравенство (4.12) выполнено, если

$$3en^2e^{-\alpha}\frac{\alpha+1}{\alpha^2}<1. \tag{4.13}$$

Если $\alpha=2\ln 3n$, т. е. $r_n=1-2\frac{\ln 3n}{n}$, то (4.13) выполнено при $n\geqq 1$; если $\alpha=2\ln n$ — при $n\geqq 55$. Вообще при любом $\varepsilon>0$, имеется число N, такое что (4.13) выполнено, если $\alpha=2\ln\varepsilon n$ и $n\geqq N$.

Теорема 7 доказывается тем же методом, имея в виду, что если $f_2(z)\in S_2$, то $|f_2(z)/z|\geqq 1/(1+r^2)$ и, что согласно результату В. Левина: $|c_{2\nu+1}|<3, 4$, $\nu=1, 2, \ldots$.

Аналогично при $f_3(z)\in S_3$, $f_3(z)=\sigma_n^{(3)}(z)+p_n^{(3)}(z)$, если для $|z|\leqq r_n<1$ верно неравенство $|p_n^{(3)}(z)/z|<1/(1+r_n^3)^{2/3}$, то многочлен $\sigma_n^{(3)}(z)/z$ не обращается в нуль в круге $|z|\leqq r_n$.

Это неравенство выполнено, если

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|c_\nu^{(3)}|\,r_n^{3\nu}<1/(1+r_n^3)^{2/3}. \tag{4.14}$$

Так как, согласно результату К. Джо, для каждого целого $\nu>1$ существует неравенство $(3\nu+1)^{1/3}|c_{3\nu+1}|<7{,}96$, то (4.14) выполнено, если

$$7{,}96\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{r_n^{3\nu}}{(3\nu+1)^{1/3}}<\frac{1}{2^{2/3}}. \tag{4.15}$$

Имея в виду (2.20), последнее неравенство будет верным при $n\geqq 1$, если

$$\frac{r_n^{3n+3}}{(3n+1)^{1/3}}\;\frac{[(3n+4)(1-r_n^6)+3r_n^6]^{1/2}}{1-r_n^6}<\frac{1}{7{,}96\,.\,2^{1/6}}. \tag{4.16}$$

Положим $r_n^6=1-\frac{\alpha}{n+1}$, $0<\alpha<n$, так что

$$r_n^{3n+3}=\left(1-\frac{\alpha}{n+1}\right)^{(n+1)/2}<e^{-\alpha/2} \tag{4.17}$$

и

$$(3n+4)(1-r_n^6+3r_n^6<3\alpha+3. \tag{4.18}$$

Неравенство (4.16) выполнено, если для $n\geqq 1$:

$$e^{-\alpha/2}\,\frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha}\,(n+1)^{2/3}\leqq\frac{2^{1/6}}{7{,}96\,.\,3^{1/2}}. \tag{4.19}$$

Последнее неравенство выполнено, если $\alpha=\frac{4}{3}\ln\vartheta(n+1)$, где $\vartheta=7{,}96^{3/2}\cdot 3^{3/4}\cdot 2^{1/3}$.

5. Пусть функция

$$f_k(z)=z+c_1^{(k)}z^{k+1}+\cdots \tag{5.1}$$

принадлежит классу S_k, $k=1, 2, \ldots$ В этом случае функция

$$\begin{aligned} f_1(\zeta)=f_1(z^k)=[f_k(z)]^k=(z+c_1^{(k)}z^{k+1}+\cdots)^k \\ =z^k+kc_1^{(k)}z^{2k}+\cdots=\zeta+kc_1^{(k)}\zeta^2+\cdots \end{aligned} \tag{5.2}$$

принадлежит классу S_1. Но тогда функция

$$F(\zeta)=\sqrt{f_1(\zeta^2)}=\zeta+\frac{k}{2}c_1^{(k)}\zeta^3+\cdots \tag{5.3}$$

однолистна и голоморфна в $|\zeta|<1$, а функция

$$\Phi(\zeta)=1/F(1/\zeta) \tag{5.4}$$

однолистна и голоморфна в области $|\zeta|>1$ за исключением простого полюса в несобственной точке и имеет разложение Лорана, начинающееся так

$$\zeta-\frac{k}{2}\,\frac{c_1^{(k)}}{\zeta}+\cdots \tag{5.5}$$

Имея в виду теорему площадей (Flächensatz) (см. [2], с. 72, 73), находим, что

$$|c_1^{(k)}|\leqq 2/k. \tag{5.6}$$

Неравенство (5.6) — точное для каждого k. Действительно, для класса S_k знак равенства достигается функцией

$$z/(1-z^k)^{1/k}. \tag{5.7}$$

Теперь установим, что частная сумма $\sigma_1^{(k)}(z)$, $k=1, 2, \ldots$, является однолистной в области $|z|<\rho_k$, $k=1, 2, \ldots$, где

$$\rho_k=\left[\frac{k}{2(k+1)}\right]^{1/k}. \tag{5.8}$$

Константа ρ_k — точная и достигается опять-таки для частичной суммы функции (5.7).

Действительно, если для $|z_1|<\rho_k$ и $|z_2|<\rho_k$, $z_1\neq z_2$, имеем равенство

$$z+c_1^{(k)}z_1^{k+1}=z_2+c_2^{(k)}z_2^{k+1}, \tag{5.9}$$

то, учитывая (5.6), получаем абсурдное неравенство

$$1=|c_1^{(k)}|\left|\frac{z_1^{k+1}-z_2^{k+1}}{z_1-z_2}\right|<(k+1)|c_1^{(k)}|\rho_k^k\leq\frac{2(k+1)}{k}\rho_k^k=1, \tag{5.10}$$

чем утверждение установлено.

З а м е ч а н и е. Согласно теореме S I, теореме 1 и теореме 2, константы ρ_1, ρ_2, и ρ_3 являются наибольшими значениями радиусов круговых областей относительно начала, в которых все частичные суммы функций, принадлежащие соответственно классам S_1, S_2 и S_3, — однолистны. Естественно задать вопрос, обладает ли постоян ная ρ_k, при любом значении k, тем же свойством? Учитывая, что одно предположение Сегё о некоторой ограниченности коэффициентов функций, принадлежащих классу S_k (см. следующий пункт), оказалось в общем случае при $k>3$ неверным, то невероятно чтобы возможное предположение, что частичные суммы функций класса S_k — однолистны в круге $|z|<\rho_k$, оказалось бы верным при $k>3$.

6. Г. Сегё предположил, что для функций

$$f_k(z)=z+c_1^{(k)}z^{k+1}+\cdots \tag{6.1}$$

класса S_k, $k=1, 2, \ldots$, имеет место

$$|c_n^{(k)}|=O(n^{-1+2/k}). \tag{6.2}$$

Поводом для этого предположения явился факт, что при $k=1$ выполнено неравенство Литлвуда:

$$|c_{n-1}^{(1)}|=|c_n|\leqq en, \tag{6.3}$$

а при $k=2$ Дж. Литлвуд и Р. Е. А. К. Пэли первыми установили [24] (см также Е. Ландау [25]), что

$$|c_n^2|=O(1). \tag{6.4}$$

В. Левин [26] доказал верность предположения при $k=3$. И наоборот, как показал Дж. Литлвуд [27], последнее неверно при $k>3$, даже если $f_k(z)$ ограничена в единичном круге.

Следовательно, мы можем утверждать, что существуют три положительные постоянные A_1, A_2, A_3, независящие от n, для которых при каждом n выполнено неравенство

$$|c_n^{(k)}|\leqq A_k n^{\frac{2}{k}-1}. \tag{6.5}$$

Одновременно мы обозначаем через A_1, A_2, A_3 наименьшие такие постоянные.

Из неравенства Литлвуда следует, что $A_1<e$; в силу уже использованного неравенства Г. М. Голузина: $A_1<\frac{3}{4}n$. Предположением Бибербаха является $A_1=1$.

В. Левин [15] установил использованное уже нами неравенство

$$A_2<2^{1/4}\,.\,3^{1/2}\,.\,e^{3/2}<3{,}39<3{,}4. \tag{6.6}$$

К. К. Чен [28] первым показал, что

$$A_3<12{,}1\,.\,e^{1/3}=16{,}89\ldots, \tag{6.7}$$

а К. Джо [10] нашел, что

$$A_3<7{,}96. \tag{6.8}$$

Указанные оценки сверху для A_1, A_2 и A_3 уточнены, но точные значения A_1, A_2 и A_3 не найдены.

Таким образом проблема (предположение) Бибербаха о коэффициентах однолистных функций расширяется следующим образом: каковы точные значения A_1, A_2, A_3?

Вместе с тем остается открытой проблема Сегё: определить порядок $|c_n^{(k)}|$ при $k>3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Koebe, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1907, 197—200.
2. L. Bieberbach. Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, zweite Auflage, Leipzig und Berlin, 1931.
3. Г. М. Голузин. *Математический сборник*. **19** (61), 1946, 183—201.
4. Л. Илиев. *Доклады АН СССР*, **69**, № 4, 1949, 491—494.
5. G. Szegö. *Math. Annalen*, **100**, 1928, 188—201.
6. S. Takahachi. *Proc. Phys. math. Soc. of Japan*, 3 Series, **16**, 1934, 7—15.
7. K. Joh. *Proc. Imperial Academy, Tokyo*, XI, 1935, 407—409.
8. Jahrbuch über die Fortschritte der Matematik, 61 II, 1935, 1154.
9. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, 63 II, 1937, 980—981.
10. K. Joh. *Proc. of the Phys. math. Soc. of Japan*, 3 Ser., **19**, 1937, 1—12.
11. K. Joh. *Proc. Phys. math. Soc. Japan*, 3 Ser., **21**, 1939, 191—208.
12. L. Iliev. *Comptes Rendus Acad. Bulg. Sci.*, **2**, № 1, 1949, 21—24.
13. Л. Илиев. *Доклады АН СССР*, **84**, № 1, 1952, 9—12.
14. Л. Илиев. *Доклады АН СССР*, **100**, № 4, 1955, 621—622.
15. V. Levin. *Proc. London Math. Soc.*, 39, 1935, 467—480.
16. M. Feketé, and G. Szegö. *J. London Math. Soc.*, **8**, 1933, 85—89.
17. K. Löwner. *Math. Annalen*, **89**, 1923, 103—121.
18. K. Sun. *Acta Mathematica Sinica*, **4**, 1954, 105—112.
19. J. E. Littlewood. *Proc. London math. Soc.*, **23**, 1925, 481—519.
20. Г. М. Голузин. *Математический сборник*, **22** (64), 1943, 373—379.
21. V. Levin. *Jahresbericht der Deutschen Matematiker Vereinigung*, **42**, 1939, 68—70.
22. Л. Илиев. *Доклады АН СССР*, 70, № 1, 1950, 9—11.
23. L. Iliev. *Acta Mathematica Academiae Sci. Hungaricae*, **2.**, Fasc. 1—2, 1951, 109—111.
24. J. E. Littlewood, and R. E. A. C. Paley. *J. London math. Soc.*, 7, 1932, 167—169.
25. E. Landau. *Math. Z.*, **37**, 1933, 33—35.
26. V. Levin. *Math. Z.*, **38**, 1933, 306—311.
27. J. E. Littlewood. *Quart. J. Math. (Oxford Ser.)* **9**, 1938, 14—20.
28. K. K. Chen. *Tohoku Math. J.*, **40**, 1935, 160—174.

Единый центр митематики и механики
1090 София *П. Я. 373*

Поступила 19. 9. 1986