Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

UN THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE QUADRIQUES

LANDO DEGOLI

On démontre une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire irréductible de quadriques de S_r soit à Jacobienne de caractéristique r-k.

Dans l'espace linéaire complexe S_r de coordonnées projectives homogènes x_i $(i=0, 1, \ldots, r)$ choisissons $d+1$ quadriques linéairement indépendantes: $f_0=0$, $f_1=0, \ldots, f_d=0$ avec: $f_q=\Sigma^r_{i,\,k=0} a^{ik}_q x_i x_k$.

Le système linéaire $L_{d/m}$ de dimension d et Jacobienne de caractéristique m est exprimé par l'équation: $\Sigma^d_{q=0}\lambda_q f_q=0$,

Supposons que la matrice Jacobienne à $r+1$ lignes et $d+1$ colonnes:

$$J=\left\| \frac{\partial f_q}{\partial x_i} \right\| \quad \begin{pmatrix} q=0,\ 1,\ \ldots,\ d \\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ r \end{pmatrix}$$

soit à caractéristique $m\leqq d$.

Souvent si $m\leqq r$ nous mettons $m=r-k$ et le système sera indiqué avec: $L_{d/r-k}$.

Si la matrice Jacobienne est identiquement nulle, cela signifie que tout l'espace est donc le lieu des points conjugués par rapport à toutes les quadriques du système. Si la caractéristique de la Jacobienne est $r-k$, un point générique P est conjugué avec un S_k.

Le problème de déterminer les systèmes linéaires de quadriques $L_{d/r-k}$ est assez complexe parce que les systèmes subordonnés de $L_{d/r-k}$ sont de diverse nature.

Pour réussir à donner une réponse définitive à cette ancienne question nous avons subdivisé les systèmes en réductibles et irréductibles et ces derniers — en irréductibles de première et de seconde espèce.

Nous dirons qu'un système de quadriques $L_{d/m}$ est réductible, quand il existe des systèmes subordonnés sans quadriques en commun: $L_{d_1/m_1}, L_{d_2/m_2}, \ldots, L_{d_s/m_s}$ et éventuellement $p(p\geqq 0)$ quadriques fonctionnellement indépendantes, de manière que soient satisfaites les égalités: $d=d_1+d_2+\cdots+d_s+s+p-1$, $m=m_1+m_2+\cdots+m_s+p$.

Autrement dit, il sera nommé irréductible.

Un système irréductible $L_{d/m}$ possède toujours des systèmes subordonnés "banaux" $L_{h/n}$ avec: $m-1\leqq h\leqq d-1$, $n=m$.

Mais on ne dit pas que $L_{d/m}$ possède toujours les systèmes subordonnés "essentiels" $L_{g/c}$ avec: $2\leqq g\leqq d-1$, $2\leqq c\leqq m-1$, $c<g$.

Quand ces derniers systèmes existent, ils imposent à $c+1$ quadriques linéairement indépendantes, choisies dans $L_{g/c}$, d'être fonctionnellement dépendantes.

Nous dirons systèmes irréductibles de première espèce les systèmes qui ne possèdent pas de systèmes subordonnés essentiels, et systèmes irréductibles de seconde espèce les systèmes qui, n'etant pas réductibles, possèdent toutefois des systèmes subordonnés essentiels.

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 13, 1987, p. 84—91.

Dans ce cas ils ne peuvent pas évidemment exister, dans eux, des quadriques fonctionnellement indépendantes, ni des systèmes subordonnés essentiels isolés qui n'ont pas des quadriques en commun avec les autres, autrement dit, le système serait réductible.

Soient $L_{d_1}, L_{d_2}, \ldots, L_{d_s}$ les systèmes essentiels contenus dans $L_{d/m}$. Ils devront former une chaîne, c'est-à-dire:

1°) aucun d'eux n'est réductible,

2°) L_{d_1} a au moins une quadrique en commun avec une autre, par exemple L_{d_2}, et leur système-union L_a a au moins une quadrique en commun avec un troisième, par exemple L_{d_3}, et le système-union de L_a avec L_{d_3} a au moins une quadrique en commun avec un quatrième système et toujours ainsi jusqu'à épuiser tout $L_{d/m}$. Dans L_d il pourrait exister plus qu'une chaîne.

Il existe le Lemme: *Si le système L_d possède les systèmes subordonnés: $L_{d_1}, L_{d_2}, \ldots, L_{d_s}$, qui forment une chaîne, il est toujours possible de choisir parmi les quadriques de ces systèmes, qui passent par un point générique P de S_r, d quadriques linéairement indépendantes de manière d'individualiser le système L_{d-1} de quadriques de L_d, qui passent par P.*

Nous pouvons écrire les équations de L_{d_1} et L_{d_2} ainsi:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\cdots+\lambda_h f_h+\cdots+\lambda_{d_1} f_{d_1}=0,\\ &\mu_0 g_0+\mu_1 g_1+\cdots+\mu_h g_h+\cdots+\mu_{d_2} g_{d_2}=0. \end{aligned}$$

L'équation du système-union L_a résulte:

$$(2)\qquad \nu_0 f_0+\nu_1 f_1+\cdots+\nu_h f_h+\cdots+\nu_{d_1} f_{d_1}+\omega_0 g_0+\omega_1 g_1+\cdots+\omega_h g_h+\cdots+\omega_{d_2} g_{d_2}=0$$

Puisque L_{d_1} et L_{d_2} ont en commun au moins une quadrique nous pouvons supposer que f_h coïncide avec g_h.

Soit P un point de S_r.

Notons avec: $f_0(P), f_1(P), \ldots, g_0(P), g_1(P), \ldots$ les valeurs des quadriques en P. En remplaçant les coordonnées de P dans (1) on peut trouver les valeurs de λ_h et μ_h en fonction des λ_i et μ_i restants, après quoi les deux systèmes deviennent:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\lambda_0\Big(f_0+\frac{f_0(P)}{f_h(P)}f_h\Big)+\lambda_1\Big(f_1+\frac{f_1(P)}{f_h(P)}f_h\Big)+\cdots+\lambda_{d_1}\Big(f_{d_1}+\frac{f_{d_1}(P)}{f_h(P)}f_h\Big)=0,\\ &\mu_0\Big(g_0+\frac{g_0(P)}{f_h(P)}f_h\Big)+\mu_1\Big(g_1+\frac{g_1(P)}{f_h(P)}f_h\Big)+\cdots+\mu_{d_2}\Big(g_{d_2}+\frac{g_{d_2}(P)}{f_h(P)}f_h\Big)=0 \end{aligned}$$

Ces systèmes manquent par rapport aux premiers de paramètres λ_h et μ_h. Il résulte les systèmes L_{d_1-1}, L_{d_2-1} de quadriques de L_{d_1} et L_{d_2} qui passent par P. En opérant de même façon dans le système (2) et en éliminant le paramètre $(\nu_h+\omega_h)$ on obtient:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\nu_0\Big(f_0+\frac{f_0(P)}{f_h(P)}f_h\Big)+\nu_1\Big(f_1+\frac{f_1(P)}{f_h(P)}f_h\Big)+\cdots+\nu_{d_1}\Big(f_{d_1}+\frac{f_{d_1}(P)}{f_h(P)}f_h\Big)\\ &+\omega_0\Big(g_0+\frac{g_0(P)}{f_h(P)}f_h\Big)+\omega_1\Big(g_1+\frac{g_1(P)}{f_h(P)}f_h\Big)+\cdots+\omega_{d_2}\Big(g_{d_2}+\frac{g_{d_2}(P)}{f_h(P)}f_h\Big)=0. \end{aligned}$$

Puisque le système linéaire (4) est individualisé par les mêmes quadriques linéairement indépendantes des systèmes (3), il en résulte que le système L_{d-1} des quadriques de L_d. qui passent par P, est individualisé par a quadriques linéairement indépendantes de L_{d_1-1} et de L_{d_2-1}.

Mais par hypothèse, les systèmes subordonnés de L_a forment une chaîne. Donc le système-union L_a possède en commun avec L_{d_3} au moins une quadrique.

En opérant de même façon on prouvera que le système L_{b-1} de quadriques de L_b, système-union de L_a avec L_{d_3}, qui passent par P, est individualisé par b quadriques linéairement indépendantes de L_{a-1} et de L_{d_3-1}, c'est-à-dire de L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, L_{d_3-1}.

En continuant de cette manière le lemme résulte démontré.

Maintenant nous pouvons démontrer le

Théorème: *Une condition nécessaire et suffisante pour que le système linéaire irréductible de quadriques L_d soit à Jacobienne de caractéristique $r-k (k \geqq 0)$ est que les quadriques du système, qui passent par un point quelconque de S_r, possèdent en commun un S_{k+1}.*

Démonstration. Démontrons avant tout la suffisance.

Si toutes les quadriques d'un système linéaire L_d de S_r, qui passent par un point générique P, ont en commun un S_{k+1}, il est évident que le point P a pour conjugué le même S_{k+1} par rapport à toutes les quadriques du système L_{d-1} qui passent par P. Une autre quadrique de L_d, qui ne passe pas par P, ne contient pas S_{k+1}, lequel n'est pas contenu dans l'hyperplan polaire de P par rapport à cette quadrique. Autrement dit, P serait contenu dans la quadrique.

Donc, l'hyperplan coupera S_{k+1} dans un S_k et pour cela le point P a pour conjugué un S_k par rapport à toutes les quadriques du système L_d. Cela signifie que la Jacobienne a caractéristique $r-k$, comme il fallait démontrer.

Démontrons maintenant la nécessité.

1°) Formons l'hypothèse que le système soit irréductible de première espèce et supposons qu'il soit $r \leqq d$.

Considérons avant tout le cas particulier $k=0$ et démontrons que:

Si le système L_d est à Jacobienne de caractéristique r, les quadriques du système, qui passent par un point, ont en commun une droite.

Si la Jacobienne est de caractéristique r, cela signifie que tous les déterminants de la Jacobienne d'ordre $r+1$ sont identiquement nuls.

Considérons le déterminant individualisé par $r+1$ quadriques quelconques. Nous pouvons choisir les premières $r+1$ quadriques du système et on aura:

$$D \doteq \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \right| \quad \begin{pmatrix} i=0, 1, \ldots, r \\ s=0, 1, \ldots, r \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Les mineurs d'ordre r, extraits d'une matrice quelconque, constituée par r colonnes du déterminant D, ne sont pas tous nuls, autrement dit, il existerait dans $L_{d/r}$ le système subordonné essentiel $L_{r-1/r-1}$, contre l'hypothèse que L_d soit irréductible de première espèce.

Il est donc nécessaire qu'au moins un de ces mineurs soit $\neq 0$. Nous pouvons supposer qu'il soit le mineur obtenu en éliminant la dernière ligne et la dernière colonne de D. Nous l'indiquerons par A_r.

Prenons en considération la matrice extraite de D, constituée avec les premières r lignes, et indiquons par: $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}$ les mineurs d'ordre r qu'on obtient en remplaçant à la première, à la seconde, etc. colonne de A_r la dernière colonne de la matrice.

Un seul de ces déterminants tout au plus est nul parce que si deux déterminants étaient nuls, par un théorème de Kronecker [1] ils seraient tous nuls, compris A_r, ce qui est impossible.

Puisque le déterminant D est identiquement nul, le $r+1$ quadriques sont fonctionnellement dépendantes. On aura, en choisissant une quadrique générique, par exemple f_r:

$$f_r = F(f_0, f_1, \ldots, f_{r-1}). \tag{6}$$

Cette relation est exacte pour tous les groupes de $r+1$ quadriques, choisies entre L_d, mais il n'est pas possible que des quadriques en nombre $<r+1$ soient fonctionnellement dépendantes entre elles, autrement dit, il existerait dans L_d des systèmes subordonnés essentiels contre l'hypothèse.

Pour cela, une égalité analogue à (6) est impossible si le nombre des quadriques est $<r+1$.

En dérivant (6), on obtient:

$$\sum_{i=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_r}{\partial x_k} \quad (k=0, 1, \ldots, r-1) \tag{7}$$

qui est un système algébrique de premier dégré, et qui donne les dérivées partielles de F:

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} = -\frac{A_i}{A_r} \quad (i=0, 1, \ldots, r-1). \tag{8}$$

Considérons un point x de S_r de coordonnées $x_0, x_1, \ldots, x_r$ et soit $x'(x_0', x_1', \ldots x_r')$ son conjugué par rapport à toutes les quadriques du système. La droite qui joint les deux points sera donnée par:

$$y_i = t_1 x_i + t_2 x_i \quad (i=0, 1, \ldots, r). \tag{9}$$

En remplaçant (9) dans toutes les quadriques on obtient pour la quadrique générique f_m:

$$f_m(y) = f_m(x)\, t_1^2 + f_m(x')\, t_2^2 \quad (m=0, 1, \ldots, r) \tag{10}$$

parce que les termes $2a_m^{ik} x_i x_k'$ sont nuls, étant conjugués les points x et x'.

En remplaçant (10) dans (6) et aussitôt en dérivant par rapport à t_1 et t_2 on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_r}{\partial t_1} &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} \frac{\partial f_s}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f_r}{\partial t_2} &= \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} \frac{\partial f_s}{\partial t_2}. \end{aligned} \tag{11}$$

En dérivant (10) on a: $\partial f_m/\partial t_1 = 2t_1 f_m(x)$, $\partial f_n/\partial t_2 = 2t_2 f_m(x')$ $(m=0, 1, \ldots, r)$.

En remplaçant dans (11)

$$f_r(x) = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} f_s(x) \qquad f_r(x') = \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\partial F}{\partial f_s} f_s(x')$$

et enfin pour (8):

$$\sum_{i=0}^{r} A_i f_i(x) = 0 \qquad \sum_{i=0}^{r} A_i f_i(x') = 0. \tag{12}$$

Ces expressions sont des identités par rapport à t_i et t_2. Parce que ces deux identités coexistent il faut qu'il soit: $f_m(x) = c f_m(x')$ $(m=0, 1, \ldots, r)$ avec c constante pas nulle.

En effet dans (12) les variables t_1 et t_2 se trouvent seulement dans les déterminants $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}, A_r$, qui résultent fonctions homogènes du même dégré en t_1 et t_2 et un seul d'entre eux est au maximum nul.

Au rapport t_1/t_2 on peut donner d'infinies valeurs diverses et par conséquent on peut obtenir deux systèmes algébriques de premier degré, aux r équations et r inconnues. Ces dernières sont respectivement les quotients de $f_k(x)$, $f_k(x')$ par rapport à une quelconque d'entre elles, par exemple $f_r(x)$ et $f_r(x')$.

Il s'agit des rapports:

(13) $$f_k(x)/f_r(x), \quad f_k(x')/f_r(x') \quad (k=0, 1, \ldots, r-1).$$

Puisque les deux systèmes ont les mêmes coefficients constants $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1} A_r$, la solution des deux systèmes est la même.

Il en résulte:

(14) $$\frac{f_k(x)}{f_r(x)} = \frac{f_k(x')}{f_r(x')} \quad (k=0, 1, \ldots, r-1).$$

Mais cette égalité est vérifiée seulement si:

(15) $$f_m(x) = cf_m(x') \quad (m=0, 1, \ldots, r).$$

A vrai dire, dans les cas où un des $A_i (i=0, 1, \ldots, r)$, par exemple $A_j (0 \leq j < r)$ était nul il ne serait pas possible pour la seule quadrique f_j de déduire que:

$$f_j(x) = cf_j(x').$$

Mais considérons en ce cas toutes les r quadriques dont les dérivées partielles paraissent en A_j et la matrice formée avec les colonnes du déterminant D dans lesbuelles paraissent ces quadriques.

Nous savons qu'au moins un déterminant de cette matrice n'est pas nul. Notons ce dernier avec A'_j et répétons la démonstration en remplaçant A_r avec A'_j. Nous obtenons ainsi les déterminants $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{r-1}, A'_r = A'$ et nous parvenons à des conclusions analogues, c'est-à-dire aux formules:

(16) $$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r} A'_i f_i(x) &= 0, \\ \sum_{i=0}^{r} A'_i f_i(x') &= 0. \end{aligned} \qquad (i=0, 1, \ldots, r)$$

Mais cette fois la quadrique f_j satisfait à (15) parce que A'_j n'est pas nul.

De cette manière la démonstration n'a pas d'exceptions.

On en déduit que toutes les quadriques du système L_d qui passent par un point x passent aussi par son conjugué x' et réciproquement. Si x est situé sur la quadrique f_p, on aura: $f_p(x)=0$ et pour (15): $f_p(x')=0$.

Il s'ensuit: $t_1^2 f_p(x) + t_2^2 f_p(x') = 0$ et pour (10): $f_p(y)=0$ où y est le point générique de la droite xx'.

Donc, la droite en question appartient tout entière à la quadrique f_p. Il en résulte que toutes les quadriques qui passent par x contiennent la droite xx'.

Supposons maintenant que la Jacobienne du système L_d soit à caractéristique $r-k\,(k>0)$ — cela signifie qu'un point x de S_r a pour conjugué un S_k par rapport à toutes les quadriques de L_d.

Le système L_d sera entrecoupé par un générique S_{r-k}, qui passe par x, suivant un système linéaire L'_d de quadriques de S_{r-k}, qui à son tour coupera S_k dans un point x', qui résulte le conjugué de x par rapport à toutes les quadriques du système L'_d.

Nous pourrons choisir pour coordonnées de S_{r-k} les $x_0, x_1, \ldots, x_{r-k}$ en annulant toutes les autres coordonnées, c'est-à-dire en écrivant $x_{r-k+1}=x_{r-k+2}=\cdots=x_r=0$.

Les équations des quadriques $f_0, f_1, \ldots, f_r$ seront du type: $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_{r-k}, 0, 0, \ldots, 0)=0$.

Les dérivées partielles: $\partial f_i/\partial x_s$ $(i=0, 1, \ldots, d)$ pour: $x_{r-k+1}=x_{r-k+2}=\cdots=x_r=0$ seront toutes nulles. La matrice Jacobienne du système L'_d:

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_s} \right\| \quad \begin{pmatrix} i=0, 1, \ldots, d \\ s=0, 1, \ldots, r-k \end{pmatrix}$$

sera identiquement nulle.

Elle ne pourra pas avoir de caractéristique supérieure à $r-k$ parce que ses lignes ne sont qu'en nombre $r-k+1$, elle ne pourra pas avoir de caractéristique inférieure à $r-k$, sinon le point x aurait pour conjugué un S_g avec $g>0$ et non pas le seul point x'.

Il en résulte que le système L'_d de S_{r-k} a la caractéristique $r-k$. Cela porte à conclure pour la première partie du théorème que les quadriques de L'_d, qui passent par x, auront en commun la droite xx'.

Puisque nous pouvons dire la même chose pour tous les S_{r-k} qui passent par x, on en déduit que les quadriques de L_d, qui passent par x, auront en commun S_{k+1} joignant le point x avec S_k.

Toujours dans l'hypothèse que le système soit irréductible de première espèce, considérons les cas $r<d$, en soulignant la condition $r-k\leqq d$ qui jusqu'ici était superflue.

Il est évident que dans ce cas il doit être $k\geqq 1$.

Supposons avant tout $d=r-1$. Considérons le système $L_{r-1/r-k}$ avec $k\geqq 1$. Par un point générique P de S_r formons un hyperplan, qui coupe $L_{r-1/r-k}$ suivant un système L' de quadriques de S_{r-1}, qui a la même dimension $_{r-1}$ et la même caractéristique $r-k=(r-1)-(k-1)$ (voir [3]).

Puisque la dimension du système est égale à celle de l'hyperplan, selon la première partie du théorème, les quadriques de L'_{r-2}, qui passent par P, ont en commun un S_k, non-multiple. En variant l'hyperplan par P on obtient une infinité de S_k qui constituent une variété commune à toutes les quadriques du L_{r-1} donné, qui passent par P.

Cette variété ne peut pas être de dimension supérieure à k+1 et d'ordre plus grand que 1, autrement dit, son intersection avec un hyperplan par P ne serait pas un seul S_k, non plus multiple. Donc, cette variété est un S_{k+1}.

Supposons qu'on ait un système $L_{r-2/r-k}$ avec $k\geqq 2$. Par un point générique P de S_r il passe un L_{r-3} qui appartient au système donné.

Menons par P un S_{r-1} qui coupe le système donné suivant un $L'_{r-2/r-k}$ de S_{r-1} (voir: [3]).

Dans S_{r-1} par P menons un S_{r-2} qui coupe le système précédent suivant un $L''_{r-2/r-k}$.

D'apres la première partie du théorème nous pouvons déduire que les quadriques de L'', qui passent par P, ont en commun un S_{k-1}. En variant S_{r-2} dans S_{r-1} nous obtenons un S_k, commun à toutes les quadriques de L' par P; en variant S_{r-1} on obtient un S_{k+1} commun à toutes les quadriques de L_{r-3}.

En continuant avec un raisonnement analogue nous réussirons à démontrer le théorème pour un $L_{r-h/r-k}$, c'est-à-dire pour un $L_{d/r-k}$ avec $d\leq r-1$, $r-k\leq d$. En effet, l suffit de supposer $r-d=h$ et évidemment $L_{d/r-k}=L_{r-h/r-k}$.

i

II⁰) Supposons maintenant que le système L_d soit irréductible de seconde espèce $(r \gtrless d)$.

Examinons le cas particulier où les systèmes subordonnés:

$$L_{d_1/m_1}, \quad L_{d_2/m_2}, \ldots, L_{d_s/m_s} (m_i \leqq d_i),$$

contenus dans L_d, sont tous irréductibles de première espèce.

Puisque la caractéristique de la Jacobienne est $r-k \leqq d (k \geqq 0)$, parmi les $d+1$ quadriques linéairement indépendantes, qui individualisent L_d, il y en a $r-k$ fonctionnellement indépendantes.

Puisque L_{d_1/m_1} est un système irréductible de première espèce, il satisfait à la première partie du théorème. Pour cela, les quadriques de L_{d_1}, qui passent par un générique point P de S_r, ont en commun un S_{r-m_1+1}.

Elles constituent un système L_{d_1-1}.

Considérons le système L_{d-1} de quadriques de L_d qui passent par P. Les quadriques fonctionnellement indépendantes de ce système, qui n'appartiennent pas à L_{d_1-1}, sont $r-k-m_1$.

En effet soient:

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{d_1} f_{d_1} = 0 \tag{17}$$
$$\mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_{d_1} f_1 + \mu_{d_1+1} f_{d_1+1} + \cdots + \mu_d f_d = 0$$

les équations de L_{d_1} et de L_d.

Si nous imposons aux quadriques des deux systèmes de passer par P, en recherchant λ_0 et μ_0 on obtient:

$$\lambda_1 (f_1 + \frac{f_1(P)}{f_0(P)} f_0) + \lambda_2 (f_0 + \frac{f_2(P)}{f_0(P)} f_0) + \cdots + \lambda_{d_1} (f_{d_1} + \frac{f_{d_1}(P)}{f_0(P)} f_0) = 0,$$

$$\mu_1 (f_1 + \frac{f_1(P)}{f_0(P)} f_0) + \mu_2 (f_0 + \frac{f_2(P)}{f_0(P)} f_0) + \cdots + \mu_{d_1} (f_{d_1} + \frac{f_{d_1}(P)}{f_0(P)} f_0) \tag{18}$$
$$+ \mu_{d_1+1} (f_{d_1+1} + \frac{f_{d_1+1}(P)}{f_0(P)} f_0) + \cdots + \mu_d (f_d + \frac{f_d(P)}{f_0(P)} f_0) = 0.$$

Ici le nombre des quadriques fonctionnellement indépendantes de L_d, qui n'appartiennent pas à L_{d_1}, est évidemment la différence des relatives caractéristiques, c'est-à-dire: $r-k-m_1$.

Mais (17) et (18) démontrent que ce nombre reste invarié en passant à L_{d-1} et L_{d_1-1} parce que les quadriques qui individualisent L_{d_1-1} se trouvent toutes dans L_{d-1}.

Les hyperplans polaires de $r-k-m_1$ quadriques fonctionnellement indépendantes de L_{d-1}, qui n'appartiennent pas à L_{d_1-1}, passent tous par P. Ils entrecoupent S_{r-m_1+1} suivant un S_{k+1} qui résulte au moins tangente à toutes les quadriques de L_{d-1}.

Ce résultat est donc indépendant par rapport à d_1 et m_1.

Pour cela, en raisonnant analoguement sur: $L_{d_2/m_2}, L_{d_3/m_3}, \ldots, L_{d_s/m_s}$ on obtiendra les espaces: $S_{r-m_2+1}, S_{r-m_3+1}, \ldots, S_{r-m_s+1}$ qui, entrecoupés par les hyperplans polaires des restantes quadriques fonctionnellement indépendantes de L_{d-1}, donnent toujours le même S_{k+1}.

S_{k+1} résulte commun respectivement à toutes les quadriques de $L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, \ldots, L_{d_s-1}$ parce qu'il est contenu dans les: $S_{r-m_1+1}, S_{r-m_2+1}, \ldots, S_{r-m_s+1}$ précédents.

Mais puisque $L_{d_1}, L_{d_2}, \ldots, L_{d_s}$ forment dans L_d une chaîne, pour le Lemme il est toujours possible de choisir dans $L_{d_1-1}, L_{d_2-1}, \ldots, L_{d_s-1}$ d quadriques linéairement indépendantes qui individualisent L_{d-1}.

Ces d quadriques possèdent en commun l' S_{k+1} et pour cela toutes les quadriques de L_{d-1} auront en commun S_{k+1}, comme il fallait démontrer.

Le raisonnement précédent a été fait dans l'hypothèse que le système linéaire irréductible de seconde espèce possède seulement des systèmes linéaires subordonnés irréductibles de première espèce. Maintenant nous pouvons supposer que les systèmes subordonnés soient tous ou en partie de seconde espèce, en possédant ces derniers des systèmes irréductibles de première espèce.

Pour la démonstration faite rien ne change dans le raisonnement précédent et pour cela la démonstration est la même dans ce cas aussi. Ainsi continuant il est évident que rien ne change dans le raisonnement précédent quand même les systèmes subordonnés des systèmes subordonnés sont d'une espèce quelconque et que la démonstration est valable pour tous les systèmes de seconde espèce avec $r \gtreqless d$.

De cette manière le théorème résulte démontré complètement.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Kronecker. Werke I. Leipzig, 1885, p. 238.
2. G. Bonferroni. Sui sistemi lineari di quadriche la cui Jacobiana ha dimensione irregolare. *R. Acc. Sci.* Torino, **50**, 1914—15.
3. A. Terracini. Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà. *Atti R. Acc. Sci.* Torino (Nota 11), **51**, 1916, iii, 55, 1919—1920.
4. L. Muracchini. Sulle varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria. (parte II), *Riv. Mat. Univ. Parma*, **3**, 1952, 75—89.
5. S. Xambo. On projectives varieties of minimal degree. *Coll. Math.*, **32**, 1981, 149—163.
6. L. Degoli. Due nuovi teoremi sui sistemi lineari di quadriche a Jacobiana identicamente nulla. *Coll. Math.*, **33**, 1982, 125—139.
7. L. Degoli. Un théorème sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne indéterminée. *Studia Sci. Math. Hung.*, **17**, 1982, 325—330.
8. L. Degoli. Trois nouveaux théorèmes sur les systèmes linéaires de quadriques à Jacobienne identiquement nulle. *Demonstr. Math.*, **16**, 1984, 723—734.

Via Berengario 82/C
41012 CARPI (Modena)
Italy

Received 30. 7. 1985