# Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

Българско математическо списание

# СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ $PH|G|1$ С НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

МИТКО Ц. ДИМИТРОВ

Изучена однолинейная система массового обслуживания с ненадежным прибором. В систему поступает однородный поток требований. Предполагается, что прибор ненадежен и выходит из строя только во время свободного периода с интенсивностью $\lambda>0$.

Находится преобразование Лапласа периода занятости системы обслуживания и его математическое ожидание, производящая функция стационарного распределения длины очереди в момент окончания обслуживания требований, в момент окончания ремонта прибора и в произвольный момент времени, а также ее математическое ожидание.

**1. Вспомогательные результаты и постановка задачи.** В этой работе изучена однолинейная система массового обслуживания типа $PH|G|1$ с ненадежным прибором. Распределение впервые введено М. Ньюитсом (см. [5]). Хотя идея о вероятностном распределении фазового типа впервые выдвинута Ерлангом, потом несколько раз обобщалась Д. Коксом ([3]) и А. Кападия ([4]), полное развитие она нашла в цикле работ М. Ньюитса ([5, 9, 10]). $PH$-распределение можно определить следующим образом. Рассмотрим Марковский процесс с конечным числом состояний $\{1, 2, \dots, m, m+1\}$ и непрерывным временем, причем $\{1, 2, \dots, m\}$ — сообщающиеся состояния, а $m+1$ — поглощающее состояние. Инфинитезимальная матрица $Q$ рассматриваемого процесса имеет следующий вид: $Q=\begin{pmatrix} S & S_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $S$ — $m\times m$ — матрица' $S_{ii}<0$, $S_{ij}\geqq 0$ для $i\neq j$, такая, что существует $S^{-1}$ и вектор столбец $S^0$ находится из равенства $Se+S_0=0$. Здесь и далее через $l$ будем обозначать $m$-мерный вектор-столбец из единиц. Вектор начального распределения $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1})$ удовлетворяет условию $\alpha e+\alpha_{m+1}=1$, где $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. Функция распределения $F(x)$ времени до поглощения в состояние $m+1$ для рассмотренного Марковского процесса имеет следующий вид $K(x)=1-\alpha\exp(Sx)e$, $x\geqq 0$. Это и есть $PH$-распределение и оно полностью определяется парой $(\alpha, S)$. Далее мы будем предполагать, что $\alpha_{m+1}=0$, т. е. $K(0)=0$. Можно показать, что $(\alpha, S)$ можно выбрать таким образом, чтобы $Q^*=S+S^0$ ($\Sigma^0$ была неприводимой матрицей, а $S^0=S_0e'$, $\Sigma^0=\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ является квадратной матрицей размерности $m\times m$, у которой на главной диагонали находятся, соотв., $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, вне главной диагонали одни нули). Матрица $Q^*$ является инфинитезимальной матрицей $PH$-восстановительного процесса, который получается из рассмотренного выше Марковского процесса с помощью его запуска сразу после его попадания в поглощающее состояние $m+1$ с начальным распределением $\alpha$. Заметим, что распределение времен ↕ и между двумя последовательными моментами восстановления такого процесса является введенном выше $PH$ распределение.

Мы будем предполагать, что в систему массового обслуживания поступает рекуррентный поток требований с функцией распределения типа $PH$ с параметрами $(\alpha, S)$. Вызов, заставший прибор свободным, немедленно обслуживается. В противном случае вызов становится в очередь с бесконечным числом мест ожидания. Длительность обслуживания требований есть случайная величина с функцией распределения

*СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 13, 1987, с. 116—125.*

$H(x)$ и моментами $h_1$, $h_2$. Прибор во время обслуживания абсолютно надежен. Если в момент $T$ прибор заканчивает обслуживание требования и за время $t$ требования в систему не поступили, то с вероятностью $1-e^{-\lambda t}$ прибор выйдет из строя в интервале $[T, T+t]$. Длительность восстановления — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Будем предполагать, что времена обслуживания требований, длительности жизни и восстановлений прибора независимые в совокупности случайные величины. Обслуживание требований происходит в порядке *FCFS*.

Изучен период занятости и длина очереди в стационарном режиме в момент окончания ремонта прибора и обслуживания требований и в произвольный момент времени.

**2. Период занятости.** Введем следующие обозначения: $X(t)$ — длина очереди; $J(t)$ — состояние Марковкого процесса с инфинитезимальной матрицей $Q^*$; $J(t)$ — будем называть фазой входящего потока требований; $N(t)$ — число требований, поступивших в систему за время $t$; $X_n$ и $J_n$ — соответственно длина очереди требований и фаза входящего потока требований в момент $\tau_n^+$ $\{\tau_n;\ n\geqq 0\}$ — момент окончания обслуживания требования или ремонта прибора.

Заметим, что $\{X_n, J_n, \tau_{n+1}-\tau_n\}$ — процесс Марковского восстановления с множеством состояний $\{0, 1, 2, \ldots, m\}\ x\{1, 2, \ldots, m\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$\widetilde{Q}(x)=\begin{Vmatrix} \widetilde{B}_0(x), & \widetilde{B}_1(x), & \widetilde{B}_2(x), & \widetilde{B}_3(x), \ldots \\ \widetilde{A}_0(x), & \widetilde{A}_1(x), & \widetilde{A}_2(x), & \widetilde{A}_3(x), \ldots \\ 0 \quad , & \widetilde{A}_0(x), & \widetilde{A}_1(x), & \widetilde{A}_2(x), \ldots \\ \cdot \quad , & \cdot \quad , & \cdot \quad , & \cdot \quad , \end{Vmatrix},$$

где

$$\widetilde{A}_n(x)=\left\|\int_0^\infty P_{ij}(n, t)dH(t)\right\|,$$

$$\widetilde{B}_n(x)=\int_0^x\int_0^u P(0, u-v)e^{-\lambda(u-v)}S^0\Sigma^0P(n, v)dH(v)du$$

$$+\lambda\int_0^x\int_0^u P(0, u-v)e^{-\lambda(u-v)}P(n, v)\,dF(v)du;$$

$$P_{ij}(n, t)=P\{N(t)=n, \quad J(t)=j\mid J(0)=i\}, \quad P(n, t)=\|P_{ij}(n, t)\|.$$

Производящая функция $P^*(z, t)$ числа требований, поступивших в систему за время $t$, равна $\exp[(S+zS^0\Sigma^0)t]$ (см. [9]). Матрица $A=\Sigma_{n\geq 0}\widetilde{A}_n$ стохастическая, $A(z)=\Sigma_{n\geq 0}\widetilde{A}_nz^n$ — аналитическая функция при $|z|\leq 1$ и $\widetilde{A}_n=\widetilde{A}_n(\infty)$. Вектор $\pi$ — левоинвариантный вектор стохастической матрицы А, соответствующий собственному значению 1, т. е. $\pi A=\pi$, $\pi e=1$ и существует обратная матрица $(I-A+\Pi)^{-1}$, где $\Pi=e\pi$. Условием эргодичности процесса $X(t)$ является $h_1<\lambda_1$, где $\lambda_1=-\alpha Se^{-1}$.

Мы часто будем использовать функцию $G(z, s)$, являющуюся совместным преобразованием периода занятости и числа обслуженных требований за этот период для системы $PH|G|1$ с надежным прибором. Как показано в [10] с. 122 $G(z, s)$ является решением уравнения $G(z, s)=zA(G(z, s), s)$, где $A(z, s)=\Sigma_{n\geq 0}z^n\int_0^\infty e^{-sx}d\widetilde{A}_n(x)$.

Математическое ожидание числа обслуженных требований $\widetilde{\mu}$ и длины периода занятости $\mu$ находится из равенств $\widetilde{\mu}=\partial G(z, s)/\partial z\, e\,|_{\substack{z=1-\\ s=0+}}$, $\mu=-\partial G(z, s)/\partial s\,|_{\substack{z=1-\\ s=0+}}$, причем $\widetilde{\mu}=h_1^{-1}\mu=(I-G+\widetilde{G})^{-1}.\ [I-A+\widetilde{G}-\Delta(\beta^*)]^{-1}e$, где $G=G(1-, 0+)$, $gG=g$,

$$ge=1,\ \widetilde{G}=eg,\ \beta^*=(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m)=\sum_{n=0}^{\infty} n\widetilde{A}_n(\infty)e$$

$$=\lambda_1^{-1} h_1 e+\lambda_1^{-1}(I-A)S^{-1}e,\ \Delta(\beta)=\operatorname{diag}(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m).$$

Рассмотрим матрицу $\widetilde{L}(k,\ x)=\|\widetilde{L}_{ij}(k,\ x)\|$, где $\widetilde{L}_{ij}(k,\ x)$ — условные вероятности того, что при $x(0)=0$, $J(0)=i$ первый период занятости системы обслуживания не превосходит времени $x$, причем осуществилось $k$ переходов вложенной цепи Маркова и в конце периода занятости процесс $J$ находится в состоянии $j$. Поскольку прибор ненадежен, то существуют два периода занятости, начинающиеся, сотв., с ремонтом прибора и с обслуживанием поступившего требования в свободную от требований систему до момента отказа прибора. Через $L(z,\ s)$ обозначим

$$L(z,s)=\sum_{k=1}^{\infty} z^k \int_0^{\infty} e^{-sx} d\widetilde{L}(k,\ x).$$

Т е о р е м а 1. *Если* $h_1<\lambda_1$, *то*

$$L(z,\ s)=(\lambda I-S)^{-1}S^0\Sigma^0 G(z,\ s)+\lambda z(\lambda I-S)^{-1}\int_0^{\infty} e^{-st}\exp\{[S+S^0\Sigma^0 G(z,s)]\,t\}dF(t)$$

(1) $$\widetilde{\mu}_1=\left.\frac{\partial L(z,\ s)}{\partial z}\right|_{\substack{z=1-\\ s=0+}} e=(\lambda I-S)^{-1}S^0\Sigma^0\mu+\lambda(\lambda I-S)e^{-1}$$

$$+\lambda\{f_1\widetilde{C}-\frac{1}{r^*}[\int_0^{\infty}\exp(Ct)dF(t)-I]\}(\widetilde{C}-\frac{1}{r^*}C)^{-1}S^0\Sigma^0\widetilde{\mu}$$

(2) $$\mu_1=-\left.\frac{\partial L(z,\ s)}{\partial s}\right|_{\substack{z=1-\\ s=0+}} e=(\lambda I-S)^{-1}S^0\Sigma^0\mu+\lambda f_1(\lambda I-S)^{-1}e$$

$$+\lambda(\lambda I-S)^{-1}\{\widetilde{C}f_1-\frac{1}{r^*}[\int_0^{\infty}\exp(Ct)\,dF(t)-I]\}(\widetilde{C}-\frac{C}{r^*})^{-1}S^0\Sigma^0\mu,$$

$$C=S+S^0\Sigma^0 G,\ cC=0,\ ce=1,\ \widetilde{C}=ec,\ f_1=\int_0^{\infty} x dF(x),\ \gamma^*\geq\max_{1\leq i\leq m}(-c_{ii})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Теорему докажем с помощью вероятностного толкования преобразования Лапласа и производящей функции. Каждое требование и ремонт прибора будем называть „красным" с вероятностью $z$, $0<z<1$. В силу сделанных предложений о цепи $(X_n,\ J_n)\, n\geq 1$ ее переходы происходят в моментах окончания обслуживания требований или ремонта прибора. Поэтому можно назвать переход цепи $(X_n,\ J_n)$ красным с вероятностью $z$, $0<z<1$. Событие, заключающееся в том, что во время первого периода занятости не наступит „катастрофа" и происходят только „красные" переходы, наступит двумя несовместимыми способами:

а) в момент поступления требования в свободную систему прибор исправен, и за время последующего периода занятости обслужатся только „красные" требования и не наступит „катастрофа". Матрица условных вероятностей этого события, учитывающая тот факт, что в нулевой момент $X(0)=0$ и $J(0)=i$ и в момент окончания периода занятости $J=j$ имеет следующий вид:

$$\int_0^{\infty}\exp(Su)S^0\Sigma^0 du G(z,\ s).$$

б) прибор выходит из строя, и за время занятости, связанное с поступившими требованиями во время ремонта прибора (порядок обслуживания требований не меняет период занятости, поэтому можно предположить инверсионный порядок обслуживания), катастрофы не наступит и обслужатся только красные требования. Матрица условных вероятностей этого события, учитывающая тот факт, что $X(0)=0$, $J(0)=i$ и в момент окончания периода занятости $J=j$ находится в состоянии $j$, равна

$$\lambda z \int_0^\infty \exp(Su)e^{-\lambda v}\,du \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-st}P(n,t)dF(t)G^n(z,s).$$

Итак,

$$L(z,s)=\int_0^\infty \exp(Su)S^0\Sigma^0 e^{-\lambda u}\,duG(z,s)$$

$$+\lambda z \int_0^\infty \exp(Su)e^{-\lambda u}\,du \sum_{n=0}^\infty \int_9^\infty e^{-st}P(n,t)\,dF(t)G^n(z,s)$$

$$=(\lambda I-S)^{-1}S^0\Sigma^0G(z,s)+\lambda z(\lambda I-S)^{-1}\int_0^\infty e^{-st}\exp\{[S+S^0\Sigma^0G(z,s)]\,t\}dF(t).$$

Отсюда найдем и математическое ожидание числа переходов $\widetilde{\mu}_1=\partial L(z,s)/\partial z\,e\Big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}}$ вложенной цепи Маркова $(X_n, J_n)$ и длительности $\mu_1$ первого периода занятости прибора $\mu_1=-\partial L(z,s)/\partial s\Big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}}$.

$$\frac{\partial L(z,s)}{\partial z}e=(\lambda I-S)^{-1}S^0\Sigma^0\frac{\partial G(z,s)}{\partial z}e+\lambda(\lambda I-S)^{-1}\int_0^\infty e^{-st}\exp\{[S+S^0\Sigma^0G(z,s)]t\}dF(t)e$$

$$+\lambda(\lambda I-S)^{-1}z\int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial z}\exp\{[S+S^0\Sigma^0\,G(z,s)]\,t\}\,dF(t)e.$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial z}\exp\{[S+S^0\Sigma^0G(z,s)]\,t\}=\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=0}^\infty (S+S^0\Sigma^0G(z,s))^n\frac{t^n}{n!}$

$=\sum_{n=1}^\infty \frac{t^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{n-1}[S+S^0\Sigma^0G(z,s)]^\nu S^0\Sigma^0\frac{\partial G(z,s)}{\partial z}[S+S^0\Sigma^0G(z,s)]^{n-1-\nu}$, то при $z=1-$, $s=0+$

$$\frac{\partial}{\partial z}\exp\{[S+S^0\Sigma^0G(z,s)]\,t\}e\Big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}}=\sum_{n=1}^\infty\frac{t^n}{n!}(S+S^0\Sigma^0G)^{n-1}S^0\Sigma^0\frac{\partial G(z_1s)}{\partial z}e\Big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}}$$

$$=\sum_{n=0}^\infty\frac{t^n}{n!}(S+S^0\Sigma^0G)^{n-1}S^0\Sigma^0\widetilde{\mu}.$$

Осталось найти $\sum_{n=1}^\infty\frac{t^n}{n!}(S+S^0\Sigma^0G)^{n-1}$.

Матрица $C=S+S^0\Sigma^0G$ удовлетворяет равенству $Ce=0$. Если $c$ — левый собственный нормированный вектор матрицы $C$, т. е. $cC=0$ и $ce=1$, то, в силу ([9], с. 451)

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{t^n}{n!}(S+S^0\Sigma^0G)^{n-1}=\int_0^t\exp(Cu)du=\{\widetilde{C}t-\frac{1}{r^*}[\exp(Ct)-I]\}(\widetilde{C}-\frac{1}{r^*}C)^{-1},$$

где $r^*\geq\max\limits_{1\leq 1\leq m}(-c_{ii})$.

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial}{\partial z} \exp\{[S+S^0\Sigma^0G(z, s)]\,t\}dF(t)\,e\Big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}} = \int_0^\infty \{\widetilde{C}t - \frac{1}{r^*}\ [\exp(Ct)\ -I]\}$$

$$\times(\widetilde{C} - \frac{1}{r^*}C)^{-1}S^0\Sigma^0dF(t)\widetilde{\mu} = \{f_1\widetilde{C} - \frac{1}{r^*}\ [\ \int_0^\infty \exp(Ct)dF(t) - I]\}(\widetilde{C} - \frac{1}{r^*}C)^{-1}S^0\Sigma^0\widetilde{\mu}.$$

Тем самым мы нашли математическое ожидание числа переходов цепи во время первого периода занятости $\widetilde{\mu}_1 = (\lambda I - S)^{-1} S^0\Sigma^0\widetilde{\mu} + \lambda(\lambda I + S)^{-1} e + \lambda\{f_1\widetilde{C} - (1/r^*)$ $[\int_0^\infty \exp\ (Ct)dF(t) - I]\}(\widetilde{C} - C/r^*)^{-1}S^0\Sigma^0\widetilde{\mu}$. Нетрудно заметить, что математическое ожидание числа обслуженных требований за первый период занятости равен $\widetilde{\mu}_1$.

Средняя длина $\mu_1$ периода занятости находится из

$$\mu_1 = -\frac{\partial L(z, s)}{(\partial s)}\Big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}} = -(\lambda I - S)^{-1} S^0\Sigma^0 \frac{\partial G(z, s)}{\partial s}\Big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}} e$$

$$+\lambda(\lambda I - S)^{-1} \int_0^\infty t\exp\{[S+S^0\Sigma^0G]\,t\}dF(t)e$$

$$+(-1)\lambda(\lambda I - S)^{-1} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} \exp\{[S+S^0\Sigma^0G(z, s)]t\}\Big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}} dF(t)\,e.$$

Из того, что $Ce = 0$ и $\exp(Ct)e = I$, а

$$-\frac{\partial}{\partial s}\exp\{[S + S^0\Sigma^0G(z, s)]\,t\}\Big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}} = \{\widetilde{C}t - \frac{1}{r^*}[\exp(Ct) - I]\}(\widetilde{C} = \frac{1}{r^*}C)^{-1}S^0\Sigma^0\mu,$$

следует (2). Этим самым теорема 1 доказана.

Теперь рассмотрим цикл занятости, т. е. последовательное возвращение полумарковского процесса $\widetilde{Q}(\cdot)$ в состояние $0\times\{1, 2, \dots, m\}$. Через $K_{ij}(k, x)$ обозначим функцию распределения одного периода занятости при условии, что в начальный момент $X(0) = 0$, $J(0) = i$, за это время осуществилось $k$ переходов вложенной цепи Маркова $(X_n, J_n)$ и в момент окончания цикла занятости $J$ находится в состоянии $j$. Можно показать, что $K(z, s) = \|\sum_{k=1}^\infty z^k \int_0^\infty e^{-sx}\,dK_{ij}(k, x)\| = ((\lambda+s)I - S)^{-1}S^0\Sigma^0G(z, s)$ $+\lambda z((\lambda+s)I - S)^{-1}\int_0^\infty e^{-st}\exp\{[S+S^0\Sigma^0G(z, s)]\,t\}\,dF(t)$.

Отсюда находится и математическое ожидание $\widetilde{\mu}_2$ числа переходов цепи Маркова $(X_n, J_n)$ за один цикл занятости и математическое ожидание его длины $\mu_2$. Очевидно $\widetilde{\mu}_2 = \widetilde{\mu}_1$ в данном случае.

$$\mu_2 = -\frac{\partial K(z, s)}{\partial s}\Big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}} e = \int_0^\infty ue^{-(\lambda I - s)u}\,du\,S^0\Sigma^0Ge$$

$$+\lambda\int_0^\infty u\exp[-(\lambda I - S)\,u]\,du \cdot \int_0^\infty \exp[(S+S^0\Sigma^0G)\,t]dF(t)e + \mu_1.$$

Но $\int_0^\infty u\exp[(s - \lambda I)\,u]\,du = (\lambda I - S)^{-2}$. Поэтому $\mu_2 = (\lambda I - S)^{-2}(S^0\Sigma^0 + \lambda I)e + \mu_1$.

**3. Длина очереди.** Стационарное распределение $x$ вложенной цепи Маркова $(X_n, J_n)$ существует в силу сделанных предположений] и находится из уравнения $x\widetilde{Q}(\infty) = x$, $xe = 1$. Вектор $x$ стационарного распределения цепи представим в виде $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$, причем $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$, где $x_{ik} = P(X_n = i,\ J_n = k)$ и $x_i$ можно найти, решив систему уравнений

$$x_i = x_0\widetilde{B}i + \sum_{k=1}^{i+1} x_k \widetilde{A}_{i-k+1}, \quad i \geq 0, \quad \widetilde{B}_i = \widetilde{B}_i(\infty). \tag{3}$$

Теорема 2. *Если $h_1 < \lambda_1$, то*

$$X(z)\,[zI - A(z, 0)] = x_0\{[z(\lambda I - S)^{-1} S^0\Sigma^0 - I]A(z, 0) \tag{4}$$

$$+ \lambda(\lambda I - S)^{-1} z \int_0^\infty \exp\{[S + zS^0\Sigma^0]\, t\}\, dF(t)\}$$

$X(1-)e = 1$, $x_0 = k_0/(k_0, \widetilde{\mu}_1$, *где* $k_0 L(1, 0) = K_0$, $K_0 e = 1$, $X(z) = \Sigma_{i=0}^\infty z^i x_i$.

Доказательство. Умножив обе стороны (3) на $z^i$ и просуммировав по $i$ от 0 до $\infty$, получим

$$X(z) = \sum_{i=0}^\infty x_i z^i = x_0 + \sum_{i=0}^\infty z^i B_i + \sum_{i \geq 0}^\infty \sum_{k=1}^{i+1} x_k \widetilde{A}_{i-k+1} z^i$$

Из

$$\sum_{i=0}^\infty B_i z^i = \sum_{i=0}^\infty \int_0^\infty \int_0^u P(0, u-\nu)\, e^{-\lambda(u-\nu)} S^0\Sigma^0 P(i, \nu)\, z^i dH(\nu) du$$

$$+ \lambda \sum_{i=0}^\infty \int_0^\infty \int_0^u P(0, u-\nu(\, e^{-\lambda(u-\nu)} P(i, \nu)\, z^i dF(\nu)\, du$$

$$= (\lambda I - S)^{-1} S^0\Sigma^0 \int_0^\infty \exp[(S + zS^0\Sigma^0)\, t]\, dH(t) + \lambda(\lambda I - S)^{-1} \int_0^\infty \exp[(S + zS^0\Sigma^0)\, t]\, dF(t)$$

и $\displaystyle\sum_{i=0}^\infty \sum_{k=1}^{i+1} x_k \widetilde{A}_{i-k+1} z^i = \sum_{k=1}^\infty x_k z^k \sum_{i=k-1}^\infty \frac{\widetilde{A}_{i-k+1} z^{i-k+1}}{z} = [X(z) - x_0]\frac{A(z, 0)}{z}$ следует (4).

Из (3) при $z \to 1-$, добавив к обеим сторонам полученного равенства $X(1-)\Pi = \pi$, находим $X(1-)(I - A + \Pi) = x_0\{[(\lambda I - S)^{-1} S^0\Sigma^0 - I]\, A + \lambda\,(\lambda I - S)^{-1} \int_0^\infty \exp[(S + S^0\Sigma^0)\, t]$ $. dF(t) + \pi$. Поскольку существует $(I - A + \Pi)^{-1}$ и $\pi(I - A + \Pi) = \pi$, то $X(1-) = x_0\{[(\lambda I$ $- S)^{-1} S^0\Sigma^0 - I]A + \lambda(\lambda I - S)^{-1} \int_0^\infty \exp[(S + S^0\Sigma^0)\, t]\, dF(t)\}\, (I - A + \Pi)^{-1} + \pi$.

Кроме того, $X(1-)e = 1$. Для того, чтобы полностью определить $X(z)$, осталось найти $x_0$. Заметим, что $x(0, j) = 1/m(0, j)$, где $m(0, j)$ — среднее время возвращения в состояние $(0, j)$ Марковской цепи $\widetilde{Q}(\infty)$. Но это среднее время возвращения очевидно равно среднему времени возвращения в состояние $(0, j)$ марковского восстановительного процесса решетчатого типа $K(z, 0) = L(z, 0)$. Но это среднее время возвращения в состояние $(0, j)$ равно $(k_0, \widetilde{\mu}_1)/k_{0j}$ (см. [12] с. 196 и [2] с. 194), где $k_0$ — левый инвариантный вероятностный вектор матрицы переходов $L(1, 0)$, а $\widetilde{\mu}_1$ — математическое ожидание числа переходов вложенной цепи $(X_n, J_n)$ за один цикл занятости. Этим самым мы доказали, что

$$x_0 = m(0, j)^{-1} = k_0\,(k_0, \widetilde{\mu}_1)^{-1}.$$

Теперь перейдем к изучению стационарного распределения длины очереди $X(t)$ в произвольный момент времени. Пусть $y(i, j) = \lim\limits_{t \to \infty} P(X(t) = i, J(t) = j \mid X(0) = 0,$ $J(0) = k\}$, $y_i = (v(i, 1), y(i, 2), \ldots, y(i, m))$, $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$, $Y(z) = \Sigma_{i=0}^\infty y_i z^i$.

Теорема 3. *Если* $h_1<\lambda_1$, *то*

$$y_0=\frac{k_0}{(k_0,\ \mu_2)}\left[-S^{-1}+\lambda(\lambda I-S)^{-1}\int_0^\infty \exp(St)\bar{F}(t)\,dt\right].$$

$$Y(z)-y_0=\frac{x_0}{(x,\ \delta)}(\lambda I-S)^{-1}\{\{zS^0\Sigma^0[A(z,\ 0)-I]+\lambda[\varphi(z)-I]\}$$

$$\times(S+zS^0\Sigma^0)^{-1}-\lambda S^{-1}[\int_0^\infty \exp(st)\,dF(t)-I]\}\}+\frac{1}{(x,\ \delta)}X(z)[A(Z,\ 0)-I](S+zS^0\Sigma^0)^{-1},$$ *где*

$$\varphi(z)=\int_0^\infty \exp[S+zS^0\Sigma^0)\,t]\,dF(t),\ \delta_0=(\lambda I-S)^{-1}[(1+\lambda f_1)I-h_1S]\,e,$$

$$\delta_i=h_1e,\ \forall i\geq 1,\ \delta=(\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \ldots).$$

Доказательство: Моменты окончания циклов занятости являются марковскими моментами процесса $\{X(t),\ J(t)\}$. По этим моментам можно построить вложенный полумарковский процесс с матрицей переходных вероятностей $K(x) =\|\Sigma_{k=1}^{\infty}K_{ij}(k,\ x)\|$, средним временем пребывания $\mu_2$ в каждом состоянии и стационарным распределением $k_0$ вложенной цепи Маркова, где $k_0K(1,\ 0)=k_0$, $ke=1$. С помощью основной предельной теоремы для полумарковских процессов находим

$$y_0=\frac{k_0}{(k_0,\ \mu_2)}\left[\int_0^\infty P(0,\ u)du+\int_0^\infty\int_0^t \lambda e^{-\lambda u}e^{st}\bar{F}(t-u)\,du\,dt\right]$$

$$=\frac{k_0}{(k_0,\ \mu_2)}\left[-S^{-1}-\lambda(\lambda I-S)^{-1}\int_0^\infty e^{st}\bar{F}(t)\,dt\right].$$

Математическое ожидание $\delta(i,\ j)$ времени пребывания марковского восстановительного процесса $Q(\cdot)$ в состоянии $(i,\ j)$ можно найти следующим образом:

$$\delta_0=(\delta(0,\ 1),\ \ldots,\ \delta(0,\ m))=\int_0^\infty x\sum_{n=0}^{\infty}d\tilde{B}_n(x)\,e$$

$$=\int_0^\infty x\int_0^x P(0,\ x-u)\exp[-\lambda(x-u)]\,S^0\Sigma^0\sum_{n=0}^{\infty}P(n,\ 0)\,dH(u)\,e$$

$$+\lambda\int_0^\infty x\int_0^x P(0,\ x-u)\exp[-\lambda(x-u)]\sum_{n=0}^{\infty}P(n,\ 0)\,dF(u)e=(\lambda I-S)^{-1}[(1+\lambda f_1)I-h_1S]e,$$

$$\delta_i=(\delta(i,\ 1),\ \ldots,\ \delta(i,\ m))=\int_0^\infty x\sum_{n=0}^{\infty}d\tilde{A}_n(x)e=h_1e,\quad \forall i\geq 1,\quad \delta=(\delta_0,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \ldots).$$

В силу теоремы Хантера (см. [12] с. 196 и [2] с. 194), среднее время возвращения $m(i,\ j)$ марковского восстановительного процесса $\tilde{Q}(\cdot)$ в состояние $(i,\ j)$ равно $(x,\ \delta)/x(i,\ j)$, причем $(x,\ \delta)=\{x_0(\lambda I-S)^{-1}[(1+\lambda f_1)I-h_1S]e+(1-x_0e)h_1\}\,x_{ij}^{-1}$. С помощью основной предельной теоремы полумарковских процессов находим

$$y_j=\frac{x_0}{(x,\ \delta)}\{\int_0^\infty\int_0^t P(0,\ u)S^0\Sigma^0e^{-\lambda u}P(j-1,\ t-u)\bar{H}(t-u)\,dudt$$

$$+\lambda\int_0^\infty P(0,\ u)\,e^{-\lambda u}P(j,\ t-u)\bar{F}(t-u)\,dudt\}+\sum_{n=}^{j}\frac{x_n}{(x,\ \delta)}\int_0^\infty P(j-n,\ t)\,\bar{H}(t)\,dt$$

$$= \frac{x_0}{(x,\delta)}(\lambda I-S)^{-1}\{S^0\Sigma^0\int_0^\infty P(j-1,t)\bar H(t)dt$$

$$+\lambda\int_0^\infty P(j,t)\bar F(t)dt\}+\sum_{n=1}^{j}\frac{x_n}{(x,\delta)}\int_0^\infty P(j-n,t)\bar H(t)dt.$$

Теперь

$$Y(z)-y_0=\frac{x_0}{(x_0,\delta)}(\lambda I-S)^{-1}[S^0\Sigma^0\int_0^\infty\sum_{j=1}^\infty P(j-1,t)\bar H(t)dtz^j+\lambda\int_0^\infty\sum_{j=1}^\infty P(j,t)z^j\bar F(t)\,dt]$$

$$+\sum_{j=1}^\infty\sum_{n=1}^{j}\frac{x_n}{(x,\delta)}\int_0^\infty P(j-n,t)\bar H(t)\,dt=\frac{x_0}{(x,\delta)}\{(\lambda I-S)^{-1}\{zS^0\Sigma^0\int_0^\infty\exp[(S+zS^0\Sigma^0)t]\bar H(t)dt$$

$$+\lambda\{\exp[(S+zS^0\Sigma^0)t]-\exp(St)\}\bar F(t)\,dt+\int_0^\infty\exp[S+z(S^0\Sigma^0)t]$$

$$\bar H(t)\,dt\}+\frac{X(z)}{(x,\delta)}\int_0^\infty\exp[(S+zS^0\Sigma^0)t]\bar H(t)dt.$$

Подставив

$$\int_0^\infty\exp[(S+zS^0\Sigma^0)\bar t]F(t)dt=[\varphi(z)-I](S+zS^0\Sigma^0)^{-1}$$

и

$$\int_0^\infty\exp[(S+zS^0\Sigma^0)t]H(t)d\bar t=[A(z,0)-I](S+zS^0\Sigma^0)^{-1}$$

в предыдущее равенство, получим требуемое выражение для $Y(z)-y_0$.

**4. Средняя длина очереди.** Матрица $A(z,0)$ для $0\le z\le 1$ неприводима и неотрицательна. Перроновое собственное значение $\eta(z)$ матрицы $A(z,0)$ является аналитической функцией при $0<z<1$. Через $u(z)$ и $v(z)$ обозначим соответственно правый и левый собственный вектор матрицы $A(z,0)$, соответствующие собственному значению $\eta(z)$, причем $v(z)u(z)=u(z)e=1$, $v(1-)=\pi$, $u(1)=e$. Для вычисления математического ожидания длины очереди нам понадобятся производные $\eta^{(n)}(1-)$, $u^{(n)}(1-)$, $v^{(n)}(1-)$ и $A^{(n)}(1,0)=\frac{\partial^n}{\partial z^n}A(z,0)\big|_{\substack{z=1-\\ s=0+}}$. В силу теоремы 4.2.5 из [11] тройку $\eta^{(n)}(1-)$, $u^{(n)}(1-)$ и $v^{(n)}(1-)$ можно вычислить реккуррентным способом для каждого $n$, для которого $A^{(n)}(1-,0+)$ конечна. Рекуррентные формулы имеют следующий вид:

$$\eta^{(0)}(1-)=1,\quad u^{(0)}(1-)=e,\quad v^{(0)}(1-)=\pi,$$

$$\eta^{(1)}(1)=s,\quad u^{(1)}(1-)=(I-A+\Pi)^{-1}\beta-se,$$

$$v^{(1)}(1-)=\pi A^{(1)}_{(1,0)}(I-A+\Pi)^{-1}-s\Pi,$$

и для $n\ge 1$:

$$\eta^{(n)}(1-)=\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\pi A^{(\nu)}(1-,0+)u^{(n-\nu)}(1-)-\sum_{\nu=1}^{n-1}\eta^{(\nu)}(1-)\pi u^{(n-\nu)}(1-),$$

$$v^{(n)}(1-)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{n}{\nu}v^{(\nu)}(1-)\{A^{(n-\nu)}(1,0)-\pi^{(n-\nu)}(1-)\}(I-A+\Pi)^{-1}$$

$$u^{(n)}(1-)=(I-A+\Pi)^{-1}\{\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}\{A^{(\nu)}(1,0)-\eta^{(\nu)}(1-)I\}$$

$$u^{(n-\nu)}(1-)\}-\sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu}v^{(n)}(1-)u^{(n-\nu)}(1-)e,$$

где $\pi A(1, 0)=\pi$, $\pi e=1$ и $s=\pi S_0 h_1$.

Сперва, умножив обе стороны равенства (4) справа на $u(z)$, продиффенцировав по $z$, после некоторых алгебраических преобразований находим выражение для $X'(z)u(z)$

$$X'(z)u(z)=-X(z)u'(z)+\frac{1}{z-\eta(z)}\{-(1-\eta'(z))X(z)u(z)+M'(z)\}$$

$$M(z)=x_0\{[z(\lambda I-S)^{-1}S^0\Sigma^0-I]A(z)+\lambda(\lambda I-S)^{-1}z\varphi(z)\}.$$

Так как при $z\to 1-$, $z-\eta(z)\to 0$ и $X'(1-)e$, $-X(1-)u'(1-)$ конечны, $M'(z)-(1-\eta(z))X(z)u(z)$ должно сходиться к нулю при $z\to 1-$, при этом с помощью теоремы Лопиталя доказываем, что $X'(1-)e=-X(1)u^{(1)}(1)+(2(1-s))^{-1}\{\eta^{(2)}(1)=M''(1-)\}$. Отсюда нетрудно вывести выражение для математического ожидания длины очереди в момент окончания обслуживания требований или ремонта прибора

$$X'(1-)e=-X(1-)u'(1)+\frac{1}{2(1-s)}\{\eta^{(2)}(1-)+x_0\{[[2s+\eta_2(1-)](\lambda I-S)^{-1}-\eta^{(2)}(1-)I]e$$

$$+2[(1+s)(\lambda I-S)^{-1}-I]u'(1-)+[(\lambda I-S)^{-1}(I+\lambda\varphi(1-))-I]u^{(2)}(1-)$$

$$+2\lambda(\lambda I-S)^{-1}[\varphi(1)+\varphi'(1-)]u'(1)+\lambda(\lambda I-S)^{-1}[2\varphi'(1-)e+\varphi''(1-)e]\}\},$$

где $\varphi^k(1-)=\int\limits_0^\infty \frac{d^k}{dz^k}\exp[(S+zS^0\Sigma^0)t]dF(t)|_{z=1-}$.

Продифференцировав обе стороны равенства $X(z)[zI-A(z)]=M(z)$ по $z$ и устремив $z\to 1$, находим $X'(1-)=M'(1-)(I-A+\Pi)^{-1}+(X'(1-)e)\pi$, где $M'(1-)=x_0\{(\lambda I-S)^{-1}S^0\Sigma^0A(1-)+[(\lambda I-S)^{-1}S^0\Sigma^0-I]A'(1-)+\lambda(\lambda I-S)^{-1}\varphi(1)+\lambda(\lambda I-S)^{-1}\varphi'(1-)\}$.

Математическое ожидание длины очереди в произвольный момент времени в стационарном режиме равно

$$\frac{d}{dz}Y(z)|_{z=1-}e=\frac{x_0}{(x,\delta)}(\lambda I-S)^{-1}\{S^0\Sigma^0\int\limits_0^\infty\frac{d}{dz}\exp[(S+zS^0\Sigma^0)t]|_{z=1-}\bar{H}(t)\,dt\,e$$

$$+\lambda\int\limits_0^\infty\frac{d}{dz}\{\exp[(S+zS^0\Sigma^0)t]-e^{St}\}|_{z=1-}\bar{F}(t)\,dt\,e$$

$$+\frac{1}{(x,\delta)}\left.\frac{dX(z)}{dz}\right|_{z=1-}\int\limits_0^\infty\exp[(S+zS^0\Sigma^0)t]\bar{H}(t)\,dt\,e$$

$$+\frac{1}{(x,\delta)}X(z)\int\limits_0^\infty\frac{d}{dz}\exp[(S+zS^0\Sigma^0)t]|_{z=1-}\bar{H}(t)\,dt\,e$$

$$=\frac{x_0}{(x,\delta)}(\lambda I-S)^{-1}\{S^0\Sigma^0\int\limits_0^\infty a(t)e\bar{H}(t)\,dt+\lambda\int\limits_0^\infty a(t)e\bar{F}(t)\,dt\}+\frac{1}{(x,\delta)}X'(1-)h_1$$

$$+\frac{1}{(x,\delta)}X(1-)\int\limits_0^\infty a(t)eH(t)\,dt$$

$$a(t)e=\lambda_1^{-1}te+[I-\exp(Q^*t)](r^*\Pi-Q^*)^{-1}S_0,$$

$$\int_0^\infty a(t)e\bar{H}(t)\,dt = \frac{1}{2}\lambda_1^{-1}h_2e-(h_1Q^*+A-I)(r^*\Sigma-Q^*)^{-2}S^0,$$

$$\int_0^\infty a(t)\,e\bar{F}(t)\,dt = \frac{1}{2}\lambda_1^{-1}f_2e-(f_1Q^*+A-I)(r^*\Pi-Q^*)^{-2}S^0,$$

$$r^*\geqq\max_{1\leqq i\leqq m}(-Q^*_{ii}),\quad f_k=\int_0^\infty x^k dF(x),\quad k=1,\ 2.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Б. В. Гнеденко и др. Приоритетные системы обслуживания. М., 1973.
2. Р. Барлоу, Ф. Прошан. Математическая теория надежности. М., 1969.
3. D. Cox. A use of complex probabilities in the theory of stochastic process. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51**, 1955, 313—319.
4. A. Kapadia. A *n*-server queue with phase input and service distribution. *Oper. Res.*, **21**, 1973, 623—628.
5. M. Neuts. Probability distribution of phase type. — In: Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin, Department of Mathematics. Belgium: University of Louvain, 1975, 173—206.
6. M. Neuts. Computational problems related to the Galton—Watson process Proc. Actuaral Research Conference, Brown University, 1980, 11—37.
7. M. Neuts. Algorithms for the waiting time distributions under various queue disciplines in the $M/G/1$ queue with service time distribution of phase type. Algorithmic Methods in Probability 1977, 177—197.
8. M. Neuts. Moment formulas for the Markov renewal branching process. *Adv. Appl. Prob.*, **8**, 1976, 690—711.
9. M. Neuts. Renewal processes of phase type. *Naval Res. Log. Quart.* **25**, 1978, 445—454,
10. M. Neuts. Matrix-geometric Solutions in Stochastic Models. An algorithmic Approach. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1981.
11. V. Ramaswami. The $N/G/1$ queue and its detailed analysis. *Adv. Appl. Prob.*, **12**, 1980, 221—261.
12. J. Hunter. On the moments of Markov renewal processes. *Adv. Appl. Prob.* **1**, 1968, 188—210.


*Кафедра математики*
*Высший институт экономики „К. Маркс“*
*1156 София* *Болгария*

*Поступила 6. 12. 1984*
*В переработанном виде 30. 9. 1986*