Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СУЩЕСТВОВАНИЕ И СВОЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

МАРИЯ А. АРОЛСКА-ХЕКИМОВА

В работе найдены достаточные условия для существования, единственности и асимптотического представления ω-периодического решения линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

При математическом моделировании процессов и явлений важных областей науки и техники — гидродинамики, химической технологии, теории управления и др., в последнее время с успехом используются сингулярно возмущенные системы дифференциальных уравнений. Особо важные приложения в теории оптимального управления имеют сингулярно возмущенные системы с импульсным воздействием. Отметим, что изучение дифференциальных уравнений с импульсным воздействием ведет свое начало в работах В. Д. Мильмана и А. Д. Мышкиса [1, 2]. Настоящая работа является продолжением исследования свойств периодических решений линейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, впервые рассмотренных в [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} &\varepsilon\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \neq t_i \\ &\Delta x\big|_{t=t_i} = B_i x(t_i) + b_i, \end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр: $x \in \mathsf{R}^m$; $A(t)$ $(t \in \mathsf{R})$ — напрерывная ω-периодическая $(m \times m)$ матрица; $f(t)$ $(t \in \mathsf{R})$ — ω-периодическая m-мерная вектор-функция; $t_i \in \mathsf{R}$, $t_i < t_{i+1}$, $t_{i+q} = t_i + \omega$ $(i = 0, \pm 1, \dots)$, для некоторого $q \in \mathsf{N}$; B_i и b_i — соответственно $(m \times m)$ матрицы и m-мерные векторы, удовлетворяющие условиям периодичности

$$B_{i+q} = B_i, \quad b_{i+q} = b_i (i = 0, \pm 1, \dots); \ \Delta x\big|_{t=t_i} = x(t_i + 0) - x(t_i - 0); \quad x(t_i) = x(t_i - 0).$$

Обозначим через $\lambda_k(t)$ $(k = \overline{1, m})$ собственные значения матрицы $A(t)$, а через $p(t)$ функцию

$$p(t) = \max\{\operatorname{Re}\lambda_k(t): k = \overline{1, m}\}.$$

Из непрерывности и ω-периодичности матрицы $A(t)$ следует, что функция $p(t)$ является непрерывной и ω-периодической при $t \in \mathbf{R}$

В работе [3] исследована задача о существовании и свойствах периодических решений системы (1) при условии $p(t) < 0$, $t \in \mathbf{R}$.

Целью настоящей работы является исследование той же задачи, но при следующих более слабых ограничениях на $p(t)$:

$$p(t_i)<0, \quad i=0,\ \pm 1, \ldots, \tag{2}$$

$$\int_{t_i}^{t} p(s)ds<0, \quad t_i<t\leqq t_{i+1}, \quad i=0,\ \pm 1, \ldots, \tag{3}$$

$$\int_{t}^{t_{i+1}} p(s)ds<0, \ t_i\leqq t<t_{i+1}, \quad i=0,\ \pm 1, \ldots . \tag{4}$$

При выполнении неравенств (2), (3) и (4) будем решать задачу о существовании и свойствах ω-периодических решений системы (1). При решении этой задачи будем рассматривать различные кусочно-непрерывные функции и матрицы с разрывами первого рода в точках $t_i (i=0,\ \pm 1, \ldots)$. Для определенности будем считать, что все они непрерывные слева в точках $t_i (i=0,\ \pm 1, \ldots)$.

2. Основные результаты. Обозначим через D любое множество, обладающее свойством: из $t\in D$ следует $t+\omega\in D$.

Символом $\tilde{C}_\omega(D)$ будем обозначать множество всех ω-периодических, кусочно-непрерывных m-мерных вектор-функций $w(t)$, $t\in D$, с разрывами первого рода в точках t_i при $i\in\{0,\ \pm 1, \ldots\}$, таких, что $t_i\in D$. Символом $\tilde{C}_\omega^{(1)}(D)$ будем обозначать множество всех функций $w(t)\in\tilde{C}_\omega(D)$, имеющих непрерывные производные на множестве $D\cap(t_i,\ t_{i+1}]$ $(i=0,\ \pm 1, \ldots)$, причем, если $t_i\in D$, то существует предел $\dot{w}(t_i+0)$. Рассмотрим однородную систему, соответствующую системе (1)

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{y}&=A(t)y, \quad t\neq t_i \\ \Delta y\big|_{t=t_i}&=B_i y(t_i). \end{aligned} \tag{5}$$

Обозначим через $Y(t,\ s,\ \varepsilon)$ $(Y(s,\ s,\ \varepsilon)=E)$ фундаментальную матрицу системы (5). В работе [3] для $Y(t,\ s,\ \varepsilon)$ найдено следующее представление:

$$Y(t,\ s,\ \varepsilon)=\begin{cases} V(t,\ s,\ \varepsilon), t_i<s\leqq t\leqq t_{i+1}, \\ V(t,\ t_i,\ \varepsilon)\ (E+B_i)\ V(t_i,\ s,\ \varepsilon)\ t_{i-1}<s\leqq t_i<t\leqq t_{i+1}, \\ V(t,\ t_i,\ \varepsilon)\ [\prod\limits_{j=i}^{k+1}(E+B_j)V(t_j,\ t_{j-1},\ \varepsilon)]\ (E+B_k) \\ \times V(t_k,\ s,\ \varepsilon),\ t_{k-1}<s\leqq t_k<t_i<t\leqq t_{i+1}, \end{cases} \tag{6}$$

где через $V(t,\ s,\ \varepsilon)$ $(V(s,\ s,\ \varepsilon)=E)$ обозначена фундаментальная матрица системы без импульсов

$$\varepsilon\dot{v}=A(t)v, \quad t\in\mathrm{R}. \tag{7}$$

При дальнейших исследованиях будем пользоваться следующей теоремой:

Теорема 1. [4]. *Пусть матрица $A(t)$ непрерывна на $[0,\ T]$.*

Тогда для любого малого числа $\sigma>0$ существует такая постоянная $K_\sigma>0$, что для фундаментальной матрицы $V(t,\ s,\ \varepsilon)$ системы (7) выполняется оценка

$$|V(t,\ s,\ \varepsilon)|\leq K_\sigma \exp\{(1/\varepsilon)\int_s^t(p(r)+\sigma)dr\}, \quad 0\leqq s\leqq t\leqq T. \tag{8}$$

Будем говорить, что выполнены условия (А), если: А1. Функция $p(t)$ удовлетворяет условиям (2), (3) *и* (4). А2. Матрицы $E+B_i$ $(i=0, \pm 1, \dots)$ неособые.

Введем обозначения $S_i=\{t: t_i<t<t_{i+1};\ p(t)<0;\ \int_s^t p(r)dr<0,\ t_i\leq s<t\}\cup\{t_i\}$, $T_0=\cup_{i=0}^{q-1} S_i$. Через $\widetilde{T}_0$ будем обозначать ω-периодическое продолжение множества T_0. Из определения множества $\widetilde{T}_0$ следует, что или $\widetilde{T}_0=\mathbf{R}$, или $\widetilde{T}_0$ является открытым множеством.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (А). *Тогда для каждого* $\bar{t}\in T_0$ *существуют такие постоянные* $\varkappa=\varkappa(\bar{t})>0$ *и* $K_0=K_0(\bar{t})>0$, *что для фундаментальной матрицы* $Y(t, s, \varepsilon)$ *системы* (5) *выполняется оценка*

$$|Y(\bar{t}, s, \varepsilon)|\leq K_0\exp\{-\varkappa[(\bar{t}-s)/2\varepsilon]\},\quad t_0\leq s\leq\bar{t}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть для определенности $\bar{t}\in(t_i, t_{i+1}]$, где $i\in\{0, 1, \dots, q-1\}$. Положим

$$\sup\{[1/(\bar{t}-s)]\cdot\int_s^{\bar{t}} p(r)dr:\ s\in[t_i, \bar{t})\}=-\varkappa_i(\bar{t})<0. \tag{10}$$

Из (10) следует неравенство

$$\int_s^{\bar{t}}[p(r)+\sigma_i]dr\leq-(\varkappa_i-\sigma_i)(\bar{t}-s),\quad t_i\leq s<\bar{t} \tag{11}$$

при любом $\sigma_i>0$.

Из (11) и теоремы 1 при $\sigma_i=\varkappa_i/2$ получаем оценку

$$|V(\bar{t}, s, \varepsilon)|\leq K_i\exp\{-\varkappa_i[(\bar{t}-s)/2\varepsilon]\},\quad t_i\leq s<\bar{t}, \tag{12}$$

где $K_i=K_i(\bar{t})>0$.

Из представления (6) и оценки (12) следует утверждение теоремы 2 при $s\in(t_i, \bar{t})$. При $s=t_i$ из (6) получаем

$$Y(\bar{t}, t_i, \varepsilon)=V(\bar{t}, t_i, \varepsilon)\,(E+B_i). \tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13) следует оценка

$$|Y(\bar{t}, s, \varepsilon)|\leq K_i|E+B_i|\exp\{-\varkappa_i[(\bar{t}-s)/2\varepsilon]\},\quad t_i\leq s<\bar{t}. \tag{14}$$

Положим

$$\sup\{[1/(t_j-s)]\cdot\int_s^{t_j} p(r)dr: s\in[t_{j-1}, t_j)\}=-\mu_j<0, \tag{15}$$

где $j=\overline{1, q-1}$.

Из (15) и теоремы 1 при $\sigma_j=\mu_j/2$ получаем оценку

$$|V(t_j, s, \varepsilon)|\leq M_j\exp\{-\mu_j[(t_j-s)/2\varepsilon]\},\quad t_{j-1}\leq s<t_j. \tag{16}$$

Отметим, что постоянные $\mu_j>0$, $M_j>0$ $(j=\overline{1, q-1})$ не зависят от $\bar{t}$.

Положим

$$M=\max\{K_i, \max\{M_j: j=\overline{1, q-1}\}\},\quad \varkappa=\min\{\varkappa_i, \min\{\mu_j: j=\overline{0, q-1}\}\}. \tag{17}$$

Из соотношений (6), (14), (16) и (17) получаем $|Y(\bar{t}, s, \varepsilon)|\leq M^q(\max_i|E+B_i|)^q\exp\{-\varkappa[(\bar{t}-s)/2\varepsilon]\}$, $t_0\leq s\leq\bar{t}$, откуда при $K_0=M^q(\max_i|E+B_i|)^q$ следует утверждение теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (A). *Тогда существует такое число* $\varepsilon_0>0$, *что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *однородная система* (5) *имеет только тривиальное* ω-*периодическое решение.*

Доказательство. Решение $y(t,\varepsilon)$ системы (5) при $t\geqq t_0$ можно записать в виде

$$y(t,\varepsilon)=Y(t,t_0,\varepsilon)y(t_0,\varepsilon). \tag{18}$$

Из условия периодичности $y(t_0+\omega,\varepsilon)=y(t_0,\varepsilon)$ следует

$$(E-Y(t_0+\omega,t_0,\varepsilon))\,y(t_0,\varepsilon)=0. \tag{19}$$

Так как $t_0+\omega=t_q\in T_0$, из неравенства (9) следует оценка

$$Y(t_0+\omega,t_0,\varepsilon)|\leqq K_0\exp\{-\varkappa(\omega/2\varepsilon)\}. \tag{20}$$

Из (20) следует, что при достаточно малом $\varepsilon(\varepsilon\in(0,\varepsilon_0])\det(E-Y(t_0+\omega,t_0,\varepsilon))\neq0$. При $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ из равенства (19) получаем $y(t_0,\varepsilon)=0$, откуда, имея в виду (18), следует, что $y(t,\varepsilon)=0$. Следствие 1 доказано.

Обозначим через T произвольное замкнутое подмножество множества T_0.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* (A). *Тогда существуют независящие от* $\bar t\in T$ *постоянные* $\varkappa>0$ *и* $K_0>0$, *такие, что неравенство* (9) *выполняется при* $\bar t\in T$.

Доказательство. Утверждение следствия 2 следует из доказательства теоремы 2, если вместо (10) положим

$$\sup\{\sup\{\frac{1}{\bar t-s}\int_s^{\bar t}p(r)dr: s\in[t_i,\bar t)\}:\bar t\in T\}=-\varkappa_i<0.$$

Через $\tilde T$ обозначим ω-периодическое продолжение множества T.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A). *Тогда существует такая постоянная* $\varepsilon_0>0$, *что при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ *система* (1) *при* $f(t)\in\tilde C_\omega(\mathsf{R})$ *имеет единственное* ω-*периодическое решение* $x_\omega(t,\varepsilon)\in\tilde C_\omega(\mathsf{R})$. *Для* $x_\omega(t,\varepsilon)$ *справедлива оценка*

$$\sup\{|x_\omega(t,\varepsilon)|: t\in\tilde T\}\leqq\bar K\max\{\|f\|,\max_i|b_i|\}, \tag{21}$$

где постоянная $\bar K>0$ *не зависит от* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, *а через* $\|f\|$ *обозначено* $\|f\|=\sup\{|f(t)|: t\in\mathsf{R}\}$.

Доказательство. Из оценки (20) следует, что существуют такие числа $\varepsilon_0>0$ и $0<\alpha<1$, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ выполняется неравенство

$$|Y(t_0+\omega,t_0,\varepsilon)|<\alpha, \tag{22}$$

откуда следует, что $\det(E-Y(t_0+\omega,t_0,\varepsilon))\neq0$ при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Непосредственной проверкой устанавливаем, что при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ функция

$$x(t,\varepsilon)=Y(t,t_0,\varepsilon)\,(E-Y(t_0+\omega,t_0,\varepsilon)^{-1}\,[(1/\varepsilon)\int_{t_0}^{t_0+\omega}Y(t_0+\omega,s,\varepsilon)f(s)ds \tag{23}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{q-1}Y(t_0+\omega,t_\nu+0,\varepsilon)b_\nu]+(1/\varepsilon)\int_{t_0}^{t}Y(t,s,\varepsilon)f(s)ds+\sum_{t_0\leqq t_\nu<t}Y(t,t_\nu+0,\varepsilon)b_\nu,\quad t\geqq t_0,$$

удовлетворяет системе (1) и условию $x(t_0+\omega,\varepsilon)=x(t_0,\varepsilon)$. Периодическое продолжение $x_\omega(t,\varepsilon)$ функции $x(t,\varepsilon)$ является периодическим решением системы (1). Единственность этого решения следует из следствия 1.

Для доказательства неравенства (21) оценим сначала матрицу $(E-Y(t_0+\omega,\ t_0,\ \varepsilon))^{-1}$. Из (22) при $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ получаем неравенство

$$|(E-Y(t_0+\omega,\ t_0,\ \varepsilon))^{-1}|\leq 1/(1-\alpha). \tag{24}$$

Пользуясь следствием 2 и оценкой (24) из (23) при $t\in T$, $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$ получаем неравенство

$$|x_\omega(t,\ \varepsilon)|\leq K_0^2\exp\{-\varkappa[(t-t_0)/2\varepsilon]\}\ [\|f\|/\varkappa+\max_i|b_i| \tag{25}$$

$$\times\sum_{\nu=0}^{q-1}\exp\{-\varkappa[(t_0+\omega-t_\nu)/2\varepsilon]\}]+(K_0/\varkappa)\|f\|+K_0\max_i|b_i|\sum_{t_0\leq t_\nu<t}\exp\{-\varkappa[(t-t_\nu)/2\varepsilon]\},$$

где постоянные $\varkappa>0$ и $K_0>0$ не зависят от $\varepsilon\in(0,\ \varepsilon_0]$.

Из неравенства (25) при $K=K_0\{K_0/[\varkappa(1-\alpha)]+1/\varkappa+1\}+qK_0\exp\{-\varkappa\theta/2\varepsilon_0\}\ (K_0/(1-\alpha)+1)$, где $\theta=\min_i(t_{i+1}-t_i)$, следует оценка (21). Теорема 2 доказана.

Исследуем свойства ω-периодического решения $x_\omega(t,\ \varepsilon)$ системы (1) при $\varepsilon\to 0$. Из системы (1) при $\varepsilon=0$ получаем систему

$$\begin{gathered}0=A(t)\tilde{x}+f(t),\ t\neq t_i\\ \Delta\tilde{x}|_{t=t_i}=B_i\tilde{x}(t_i)+b_i.\end{gathered} \tag{26}$$

Из определения множества $\tilde{T}_0$ следует, что при $t\in\tilde{T}_0$ из первого равенства (26) можно однозначно определить функцию

$$\bar{x}(t)=-A^{-1}(t)f(t),\ \ \bar{x}(t)\in\tilde{C}_\omega(\tilde{T}_0), \tag{27}$$

Отметим, что величины $\Delta\bar{x}|_{t=t_i}$ вполне определены из (27), и в общем случае функция $\bar{x}(t)$ не удовлетворяет второму равенству (26).

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия*: 1. *Выполнены условия* (A). 2. *Матрица* $A(t)$ *непрерывно дифференцируема при* $t\in\mathbb{R}$. 3. *Вектор-функция* $f(t)\in\tilde{C}_\omega^{(1)}(\mathbb{R})$. *Тогда решение системы* (1) $x_\omega(t,\ \varepsilon)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|x_\omega(t,\varepsilon)-\bar{x}(t)|=0 \tag{28}$$

при каждом $t\in\tilde{T}_0$.

Доказательство. Отметим, что при условиях теоремы 4 функция $\bar{x}(t)\in\tilde{C}_\omega^{(1)}(\tilde{T}_0)$. Введем обозначение

$$z_\omega(t,\ \varepsilon)=x_\omega(t,\ \varepsilon)-\bar{x}(t),\quad t\in\tilde{T}_0. \tag{29}$$

Из (1), (27), (29) и теоремы 3 следует, что при $t\in\tilde{T}_0$ функция $z_\omega(t,\varepsilon)\in\tilde{C}_\omega(\tilde{T}_0)$ является единственным ω-периодическим решением системы

$$\varepsilon\dot{z}=A(t)z-\varepsilon\dot{\bar{x}},\ \ t\neq t_i$$

$$\Delta z|_{t=t_i}=B_iz(t_i)+B_i\bar{x}(t_i)-\Delta\bar{x}|_{t=t_i}+b_i.$$

Пусть $t=\bar{t}\in T_0$. Докажем, что $\lim_{\varepsilon\to 0}|z_\omega(t,\ \varepsilon)|=0$.

Имея в виду оценку (25) аналогичным образом для $z_\omega(\bar{t}, \varepsilon)$ получаем

$$|z_\omega(\bar{t}, \varepsilon)| \leq K_0^2 \exp\{-\varkappa[(\bar{t}-t_0)/2\varepsilon\}[(\varepsilon|\dot{\bar{x}}(\bar{t})|)/\varkappa + \max_i |b_i'|$$

$$\times \sum_{\nu=0}^{q-1} \exp\{-\varkappa[(t_0+\omega-t_\nu)/2\varepsilon]\}] + (K_0/\varkappa)\varepsilon|\dot{\bar{x}}(\bar{t})| + K_0 \max_i |b_i'| \sum_{t_0 \leq t_\nu < \bar{t}} \exp\{-\varkappa[(\bar{t}-t_\nu)/2\varepsilon]\},$$

где $b_i' = B_i\bar{x}(t_i) - \Delta\bar{x}|_{t=t_i} + b_i$.

Из неравенства (31) следует, что $\lim z_\omega(\bar{t}, \varepsilon) = 0$, $\bar{t} \in T_0$. Так как $z_\omega(t, \varepsilon) \in \widetilde{C}_\omega(\widetilde{T}_0)$, а $\widetilde{T}_0$ является ω-периодическим предолжением множества T_0, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} z_\omega(\bar{t}, \varepsilon) = 0$, $t \in \widetilde{T}_0$, откуда, имея в виду (29), следует утверждение теоремы 4.

Замечание. Из доказательства теоремы 4 следует, что пределный переход (28), вообще говоря, будет неравномерным на $\widetilde{T}_0$ даже в случае, когда $\widetilde{T}_0 \equiv \mathbb{R}$. При $\widetilde{T}_0 \equiv \mathbb{R}$ в работе [3] доказано, что предельный переход (28) будет равномерным на каждом сегменте вида $[\alpha_i, \beta_i] \subset (t_i, t_{i+1}]$.

Обозначим через P_i произвольный сегмент $[\alpha_i, \beta_i] \subset (t_i, t_{i+1}]$, $(i=0, \pm 1, \ldots)$. Легко доказать, что при условиях теоремы 4 предельный переход (28) будет равномерным на каждом множестве $P_i \cap \widetilde{T}$.

Чтобы найти равномерное асимптотическое приближение ω-периодического решения $x_\omega(t, \varepsilon)$ системы (1) при $t \in \widetilde{T}$, рассмотрим функцию

$$X(t, \varepsilon) = \bar{x}(t) + \pi^{(i)}[(t-t_i)/\varepsilon], \quad t \in (t_i, t_{i+1}] \cap \widetilde{T}, \quad (i=0, \pm 1, \ldots),$$

где

$$\pi^{(i)}(\tau) = \exp\{A(t_i)\,\tau\}\,[B_i\,\bar{x}(t_i) - \Delta\bar{x}|_{t=t_i} + b_i], \quad \tau \geq 0.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда существуют такие постоянные $\varepsilon_0 > 0$ и $C > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполняется неравенство*

$$\sup\{|x_\omega(t, \varepsilon) - X(t, \varepsilon)| : t \in \widetilde{T}\} \leq C\varepsilon.$$

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству аналогичной теоремы 3 из работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис. Об устойчивости движения при наличии толчков. *Сиб. мат. ж.*, 12, 1960, 233—237.
2. В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис. Случайные толчки в линейных динамических системах. *В сб. Прибл. методы реш. диф. ур.*, Киев, АН УССР, 1963, 64—81.
3. M. A. Hekimova, D. D. Bainov. Periodic solutions of singularly-perturbed systems of differential equations with impulse effect. *Z. Angew. Math. Phys.*, 36, 1985, 520—537.
4. В. И. Рожков. Асимптотика решений некоторых систем с малым параметром при производной. *Диф. уравн.*, 10, 1974, 1037—1049.

ПУ „П. Хилендарски“
Пловдив Болгария

Поступила 13. 12. 1985
В переработанном виде 4. 11. 1986