Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

НИКОЛАЙ В. КЮРКЧИЕВ, МИЛКО Г. ПЕТКОВ

В этой статье рассматриваются методы типа Н. Обрешкова уточнения корней нелинейного уравнения $f(x)=0$, которые получаются при помощи аппроксимации функции $f(x)$ кривыми второго порядка. Предлагаются и общие схемы для получения функционально-итерационных методов. Математический аппарат позволяет охватить с единой точки зрения значительный класс применяемых в этой области итеративных процессов. Рассмотрен и метод, основанный на интерполировании $f(x)$ при помощи многочленов Абеля—Гончарова.

Пусть дано нелинейное уравнение $f(x)=0$. В [1 : 2] Н. Обрешков рассматривает вопрос численного решения уравнения с помощью парабол, которые строятся хотя бы по трем элементам. Не предполагая давать детальное и всеобъемлющее освещение этого вопроса, мы ограничиваемся кратким обзором.

Упомянем метод парабол по двум точкам $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ и производной в одной из этих точек

$$x=a+(\varepsilon\sqrt{\Delta}-f'(a))/2m, \tag{1}$$

$$\Delta=f'^2(a)-4mf(a);\quad \varepsilon=\operatorname{sgn} f'(a),\quad m=\Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(a)\Big)/(b-a),$$

метод по трем точкам $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ и $M(m, f(m))$

$$\begin{gathered} x=m+((b-a)/2)\cdot(f(a)-f(b)\pm\sqrt{\Delta})/2K, \\ m=(a+b)/2;\quad K=f(a)+f(b)-2f(m),\quad \Delta=(f(b)-f(a))^2-8Kf(m), \end{gathered} \tag{2}$$

и метод парабол симметрического вида:

$$\begin{gathered} x=a+(-m\Delta f'(a)-\Delta f(a)\pm\sqrt{D})/\Delta f'(a); \\ m=(a-b)/2,\ \Delta f(a)=f(a)-f(b);\quad \Delta f'(a)=f'(a)-f'(b); \\ D=(m\Delta f'(a)+\Delta f(a))^2-4mf(a)\Delta f'(a). \end{gathered} \tag{3}$$

Н. Обрешков показал, что скорость сходимости оценивается неравенством:

$$|\xi-x|\leq\frac{(b-a)}{12}(\xi-a)^2.(L/T)$$

для метода (1) и неравенством

$$|\xi-x|\leq\frac{5}{6}(b-a)^3\cdot(L/T)$$

для метода (3), где ξ — решение уравнения $f(x)=0$, а $L=\max_{x\in(a,b)}|f'''(x)|$; $T=\min_{x\in(a,b)}|f'(x)|$. В этом направлении довольно тонкие результаты можно найти в книге Н. Обрешкова [3].

Естественно, можно расширить список итерационных методов, которые получаются при помощи аппроксимации функции $f(x)$ кривыми второго порядка.

Построим параболическую кривую, проходящую через точки $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$, для которой прямая через эти точки и точка $P(p, q)$ являются соответственно полярой и полюсом этой кривой. Общее уравнение пучка кривых второго порядка с этим свойством имеет вид:

$$l_{AP} l_{BP} + \lambda l_{AB}^2 = 0, \tag{4}$$

где $\lambda \neq 0$, а l_{IJ} прямая, проходящая через точки I и J. Уравнение (4) можно записать следующим образом:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

причем, чтобы оно было уравнением параболы, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \tag{5}$$

Решение уравнения (4) при $y=0$, с учетом (5), будем использовать для приближенного решения $f(x)=0$.

Если в качестве полюса P возьмем точку $P((af(a)-bf(b))/(f(a)-f(b)), (f(a)+f(b))/2)$, мы получим итерационный метод

$$\begin{aligned} x &= \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2} \cdot \frac{(f(a)+f(b))(f^2(a)+f^2(b))}{(f(a)-f(b))^3} \\ &= \frac{bf(a)(f^2(a)+2f^2(b)-f(a)f(b)) - af(b)(2f^2(a)+f^2(b)-f(a)f(b))}{f(a)(f^2(a)+2f^2(b)-f(a)f(b)) - f(b)(2f^2(a)+f^2(b)-f(a)f(b))}. \end{aligned} \tag{6}$$

Если в качестве полюса возьмем точку

$$P\left(\frac{a+b}{2} - \frac{(b-a)}{2} \cdot \frac{(f^2(b)-f^2(a))}{f(b)-f(a)+2f(a)f(b)},\ \frac{f(a)+f(b)}{2}\right),$$

то мы получим

$$x = \frac{af(b) - bf(a) + (a+b)f(a)f(b)}{f(b)-f(a)+2f(a)f(b)} = \frac{af(b)(1+f(a)) - bf(a)(1-f(b))}{f(b)(1+f(a)) - f(a)(1-f(b))}. \tag{7}$$

Положив $P=P(b, 0)$, получим итерационный метод:

$$x = b - (b-a)(|f(b)|^{1/2}/(|f(a)|^{1/2} + |f(b)|^{1/2}))^2, \tag{8}$$

а если $P=P(a, 0)$, получим

$$x = a + (b-a)(|f(a)|^{1/2}/(|f(a)|^{1/2} + |f(b)|^{1/2})). \tag{9}$$

Описанные схемы (6)—(9) для итерационного решения уравнения $f(x)=0$, как и другие двухточечные итерационные схемы, можно получить из следующих формул:

$$x = \alpha a + (1-\alpha)b - (b-a)(\alpha |f(a)|^{\beta\delta} \operatorname{sgn} f(a) + (1-\alpha)|f(b)|^{\gamma\delta} \operatorname{sgn} f(b))/|T|^{\delta} \operatorname{sgn} T, \tag{10}$$

где $T = |f(b)|^{\beta} \operatorname{sgn} f(b) - |f(a)|^{\gamma} \operatorname{sgn} f(a)$, при подходящем выборе параметров α, β, γ, δ.

В [4] предложена общая итерационная процедура

$$x = \frac{af(b)F_1(f(a), f(b), a, b) - bf(a)F_2(f(a), f(b), a, b)}{f(b)F_1(f(a), f(b), a, b) - f(a)F_2(f(a), f(b), a, b)}, \tag{11}$$

где F_1 и F_2 — некоторые функции переменных $f(a)$, $f(b)$, a и b. В общую схему включаются также и классические методы. Эти вычислительные схемы зависят от некоторых параметров, которые могут выбираться в зависимости от конкретных свойств функции $f(x)$. Естественно, что уточнение этих параметров целесообразно, когда необходимо многократно решать однотипные уравнения.

Отметим, что при $f(a)f(b)<0$, $\beta=\gamma=0$, $\alpha=1/2$ из (10) получаем формулу для для деления отрезка пополам.

Если $\beta=\gamma=\delta=1$, $\alpha=0$, либо $\alpha=1$, получаем формулы для метода ложного положения (regula falsi): $x_{k+1}=x_k-f(x_k)(x_k-a)/(f(x_k)-f(a))$ и метода секущих.

Если $\beta=\gamma=1$, $\delta=4$, $\alpha=1/2$, из (10) получаем формулу (6). Итерация (7) получается из (11) при $F_1(f(a), f(b), a, b)=1+f(a)$, $F_2(f(a), f(b), a, b)=1-f(b)$, а формулы (8) и (9) получаются очевидным образом из (10) при $\beta=\gamma=1/2$, $\delta=2$, $\alpha=0$, либо $\alpha=1$.

Рассмотрим параболическую кривую Π:

$$\text{(12)}\qquad \Pi: (f'(a)(x-a)+f(a)-y)(f'(b)(x-b)+f(b)-y)+\lambda((f(a)-f(b))x-y(a-b)+af(b)-bf(a))^2=0,$$

где $\lambda=-(\Delta f'(a))^2/4(mf'(a)-\Delta f(a))(mf'(b)-\Delta f(a))$, $m=a-b$; $\Delta f(a)=f(a)-f(b)$; $\Delta f'(a)=f'(a)-f'(b)$.

Если в уравнение (12) положим $y=0$, получим итерационный процесс:

$$\text{(13)}\qquad x=a+(-K(mf'(a)f'(b)+f(a)f'(b)+f'(a)f(b))+2mf(a)\Delta^2 f'(a)\pm\sqrt{D})/2(Kf'(a)f'(b)-\Delta^2 f'(a)\Delta^2 f(a)),$$

где $D=((Kmf'(a)f'(b)+f(a)f'(b)+f'(a)f(b)-2m\Delta^2 f'(a)f(a))^2-4(Kf'(a)f'(b)-\Delta^2 f'(a)\Delta^2 f(a))\times((Kmf(a)f'(b)+Kf(a)f(b))-m^2\Delta^2 f'(a)f^2(a))$, $K=4(mf'(a)-\Delta f(a))(mf'(b)-\Delta f(a))$. Видно, что если Π: $l_{AP}l_{BP}+\lambda l_{AB}^2=0$ дегенерована, то получаем метод Ньютона: $x=a)-f(a)/f'(a)$.

Приведем числовой пример. Найти положительный корень уравнения $f(x)=5xe^{-x}-0.2=0$ в интервале (1,10) с точностью до 2.5×10^{-3} по методу (7) и по способу „regula falsi“.

Сравнение полученных результатов дает следующую таблицу 1. Как видно, метод (7) имеет заметное преимущество по сравнению с методом ложного положения. Отметим, что еще на одиннадцатом приближении по методу (7) мы получим точность $\varepsilon=1\times10^{-8}$.

Сейчас рассмотрим метод решения нелинейных уравнений, основанный на интерполировании $f(x)$ при помощи многочленов Абеля—Гончарова. Построим алгебраический многочлен $P_2(x)$, удовлетворяющий условиям: $P_2^{(i)}(x_i)=f^{(i)}(x_i)$, $i=0, 1, 2$.

Интерполирующий многочлен имеет следующий вид:

$$\text{(14)}\quad y=P_2(x)=\frac{f''(x_2)}{2}x^2+(f'(x_1)-x_1f''(x_2))x+f(x_0)-\frac{x_0^2f''(x_2)}{2}-x_0(f'(x_1)-x_1f''(x_2)).$$

Решение уравнения (14) при $y=0$, будем использовать для приближенного решения уравнения $f(x)=0$. Получим итерационный процесс:

$$\text{(15)}\qquad x_3=\frac{-f'(x_1)+x_1f''(x_2)+\varepsilon\sqrt{(f'(x_1)-(x_1-x_0)f''(x_2))^2-2f(x_0)f''(x_2)}}{f''(x_2)},\quad \varepsilon=\operatorname{sgn} f'(x_1).$$

Справедлив следующий результат. Пусть $f(x)$ — достаточно гладкая функция, и в отрезке (x_0, x_2) содержится единственный корень ξ уравнения $f(x)=0$. Пусть начальные приближения x_0, x_1, x_2 достаточно близкие к корню ξ, тогда будем иметь неравенство: $|x_3-\xi|\leq ch^3$; $h=x_2-x_0$.

№ Итерации	Метод ложного положения	Метод парабол (7)
1	9.03132999	8.11019939
2	8.17915287	6.66744748
3	7.43870023	5.6485077
4	6.80766904	5.05262048
5	6.28427374	4.82433649
6	5.86472608	4.78642747
7	5.54122387	4.78427659
8	5.30154934	
9	5.1305015	
10	5.01228765	
11	4.93264724	
12	4.88000594	
13	4.84567831	
14	4.8234996	
15	4.80925857	
16	4.8001514	
17	4.79434267	
18	4.79064401	
19	4.78829148	
20	4.78679619	

Действительно, из (15) имеем $x_3=x_1+(\varepsilon\sqrt{D}-f'(x_1))/f''(x_2)$, где $D=(f'(x_1)-(x_1-x_0)f''(x_2))^2-2f(x_0)f''(x_2)$ и для разности $x_3-\xi$ получаем

$$x_3-\xi=((x_1-\xi)f''(x_2)-f'(x_1)+\varepsilon\sqrt{D})/f''(x_2)$$

$$=((2x_1-x_0-\xi)(x_0-\xi)f''(x_2)-2(x_0-\xi)f'(x_1)+2f(x_0))/((x_1-\xi)f''(x_2)$$

$$-f'(x_1)-\varepsilon\sqrt{D})=A/B.$$

По формуле Тейлора имеем

$$0=f(\xi)=f(x_0)+(\xi-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2}(\xi-x_0)^2f''(x_0)+\frac{1}{6}(\xi-x_0)^3f'''(\xi_1),$$

$$f''(x_2)=f''(x_0)+(x_2-x_0)f'''(\eta_2),\ f'(x_1)=f'(x_0)+(x_1-x_0)f''(x_0)+\frac{1}{2}(x_1-x_0)^2f'''(\eta_1).$$

Отсюда для числителя A получаем

$$A=(x_0-\xi)((2x_1-x_0-\xi)(f''(x_0)+(x_2-x_0)f'''(\eta_2))-2f'(x_0)-2(x_1-x_0)f''(x_0)$$

$$-(x_1-x_0)^2f'''(\eta_1)+2f'(x_0)-(x_0-\xi)f''(x_0)+\frac{1}{3}(x_0-\xi)^2f'''(\xi_1))$$

$$=(x_0-\xi)((2x_1-x_0-\xi)(x_2-x_0)f'''(\eta_2)-(x_1-x_0)^2f'''(\eta_1)+\frac{1}{3}(x_0-\xi)^2f'''(\xi_1).$$

Пусть $\xi=x_0+\lambda(x_2-x_0)=2x_1-x_0+\mu(x_2-x_0)$, где λ и μ фиксированные числа, удовлетворяющие неравенствам: $0<\lambda<1$; $-2<\mu<1$. Тогда имеем $x_1-x_0=h(\lambda-\mu)/2$; $|x_0-\xi=-\lambda h$ и если $M_1=\max_{x\in(x_0,x_2)}|f'''(x)|$, а M_2 — оценка снизу для выражения $|B|$, то найдем нужный нам приближенный закон изменения погрешности $x_3-\xi$:

$$|x_3-\xi|\le h^3(M_1/M_2)\lambda(|\mu|+\frac{1}{4}(\lambda-\mu)^2+\frac{1}{3}\lambda^2).$$

Идеи, выдвинутые Н. Обрешковым в созданной им теории приближенного решения нелинейных уравнений, успешно развиваются и в настоящее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Обрешков. Върху численото решение на уравненията посредством квадратни уравнения. *Год. Соф. унив. Физ. мат. фак.*, **55**, кн. 1, 1962, 211—228.
2. Н. Обрешков. Върху численото решение на уравненията. *Год. Соф. унив. Физ. мат. фак.*, **56**, кн. 1, 1963, 73—83.
3. N. Obreschkoff. Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome. Berlin, 1963.
4. Р. Иванов, Н. Кюркчиев. Методы решения уравнений и систем уравнений, использующих квадратичные функции. *Сердика*, **3**, 1977, 253—260.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 25. 12. 1985